

准单色噪声驱动的耗散动力系统的信息熵演化*

郭永峰[†] 徐 伟 李东喜 王 亮

(西北工业大学应用数学系, 西安 710072)

(2009 年 6 月 25 日收到; 2009 年 7 月 28 日收到修改稿)

准单色噪声是一类所谓真正有色的噪声. 本文对准单色噪声驱动的耗散动力系统的信息熵演化进行研究, 文中首先运用线性变换的方法给出了所研究系统的 Fokker-Planck 方程, 然后结合 Shannon 信息熵定义推导了该系统随时间演化信息熵的精确表达式, 最后分析了系统耗散参数和准单色噪声对系统信息熵的显著影响.

关键词: 信息熵, 准单色噪声, Fokker-Planck 方程

PACC: 0520, 0570L, 6550

1. 引 言

研究噪声对动力学系统的影响已成为许多学者关注的热点问题^[1-19], 研究方向涉及到数学、物理学、化学、生物学、经济学等学科以及各种工程科学领域. 研究内容包括噪声诱导的相变、信息熵演化、逃逸率、首次穿越时间和随机共振等方面. 通过研究人们发现, 在许多实际的系统(例如生物系统、物理系统以及化学系统等)中的随机涨落现象都是由系统本身动力学行为产生的内噪声或者是外部环境的运动对系统影响而产生的外噪声引起的, 并且驱动动力系统的噪声是相当复杂的, 通常可将其分为白噪声、色噪声、双态噪声等.

人们对各种噪声驱动的动力系统的相关性质进行了大量的研究, 其中文献[9-12]中对一类所谓“真正有色”的噪声——准单色噪声(quasimonochromatic noise, QMN)驱动的动力系统的进行了研究. 因为这种噪声来源于具有不相干的、近乎单色光的电磁场, 所以习惯上称之为准单色噪声. 比较常见的一种简单的准单色噪声可看作由白噪声激励的一个一维谐波振荡器产生而得到的, 在适当的参数条件下, 准单色噪声表现出快速的随机振荡, 所以准单色噪声也可以看成是高频的

窄带噪声.

由于熵在度量系统运动的混乱或无规则的程度方面有着非常重要的作用, 因此, 为更好的理解噪声对动力系统的信息熵演化、熵流与熵产生以及熵变化率上界分别进行了相关的研究. 鉴于准单色噪声驱动的动力系统有着广泛的物理应用背景, 我们将在本文中对准单色噪声驱动的耗散动力系统的信息熵进行研究, 我们采用如下的 Shannon 信息熵定义^[13-18]

$$S = - \int \rho(U, t) \ln \rho(U, t) dU. \quad (1)$$

它是研究 Brown 粒子非平衡态和稳定态运动重要工具之一. 这里 $\rho(U, t)$ 为相空间中的连续概率密度函数.

本文将根据文献[13-17]的研究方法对准单色噪声驱动的耗散动力系统的信息熵演化进行研究, 文中首先运用线性变换的方法给出了所研究系统的 Fokker-Planck (FPK) 方程, 然后结合 Shannon 信息熵定义推导了该系统随时间演化信息熵的精确表达式, 最后分析了系统耗散参数和准单色噪声对系统信息熵的显著影响.

2. QMN 驱动的耗散动力系统

我们考虑如下准单色噪声驱动的耗散动力系

* 国家自然科学基金(批准号:10872165)资助的课题.

[†] E-mail: guoyongfeng@mail.nwpu.edu.cn

统,其 Langevin 方程为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\gamma x + \eta, \\ \dot{\eta} &= -2\Gamma\dot{\eta} - \omega_0^2 + \xi.\end{aligned}\quad (2)$$

其中, γ ($\gamma > 0$) 为系统耗散参数, Γ 是协和振子的阻尼系数, ω_0 是特征频率, ξ 是 Gauss 白噪声, 其均值和方差分别为

$$\begin{aligned}\langle \xi(t) \rangle &= 0, \\ \langle \xi(t)\xi(t') \rangle &= 2D\delta(t-t').\end{aligned}\quad (3)$$

其中, D 为噪声强度.

这里准单色噪声可以看成是白噪声通过协和振子滤波器的结果, 其振荡波形表现为准周期振荡, 且噪声强度越大, 振荡幅度越大. 当 $\Gamma \ll \omega_0$ 时, 准单色噪声实际上可以看作是窄带噪声, 其功率谱表达式为^[10-12]

$$\Phi(\omega) = \frac{2D}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\Gamma^2\omega^2}.\quad (4)$$

为便于对系统(2)进行研究, 将(2)式写成如下的等价形式

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\gamma x + \eta, \\ \dot{\eta} &= \zeta, \\ \dot{\zeta} &= -2\Gamma\zeta - \omega_0^2\eta + \xi.\end{aligned}\quad (5)$$

进一步令 $X_1 = x, X_2 = \eta, X_3 = \zeta$, 则等价系统(5)相应的 FPK 方程可写为

$$\begin{aligned}& \frac{\partial \rho(X_1, X_2, X_3, t)}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial[-\gamma X_1 + X_2]\rho}{\partial X_1} - \frac{\partial X_3 \rho}{\partial X_2} \\ & \quad - \frac{\partial[-\omega_0^2 X_2 - 2\Gamma X_3]\rho}{\partial X_3} + D \frac{\partial^2 \rho}{\partial X_3^2}.\end{aligned}\quad (6)$$

为精确求解(6)式, 再令 $U = X_1 + aX_2 + bX_3$ ^[21], 则(6)式简化为下述的一维 FPK 方程:

$$\frac{\partial \rho(U, t)}{\partial t} = -\frac{\partial A \rho}{\partial U} + B \frac{\partial^2 \rho}{\partial U^2},\quad (7)$$

其中

$$A = -\lambda U, \quad B = b^2 D,\quad (8)$$

$$\lambda U = \gamma X_1 + (\omega_0^2 b - 1)X_2 + (2\Gamma b - a)X_3.\quad (9)$$

这里 a, b 和 λ 是待定常数, 把 $U = X_1 + aX_2 + bX_3$ 代入(9)式可得到

$$\begin{aligned}\lambda &= \gamma, \\ \lambda a &= \omega_0^2 b - 1, \\ \lambda b &= 2\Gamma b - a.\end{aligned}\quad (10)$$

对(10)式联合求解方程可得

$$\begin{aligned}a &= \frac{2\Gamma - \gamma}{\omega_0^2 + \gamma^2 - 2\Gamma\gamma}, \\ b &= \frac{1}{\omega_0^2 + \gamma^2 - 2\Gamma\gamma}, \\ \lambda &= \gamma.\end{aligned}\quad (11)$$

接下来我们将推广文献[13—15]的方法来推导系统(2)信息熵的精确表达式.

3. 系统(2)的信息熵

我们可将 FPK 方程(7)式写成下述形式:

$$\frac{\partial \rho(U, t)}{\partial t} = -\nabla_U \cdot \mathbf{j},\quad (12)$$

其中, ∇_U 表示相空间的散度,

$$\mathbf{j} = A\rho - B \frac{\partial \rho}{\partial U}.\quad (13)$$

根据 Shannon 信息熵定义(1)式并结合(12), (13)两式可得信息熵 S 随时间演化的方程为

$$\frac{dS}{dt} = \int \nabla_U \cdot \mathbf{j} \ln \rho dU.\quad (14)$$