

有限区域风场的分解和重建*

周玉淑[†] 曹 洁

(中国科学院大气物理研究所, 北京 100029)

(2007 年 11 月 18 日收到; 2008 年 4 月 1 日收到修改稿)

对有限区域进行旋转风和辐散风的分解, 是中尺度系统结构分析的一种诊断方法, 可提高对中尺度系统动力结构的认识. 一方面, 有限区域风场的分解可以给出总风场中无辐散风与无旋转风的不同分布, 还可根据这两种风场的分布特征进行不同要求的分析; 另一方面, 由于耦合边界条件不能直接计算, 计算过程中必须简化处理, 使有限区域风场分解本身还有许多问题没有很好解决. 目前, 对风场进行有效分解的方法是对有限区域里的流函数和速度势进行求解, 然后对流函数和速度势求导得到对应的无辐散风与无旋转风. 有限区域流函数和速度势求解的准确程度主要以分解后的风场能否还原到原始风场(即风场重建)为标准. 本文总结了有限区域风场分解和重建的方法, 重点介绍了调和正弦/余弦方法, 该方法可较准确有效地解决有限区域风场的分解和重建问题, 对进一步研究天气系统的动力结构有较好效果.

关键词: 有限区域, 风场分解和重建, 调和正弦/余弦方法, 流函数和速度势

PACC: 9260Y, 9260X, 9260Q

1. 引 言

不少研究都根据旋转风和辐散风形式的能量收支方程进行诊断分析, 以了解辐散运动对系统发展的贡献^[1]. 对旋转风和辐散风分离最有效的工具就是流函数 Ψ 和速度势 χ ^[2]. 由于不存在侧边界, Ψ 和 χ 的分析方法已经成功用于全球大气环流分析^[3-8], 但是, 因为有限区域的计算涉及到边界的问题, 如果处理不好, 就不能在有限区域里得到准确的 Ψ 和 χ 分布, 因而得不到准确的旋转流场和辐散流场. 故而, 对于有限区域来说, Ψ 和 χ 的分析方法还基本没有用于天气系统的诊断和数值模拟分析中. 以往计算 Ψ 和 χ 时, 一般都在边界上取速度势为零或在矩形区域对流函数和速度势取周期边界条件, 这样计算所得的 Ψ 和 χ 对有限区域来说误差较大. 所以, 在有限区域里计算 Ψ 和 χ , 并将之用于天气系统分析的研究成果一直并不多见.

Ψ 和 χ 分析与风场分解和重建密切相关. 有限区域风场的分解与重建非常有意义, 通过这种分

解, 一方面可给出无辐散风场与无旋风场的分布, 可进行中尺度系统的动力结构分析, 研究旋转和辐合辐散运动在中尺度系统发生发展中的作用及其相互作用; 另一方面, 有限区域风场分解本身就是一个难题, 许多问题并没有很好解决. 在对有限区域进行 Ψ 和 χ 分析、有限区域风场的重建和分解方法方面已有一些研究结果, 例如: Stephens 和 Johnson^[9] 通过周期边界条件, 利用有限差分近似和 Fourier 变换计算了有限区域的 Ψ 和 χ , 但他们的方法不能用于给定任意边界值的有限区域. Sangster^[10] 通过给定 Dirichlet 边界条件解决了有限区域的 Ψ 和 χ 的计算问题, 但经过计算证明^[11,12], 这种边界条件不能在有限区域里准确地分解和重建水平风场. 因此, Bijlsma 等^[13] 从另外一个角度出发, 利用同时解两个 Poisson 方程的方法来计算 Ψ 和 χ . 但是, Lynch^[14,15] 重新验证了 Bijlsma 等^[13] 的方法后发现, 这个方法在一般情况下不收敛, 用计算的 Ψ 和 χ 重建的风场也不能回到原始风场, 原因是在有限区域里计算 Ψ 和 χ 时解不唯一^[14,15]. 因此, Lynch^[15] 通过给定 Dirichlet 边界、Neumann 边界

* 国家重点基础研究发展计划(批准号:2009CB421505)、国家自然科学基金(批准号:40975034)和公益性行业(气象)科研专项基金(批准号:GYHY200906004, GYHY200706020)资助的课题.

[†]E-mail: zys@mail.iap.ac.cn

以及这两种边界条件的组合来重新讨论这个问题. 他的迭代方法可以用于分析某些天气个例, 但是计算比较费时, 而且不能保证所有天气个例的迭代过程都能收敛. 所以这一方法也存在极大的局限性, 以至于他认为有限区域风场的分解和重建是无法准确计算的. 但是, Chen 和 Kuo^[16,17] 认为: 虽然在有限区域里计算 Ψ 和 χ 的解不唯一, 但是风场的旋转分量和辐散分量的和是唯一的, 利用这个特性, 可设计出一种迭代方法来分解有限区域里的风场. 该方法通过求解齐次边界条件下的 Poisson 方程和耦合边界条件下的 Laplace 方程分别得到风场的内、外分量, 即可准确地得到有限区域里的旋转风和辐散风, 而且利用计算的 Ψ 和 χ 重建的风场与原始风场基本上一致, 误差一般在 10^{-2} 量级, 保证了有限区域风场分解和重建的准确性. 因此, 本文重点介绍 Chen 和 Kuo^[16,17] 的有限区域风场的分解和重建方法.

Chen 和 Kuo^[16,17] 的方法中用到了谱系数展开方法. 该方法早已成功应用于全球大气环流模式^[18-21]. 与常规的差分方法相比, 在求导过程中, 只是谱系数在变化, 精度比差分方法至少高两个量级, 求导比较精确. 但是, 由于很难选择合适的基函数在有限区域满足时变边界条件, 很少应用到有限区域数值模式. 在这个方面也取得一些进展, 如 Tatsumi^[22] 用了双 Fourier 变换, 引入了非正交的时变侧边界条件; Fulton 和 Schubert^[23,24] 则用到了 Chebyshev 谱方法. 谱系数展开方法有很多优点, 如: 全球谱模式中的半隐式时间积分格式比差分格式效率更高, 因为球谐函数是 Laplace 算子的特征函数, 故 Laplace 方程和 Poisson 方程的解很容易处理. 因此, 在全球谱模式中更多地用涡度和散度方程, 而不是原始动量方程. 而 Chen 和 Kuo^[16,17] 提出的修正的双 Fourier 展开方法, 不仅满足时变的侧边界条件, 而且具有类似于全球谱模式中球谐函数的优点. 从数学形式上看, 该方法把函数 (如水平风场、 Ψ 和 χ) 展开成两部分之和. 第一部分是 Laplace 方程在给定边界条件下的解, 由于 Laplace 方程的解是调和函数, 被称为调和部分, 又因其解与区域内部值无关, 也称外部部分; 第二部分是原始函数与调和部分的差, 这个函数是齐次边界条件下 Poisson 方程的解, 只与区域内部的涡度和散度有关, 故称为内部部分, 并可用双 Fourier 的正弦/余弦函数系列展开. 与 Gottlieb 和 Orszag^[25] 的用多项式减去 Fourier 正弦/余弦函数系列的方法相比, Chen 和

Kuo^[16,17] 的方法可称为调和正弦/余弦函数系列谱展开.

2. 有限区域水平风场分解与重建以及 Ψ 和 χ 求解的数学问题

根据 Helmholtz 原理, 水平风场可以分解为旋转风分量和辐散风分量两个部分, 表示为

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_D, \quad (1)$$

其中, \mathbf{V}_R 和 \mathbf{V}_D 分别是旋转风和辐散风. 对风场分别作涡度和散度运算, 并引入 Ψ 和 χ 的概念, 得到,

$$\mathbf{V} = \mathbf{k} \times \nabla\psi + \nabla\chi, \quad (2)$$

$$\nabla^2\psi = \Omega, \quad (3)$$

$$\nabla^2\chi = D, \quad (4)$$

其中, Ω 和 D 分别是垂直涡度和水平散度.

对全球 Ψ 和 χ 的计算, 即在周期边条件下的数学求解 Poisson 方程 (3) 和 (4), 已经得到了解决; 然而求解有限区域的 Ψ 和 χ , 还要考虑边界条件, 即,

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial\psi}{\partial n} + \frac{\partial\chi}{\partial s} = V_s, \quad (5)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{V} = -\frac{\partial\psi}{\partial s} + \frac{\partial\chi}{\partial n} = V_n, \quad (6)$$

其中, \mathbf{s} 和 \mathbf{n} 分别是沿边界的切向和法向单位矢量, V_s 和 V_n 则对应各个边界上的切向风和法向风的速度. 所以, 有限区域 Ψ 和 χ 的计算, 就是求解在一定边界条件下的 Poisson 方程. 然而, 由于边界条件 (5) 和 (6) 式中的 ψ 和 χ 是耦合在一起的, 既不是 Dirichlet 边界 (第一类边界条件), 也不是 Neumann 边界 (第二类边界条件), 这样的微分问题无法直接求解, 于是各种简化方案便被应用到实际问题中. 简化的方法主要有, 对只含有流函数或者速度势的边条件沿边界作积分得到 Dirichlet 边值; 或先忽略边界上流函数或速度势的法向或切向分量直接作为 Neumann 边值进行计算等. 这些方法都只是数学求解的需要, 没有任何物理意义, 而且通过上千步的边界修正和迭代后也不能得到满意的结果. 尤其对小区域问题, 由于难以满足边界积分等于零的数学条件, 更是无法计算.

本文的主要内容之一就是介绍 Chen 和 Kuo^[16,17] 提出的调和正弦/余弦函数系列展开的办法, 解决有限区域风场分解和重建问题. 该方法的物理思想是: 首先把整个求解区域分为内外两个部分, 各物理量分别由内部变量和外部变量单独决

定,通过分别求解物理量的外部部分满足的耦合边值下的 Laplace 方程得到调和函数,以及求解内部部分满足的齐次边值下的 Poisson 方程并用正弦和余弦函数展开,计算得到有限区域的 Ψ 和 χ ,再根据方程(2)完成风场重建. 所以,风场的分解和重建都与 Ψ 和 χ 的求解密切相关.

3. 调和正弦/余弦函数系列展开谱方法

3.1. 调和正弦函数系列展开谱方法及其在求解 Poisson 方程中的应用

考虑一个以 Σ 为边界的闭合矩形区域 $R: 0 \leq x \leq L_x; 0 \leq y \leq L_y$. 函数 $f(x, y)$ 被分解为两个部分:

$$f(x, y) = f_h(x, y) + f_i(x, y), \quad (7)$$

而且函数 $f(x, y)$ 满足 Poisson 方程

$$\nabla^2 f = H, \quad (8)$$

其在边界上满足一类边条件

$$f|_{\Sigma} = f(\Sigma), \quad (9)$$

其中 $f_i(x, y)$ 在 R 中满足 Poisson 方程

$$\nabla^2 f_i = H, \quad (10)$$

在边界 Σ 上满足

$$f_i|_{\Sigma} = 0. \quad (11)$$

用谱系数展开方法可以求解齐次边界条件下的 Poisson 方程(10),得到函数 $f_i(x, y)$. 由于 $f_i(x, y)$ 仅与函数在 R 内的值有关,称为函数 $f(x, y)$ 的内部部分. 通过二维有限空间的 Fourier 正弦变换,得到其解的具体表达式为

$$\begin{aligned} f_i(x, y) &= F^{-1}[F_i(m, n)] \\ &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N F_i(m, n) \sin \frac{m\pi x}{L_x} \sin \frac{n\pi y}{L_y} dx dy, \end{aligned} \quad (12)$$

其中, F^{-1} 是从谱空间到格点空间的反 Fourier 正弦函数转换算子, F 是二维 Fourier 正弦变换算子.

$$\begin{aligned} F[f_i(x, y)] &= F_i(m, n) = \frac{4}{L_x L_y} \int_0^x \int_0^y f_i(x, y) \\ &\quad \times \sin \frac{m\pi x}{L_x} \sin \frac{n\pi y}{L_y} dx dy. \end{aligned} \quad (13)$$

(7)式中的 $f_h(x, y)$ 分量在 R 中满足 Laplace 方程

$$\nabla^2 f_h = 0. \quad (14)$$

在边界 Σ 上满足

$$f_h|_{\Sigma} = f(\Sigma). \quad (15)$$

因此,该函数完全由边界上的函数值决定,与内部物理量无关,称为函数 $f(x, y)$ 的外部部分. 从它满足

的调和方程(14)来看,该微分问题的解是一个调和函数,故又称 $f_h(x, y)$ 为调和部分. 这个微分问题可以用迭代法求解,具体求解方法请参见文献[16].

综合计算出的调和分量和内部分量,便得到了函数 $f(x, y)$ 在有限区域上的解. 可见,其形式上是由一个调和函数和一个双正弦函数展开组成,故这种方法称为调和正弦函数系列展开. 调和正弦函数系列展开有很多优点,主要集中在对 Laplace 方程、Poisson 方程的求解问题上,只需做简单的算子运算,且同时满足收敛和计算效率高的特性.

3.2. 调和余弦函数系列展开谱方法及其在求解 Poisson 方程中的应用

按照调和正弦展开的方法,定义在矩形区域 $R: 0 \leq x \leq L_x; 0 \leq y \leq L_y$ 上的函数 $f(x, y)$ 可以分成调和部分 f_h 和内部部分 f_i . 这里,函数的内部和调和部分还是由区域内的物理量分别单独决定;不同的是,内部部分用双余弦函数展开.

调和余弦分解方法的表达式为

$$\nabla^2 f_{hc} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial f_{hc}}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = \frac{\partial f}{\partial n} \Big|_{\Sigma}, \quad (17)$$

$$\nabla^2 f_{ic} = \nabla^2 f, \quad (18)$$

$$\frac{\partial f_{ic}}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = 0, \quad (19)$$

$$f(x, y) = f_{hc}(x, y) + f_{ic}(x, y). \quad (20)$$

这就是调和余弦分解方法. 可见,调和正弦分解与调和余弦的不同之处是在边界条件的处理上:调和正弦针对的是 Dirichlet 边界,而调和余弦是求解 Neumann 边界条件的微分问题. 首先,只有满足一定条件的函数才能做调和余弦分解. 依据 Green 定律 $\iint_R \nabla^2 f dx dy = \oint_{\Sigma} \frac{\partial f}{\partial n} ds$ 和(17)式,可得到

$$\iint_R \nabla^2 f dx dy = \oint_{\Sigma} \frac{\partial f}{\partial n} ds = 0. \quad (21)$$

可见,如果一个函数 $f(x, y)$ 能进行成(16)~(20)式所示的调和余弦函数系列展开,那么其法向量沿闭合边界 Σ 的线积分必须等于零,并且其 Laplace 算子在该闭合区域 R 内的面积分为零. 这便是函数做调和余弦分解的必要条件. 针对有限区域 Ψ 和 χ 求解问题,(22)和(23)式给出了调和余弦展开的必要条件为

$$\iint_R \nabla^2 \psi dx dy = \oint_{\Sigma} \frac{\partial \psi}{\partial n} ds = 0,$$

$$\iint_R \Omega dx dy = \oint_{\Sigma} V_{\psi, n} ds = 0, \quad (22)$$

$$\iint_R \nabla^2 \chi dx dy = \oint_{\Sigma} \frac{\partial \chi}{\partial n} ds = 0,$$

$$\iint_R D dx dy = \oint_{\Sigma} V_{\chi, n} ds = 0. \quad (23)$$

通常在较大的研究区域内,上述条件均可成立. 与调和正弦方法相比,调和余弦方法在有限区域风场分解与重建问题上的优势有:1) 求解 Ψ 和 χ 的边界条件无需对边界上的风分量作线积分运算,避免了积分的连续性问题,且边值更精确,计算得到的风场的内部和调和分量更准确;2) 计算收敛,迭代次数比调和正弦方法少,收敛更快.

4. 调和正弦/余弦函数系列谱系数方法对 Ψ 和 χ 的计算

在矩形区域 R 中,其边界表示为: $\Sigma = \Sigma_w + \Sigma_s + \Sigma_e + \Sigma_n$, 在边界条件(5)和(6)式求解 Poisson 方程(3)和(4)中的流函数 ψ 和速度势 χ 的问题可以利用调和正弦/余弦系列展开的方法来求解. 把 ψ 和 χ 都分成两部分:

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_h + \psi_i, \\ \chi &= \chi_h + \chi_i. \end{aligned} \quad (24)$$

ψ_h, χ_h 和 ψ_i, χ_i 分别表示 Ψ 和 χ 的调和部分和内部部分. ψ_i, χ_i 满足

$$\nabla^2 \psi_i = \xi, \quad (25)$$

$$\nabla^2 \chi_i = D. \quad (26)$$

其边界条件是 Dirichlet/Neumann 边界. 用双 Fourier 正弦/余弦函数系列展开,很容易得到方程组(25)和(26)的解. Ψ 和 χ 内部部分分量的和变为

$$U_i = -\frac{\partial \psi_i}{\partial y} + \frac{\partial \chi_i}{\partial x} = u_{\psi_i} + u_{\chi_i}, \quad (27)$$

$$V_i = \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\partial \chi_i}{\partial y} = v_{\psi_i} + v_{\chi_i},$$

U_i 和 V_i 被认为是风场的内部风分量,简称为内部风.

根据(24)到(27)式, Ψ 和 χ 的调和部分必定满足

$$\nabla^2 \psi_h = 0, \quad (28)$$

$$\nabla^2 \chi_h = 0, \quad (29)$$

在有限区域 R 里,总的风场和内部风的差

$$\begin{aligned} U_E &= U - U_i, \\ V_E &= V - V_i. \end{aligned} \quad (30)$$

U_E 和 V_E 被定义为外部风. 从方程(24),外部风可以被 Ψ 和 χ 的调和部分表示为

$$U_E = -\frac{\partial \psi_h}{\partial y} + \frac{\partial \chi_h}{\partial x} = u_{\psi_e} + u_{\chi_e},$$

$$V_E = \frac{\partial \psi_h}{\partial x} + \frac{\partial \chi_h}{\partial y} = v_{\psi_e} + v_{\chi_e}. \quad (31)$$

在有限区域中,外部风既是无旋的,也是无辐散的. 因此, U_E 和 V_E 与区域内的涡度和散度无关. 这样,耦合边界(5)和(6)式可以重新写为

$$\frac{\partial \psi_h}{\partial n} + \frac{\partial \chi_h}{\partial s} = V_{E_t}, \quad (32)$$

$$-\frac{\partial \psi_h}{\partial s} + \frac{\partial \chi_h}{\partial n} = V_{E_n}, \quad (33)$$

其中 V_{E_t} 和 V_{E_n} 是外部风 v_E 的切向和法向分量. 因此, (32)和(33)式就是在有限区域 R 中求解 Ψ 和 χ 的调和部分的 Laplace 方程时所必需满足的耦合边界条件.

引入外部风和内部风的概念后,有限区域风场的分解和重建就转化为外部风的分解和重建问题. 计算流程如图 1 所示. 从图 1 可见,无论是风场的分解还是重建,关键是在耦合边界条件(32)和(33)式下求解 Laplace 方程(28)和(29).

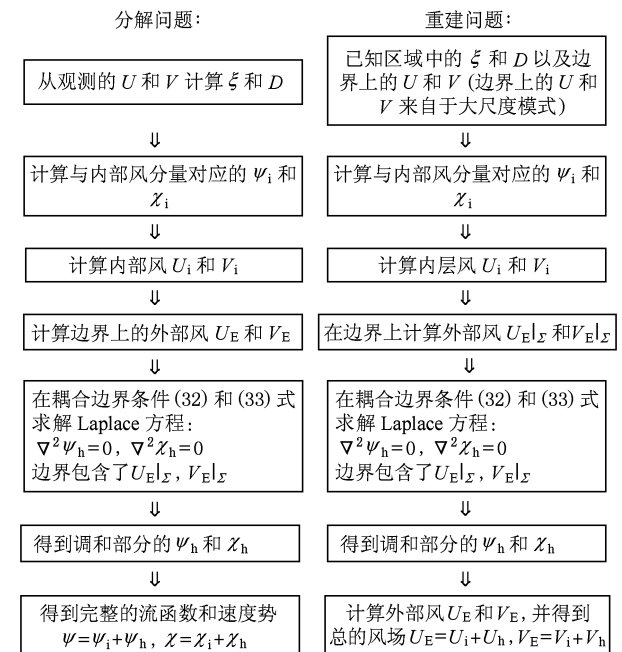


图 1 有限区域风场的分解和重建流程

虽然 Ψ 和 χ 的内部部分(ψ_i 和 χ_i)和内部风(U_i 和 V_i)都是唯一的,但由于调和部分的解可能不唯一,所以有限区域中风场分解的 Ψ 和 χ 的解是不唯

一的,但从 Ψ 和 χ 计算得到的风场的和却有唯一的解. 所以,对于一个给定风场的分解问题,如果 Ψ 和 χ 存在,一旦其分解的旋转风和辐散风分量的和等于给定的风场,就得到给定的风场分解的结果,至于 Ψ 和 χ 以及其旋转分量和辐散分量是否唯一就不再重要.

5. 暴雨个例诊断

Chen 和 Kuo^[16,17] 虽然给出了调和正弦/余弦方法的分解原理,但没有把调和正弦/余弦方法得到的无辐散场和无旋场应用于暴雨中尺度系统的分析和识别. 本文将在此方面给出分析结果. 由于调和余弦函数系列展开方法的迭代收敛比调和正弦函数系列展开方法快,本节给出基于调和余弦方法完成风场分解和重建的个例介绍,以 2004 年 8 月 12 日到 13 日的华北暴雨过程作为实际个例进行分析. 研究所用降水资料为常规气象站地面观测的降水,大尺度环境场由 NCEP/NCAR $1^\circ \times 1^\circ$ 的适时分析资料提供,风场分解和重建所用资料为 MM5 模拟输出结果. 由于本文只是要比较调和余弦方法的风场分解和重建的准确程度,不涉及对模拟结果进行检验,只需要满足重建后的风场能还原为分解前的原始风场即可.

从 2004 年 8 月 12 日到 13 日(图略),沿河南北部、山西、河北和天津及北京等地区出现一条西南—东北走向的雨带,雨带在华北地区还镶嵌着三个暴雨中心,分别位于山西东部、河北西部和天津,这次降水过程主要是纬向型分布. 从大尺度环流来看,2004 年 8 月 12 日 00UTC (世界协调时,下同)

时,850 hPa 等压面上(图略),福建和浙江沿海有 2004 年 14 号热带气旋“云娜”的气旋性环流维持,从贝加尔湖以南的蒙古地区一直到我国内蒙古西部到东部的大范围地区是一个暖高压,而在山东半岛、黄海、朝鲜半岛和日本海及西北太平洋的大片区域都被干暖的副热带高压所控制,而河北、北京和天津等地则处于这两个高压区对峙的气压相对偏低的高压坝中. 河北和北京地区维持有强的上升运动. 700 hPa 等压面的天气形势与 850 hPa 类似,只是华北地区明显处于一个槽前的暖平流区,上升运动较 850 hPa 更强. 在 700 hPa 上,“云娜”台风在东南沿海登陆的同时,其外围的水汽随着副高边缘的气流经过山东后到达河北和北京等地,而北方南下的冷空气恰好与北上的暖湿空气交汇在华北地区. 从大尺度的风场来看,华北地区有明显的风向风速的辐合,因而有较强的上升运动出现在河北和北京等地,但分析不出涡旋系统. 在 500 hPa 上,西北部的甘肃、陕西和山西等省上空被西太平洋副高分裂出的小高压控制着,而山东半岛及以东的洋面上仍然被强大的西太平洋副高控制,中纬度的气流相对平直,华北地区处在一个槽线呈西南—东北走向的浅槽前,且仍然有上升气流维持,只是强度比低层减弱. 在河北和山东交界处与天津附近有弱的风向的辐合. 在 200 hPa 上,整个中国大陆都处于南亚高压的控制下,整个华北地区都是高层气流的辐散区,除了冀西北有弱的上升气流以外,其他地方的上升运动都完全消失. 从大尺度的环流条件来看,华北处在冷暖空气的交汇线上,高低层系统的配置也是低层辐合、高层辐散的环流型.

从 850 hPa 和 700 hPa 分解前的全风场(图 2(a))和利用计算的 Ψ 和 χ 重建的全风场(图 2(b))

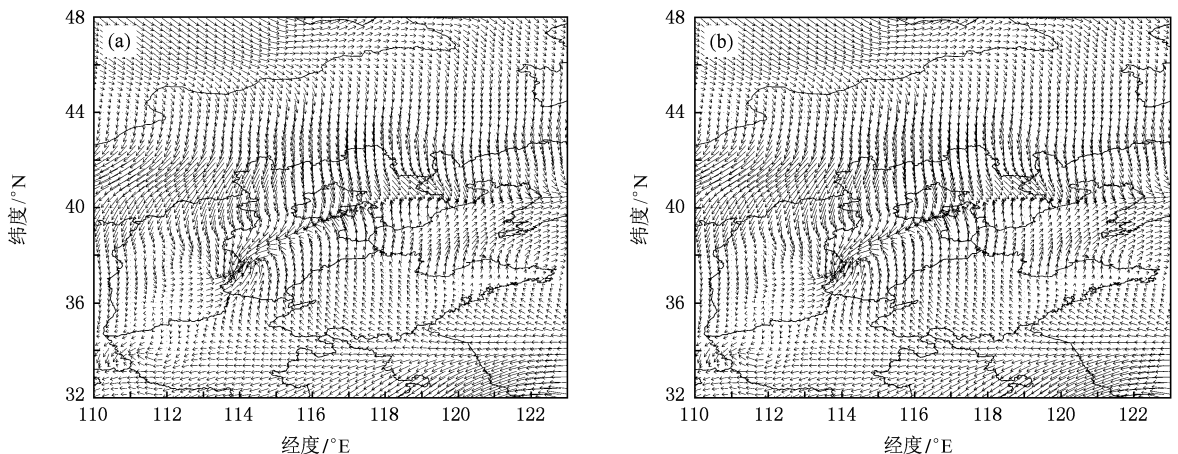


图 2 2004 年 8 月 12 日 08UTC 850 hPa 风速(单位: $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) (a) 实际, (b) 重建

来看,利用计算得到的 Ψ 和 χ 重建的风场基本一致,误差量级为 10^{-2} ,最大仅为 $0.04 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$,表明调和余弦方法确实是对有限区域进行 Ψ 和 χ 计算以及有限区域风场分解和重建的有效方法,因此可以利用调和余弦方法得到的 Ψ 和 χ 计算的旋转风和散度风对天气系统做更深入的结构探讨.

进一步分析可见,在 2004 年 8 月 12 日 08UTC,从 850 hPa 全风场来看(图 2(a)),在山西河北交界的 ($37\text{--}38^\circ\text{N}$, 114°E) 附近有一个气旋性旋转的气流,从这个旋转气流的北部,也就是从河北中西部往东北方向延伸,过北京天津交界处一直到辽东湾有一条明显的辐合线. 从分解后的旋转风场来看

(图 4(a)),我们发现,全风场上气旋性旋转的气流对应了一个低涡系统,但是其中心并不在 ($37\text{--}38^\circ\text{N}$, 114°E),而是在河北境内,大约在 (37.5°N , 114.5°E) 的地方,而辐合中心在低涡偏左侧(图 4(b)),在低涡辐合中心往东北方向的辐合带与全风场上基本一致,但辐合线更明显一些. 表明经过调和余弦分解方法分解后的旋转场显然比全风场上的低涡系统更明显,且低涡中心更清楚. 用全风场定位的低涡中心与实际的低涡中心并不完全重合,而是有大概 50 km 左右的误差,相应的暴雨预报也会随之发生偏差. 所以,调和余弦方法的风场分解结果对我们提炼中尺度系统有很大的帮助.

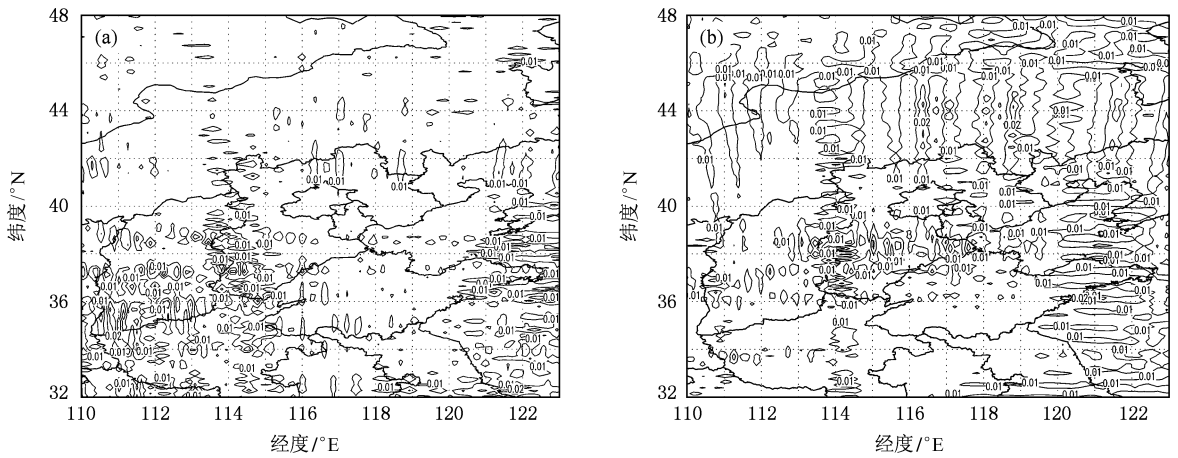


图 3 2004 年 8 月 12 日 08UTC 850 和 700 hPa 重建风速与原风速差别(单位: $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) (a)850 hPa, (b)700 hPa

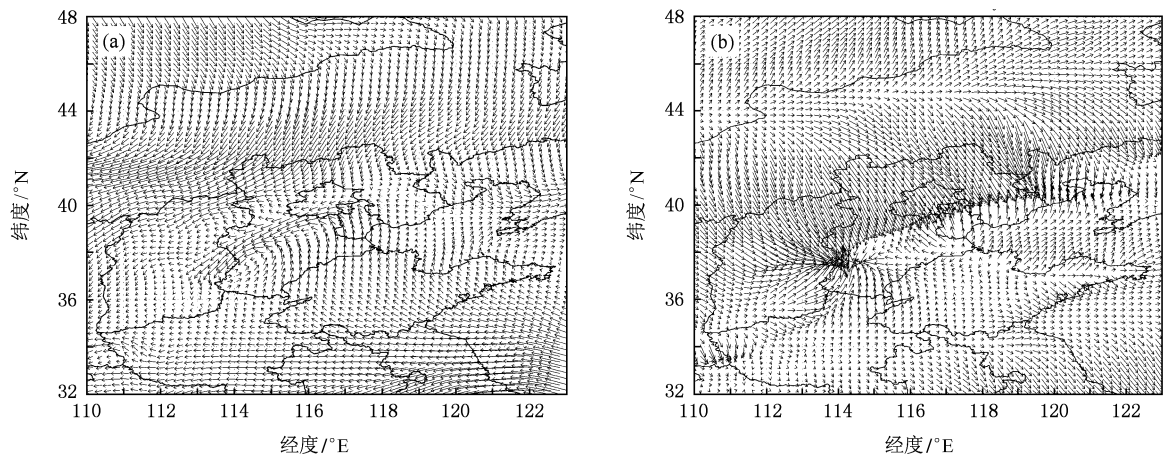


图 4 2004 年 8 月 12 日 08UTC 850 hPa 由流函数计算的旋转风矢量和速度势计算的辐散风矢量分布(单位: $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) (a)旋转风矢量, (b)辐散风矢量

在 700 hPa 全风场上,850 hPa 上山西河北交界的 ($37\text{--}38^\circ\text{N}$, 114°E) 附近的气旋性旋转气流已消失,辐合线从山西河北交界的 (39°N , 114.3°E) 开始,

穿过北京并延伸到辽宁西部. 由于这次暴雨过程的风速辐合线尺度较大,东西延绵将近 1000 km,所以,全风场上就能分析到这条辐合线,与分解后的辐散场

上辐合线的位置相当,但在山西河北交界($37\text{--}38^\circ\text{N}$, 114°E)附近的辐合中心以及河北东南部的辐散中心都更明显.而在分解出的旋转风场上,山西河北交界的($37\text{--}38^\circ\text{N}$, 114°E)附近仍然维持着一个低涡系统,只是这个系统比 850 hPa 强度要弱,而且,从河北中部到北京西南部,即($38\text{--}40^\circ\text{N}$, $115\text{--}116^\circ\text{E}$)区域有一个中尺度槽,北京南部、天津以及河北中部都处在这个槽的槽前上升气流区,这个特征在全风速场上完全分析不出,进一步表明调和余弦的风场分解方法对准确定位和分析中尺度系统有很大的好处.

所以,从 2004 年 8 月 12 日 08UTC 对流层中低层全风场与分解后的旋转流场、辐散流场的对比分析可以看到,分解后的旋转风场对反映中尺度低涡的结构、位置及发展高度等更清楚,同样,辐散流场除了能够反映大尺度的辐合线外,对分析中尺度辐合线和辐合中心等的位置也比全风场要更准确.

求解有限区域 Ψ 和 χ 的常用计算方法是迭代法,在迭代法中又分张弛法,交错方向的隐式方法

(ADI 法),多次平均法(IM 法)等,其中以给定边界条件下的张弛法比较常见.为了进一步说明调和余弦方法的优越性所在,本文以下将给出张弛法中最常用的加速 Liebmann 法和 Richardson 法为例,与调和余弦方法作一比较,Richardson 法和加速 Liebmann 法具体的计算公式参见文献[26].判别有限区域风场分解的原则是看该方法经过分解后又重建的风场与原始风场的接近程度(也就是两者的差),重建风场与原始风场的差越小,意味着该方法越好,其分解得到的有旋场(与 Ψ 对应)和无旋场(与 χ 对应)越准确.图 5 分别给出了调和余弦方法,加速 Liebmann 法和 Richardson 法重建的风场与原始风场的差.从图 5(a)可见,调和余弦方法重建风场与原始风场风场的差基本为 0,其误差量级为 10^{-2} ,而图 5(b)所示的加速 Liebmann 法和图 5(c)所示的 Richardson 法重建的风场与原始风场的差都比调和余弦方法大,误差中心值都超过了 $4\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$,其误差量级都在 10^0 .图 5 的结果表明了调和余弦方法比以通常用的张弛法计算结

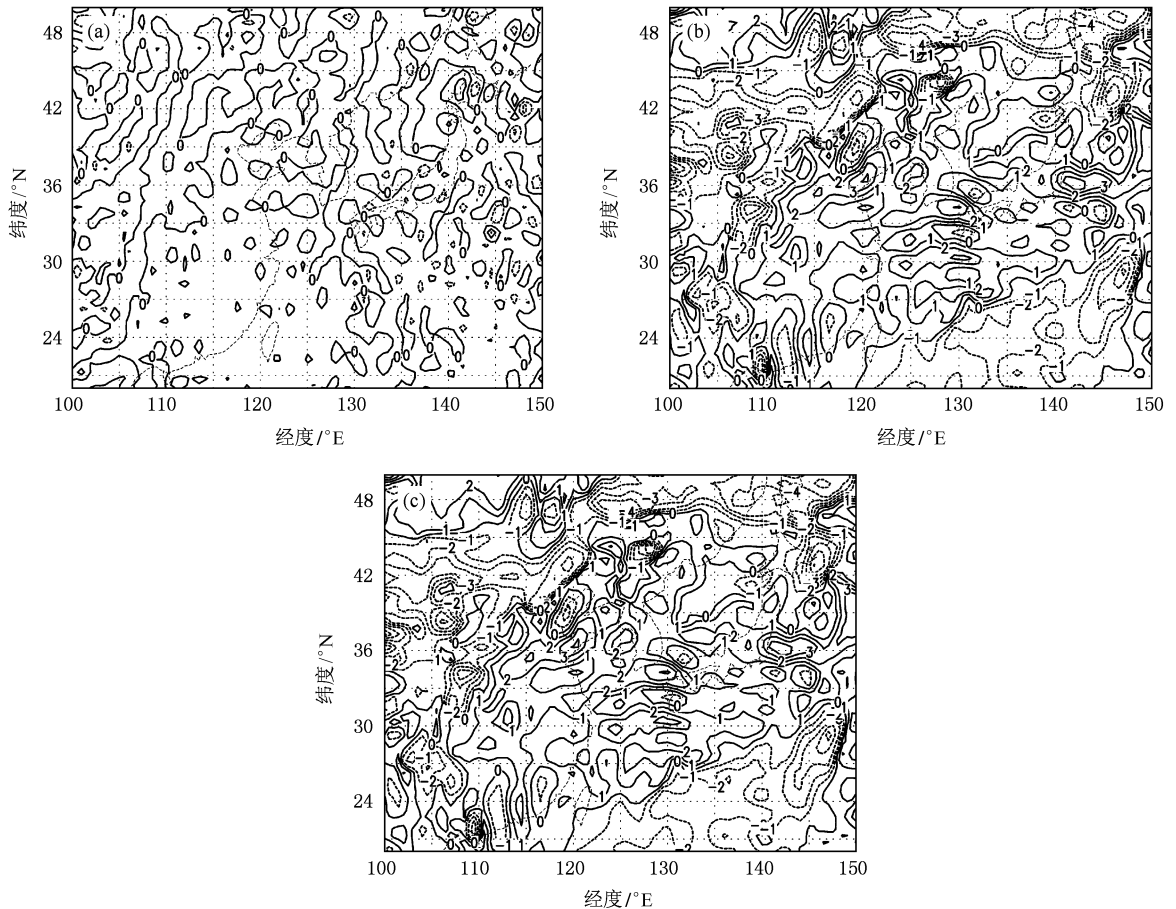


图 5 2007 年 6 月 30 日 00UTC 700 hPa 上重建风场与原始风场差(单位: $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) (a) 调和余弦方法, (b) 加速 Liebmann 法, (c) Richardson 法

果精度至少高了两个量级. 而且, 调和余弦方法计算速度快, 在实际计算过程中, 由于只是对调和部分的风速差这个小量进行迭代, 收敛很快, 一般只需 3 步, 而加速 Liebmann 法和 Richardson 法的迭代都经过了 2000 步以上, 收敛速度慢. 可见, 无论是在计算精度还是计算速度上, 调和余弦方法都优于常用的加速 Liebmann 法和 Richardson 法.

由以上用调和余弦方法对华北暴雨过程中的中尺度结构的分析和与其他常用张弛法计算结果的比较可见, 调和余弦方法对有限区域风场分解与重解的结果除了精度高以外, 还可以用于识别中尺度系统, 并分析中尺度系统的动力结构(如准确定位低涡中心、低涡系统的辐合中心以及辐散高度等), 对于追踪低涡等中尺度灾害性天气系统的生成、发展和移动, 尤其是在低涡系统的生成阶段有重要的应用价值.

6. 结 论

总结了有限区域风场分解和重建的方法, 重点

介绍了调和正弦/余弦函数系列谱系数展开方法, 并用实际天气系统风场的分解和重建进行验证. 这两种方法都能较准确地分解和重建有限区域的风场, 可用于对中尺度系统结构的细致分析, 但调和余弦方法的计算结果更准确, 收敛也较快, 这也是下一步研究中尺度系统时考虑要用的一种诊断技术. 需要指出的是, 对全球而言, 任何高度上整层的水平涡度和散度总是零, 但对有限区域则不然. 如果有有限区域里的涡度和散度场满足方程(22)和(23), 则有限区域必须取得相对的大, 区域越小, 条件(22)和(23)式越难满足, 这对研究中尺度系统仍然还是有限制. 因此, 如何在已有基础上找到一种普适的调和余弦分解方法来对较小的有限区域风场进行分解和重建是当前进行中尺度系统的风场分解和重建研究所面临的问题和难题. 同时, 在准确分解和重建有限区域风场的基础上, 结合一些较新的动力变量分析预报方法^[27-34]来进行中尺度系统的结构分析和预报也是下一步研究的目标.

感谢美国 Ohio 州立大学陈秋士教授的建议和讨论.

- [1] Ding Y H 1989 *Diagnostic Method in Weather and Dynamical Meteorology* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [丁一汇 1989 天气动力学中的诊断分析方法(北京:科学出版社)]
- [2] Hawkins H, Rosenthal S 1965 *Mon. Wea. Rev.* **93** 245
- [3] Krishnamurti T 1968 *Mon. Wea. Rev.* **96** 197
- [4] Krishnamurti T 1968 *Mon. Wea. Rev.* **96** 208
- [5] Krishnamurti T 1985 *Mon. Wea. Rev.* **113** 1590
- [6] Krishnamurti T, Ramanathan Y 1982 *J. Atmos. Sci.* **39** 1290
- [7] Knutson T, Weickmann K 1987 *Mon. Wea. Rev.* **115** 1407
- [8] Ding Y H, Hu G Q 2003 *Acta Meteorologica Sin.* **61** 129 (in Chinese) [丁一汇、胡国权 2003 气象学报 **61** 129]
- [9] Steplens J, Johnson K 1978 *Mon. Wea. Rev.* **106** 1452
- [10] Sangster W E 1960 *J. Meteor.* **17** 166
- [11] Shukla J, Saha K R 1974 *Mon. Wea. Rev.* **102** 419
- [12] Sangster W E 1987 *Mon. Wea. Rev.* **115** 1358
- [13] Bijlsma S J, Hafkensheid L M, Lynch P 1986 *Mon. Wea. Rev.* **114** 1547
- [14] Lynch P 1988 *Mon. Wea. Rev.* **116** 86
- [15] Lynch P 1989 *Mon. Wea. Rev.* **117** 1492
- [16] Chen Q, Kuo Y 1992 *Mon. Wea. Rev.* **120** 91
- [17] Chen Q, Kuo Y 1992 *Mon. Wea. Rev.* **120** 2653
- [18] Bourke W 1974 *Mon. Wea. Rev.* **102** 687
- [19] Hoskins B J, Simons A J 1975 *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* **101** 637
- [20] Baede A P M, Jarraud M, Cubasch U 1979 *Tech. Rep.* **15** 39
- [21] Machenhauer B 1979 *GRAP Pub. Ser.* **17** 124
- [22] Tatsumi Y 1986 *J. Meteor. Soc. Jpn* **64** 637
- [23] Fulton S R, Schubert W H 1987 *Mon. Wea. Rev.* **115** 1940
- [24] Fulton S R, Schubert W H 1987 *Mon. Wea. Rev.* **115** 1954
- [25] Gottlieb D, Orszag S A 1997 *Society for Industrial and Applied Mathematics* 172pp
- [26] Zhou J 1986 *Diagnostic Analyses in Weather* 63—76 (in Chinese) [周 军 1986 天气学诊断分析(南京:南京气象学院大气科学系)第 63—76 页]
- [27] Gao S, Lei T, Zhou Y 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 878
- [28] Gao S, Ping F, Li X, Tao W K 2004 *J. Geophys. Res.* **109**, D14106
- [29] Gao S, Wang X, Zhou Y 2004 *Geophys. Res. Lett.* **31** L12113
- [30] Gao S, Zhou Y, Lei T, Sun J 2005 *Sci. Chin. Ser. D* **48** 128
- [31] Zhou Y S, Deng G, Lei T 2006 *J. Graduate School Chin. Acad. Sci.* **23** 692 (in Chinese) [周玉淑、邓 国、雷 霆 2006 中国科学院研究生院学报 **23** 692]
- [32] Yang S, Gao S 2006 *Chin. Phys. Lett.* **23** 3003
- [33] Gao S, Li X, Tao W K, Shie C L, Lang S 2007 *J. Geophys. Res.* **112** D01105
- [34] Cao J, Gao S, Zhou Y S 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2600 (in Chinese) [曹 洁、高守亭、周玉淑 2008 物理学报 **57** 2600]

Partitioning and reconstruction problem of the wind in a limited region^{*}

Zhou Yu-Shu[†] Cao Jie

(*Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China*)

(Received 18 November 2007; revised manuscript received 1 April 2008)

Abstract

Partitioning and reconstruction problem of the wind in a limited region is a useful diagnostic technology. From the non-divergent and non-rotational wind component, one can know more about the structures of meso-scale systems. The effective way to wind partitioning and reconstruction in a limited region is to calculate the stream function and velocity potential in the same limited region. When the reconstructed wind approaches the original one, it means the partitioning process is successful and the calculated stream function and velocity potential is accurate. The most commonly used partitioning methods in the past are summarized in this paper, and the harmonic-sine/cosine method is emphasized. Case study shows that the harmonic-sine/cosine method can partition and reconstruct the wind in a limited region, and its results are encouraging for studying the dynamical structures of meso-scale systems.

Keywords: limited region, partitioning and reconstruction of the wind, harmonic-sine/cosine series expansion, stream function and velocity potential

PACC: 9260Y, 9260X, 9260Q

^{*} Project supported by the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant No. 2004CB418302), the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 40975034) and the Special Scientific Research Fund of Meteorological Public Welfare of Ministry of Sciences and Technology, China (Grant Nos. GYHY200906004, GYHY200706020).

[†] E-mail: zys@mail.iap.ac.cn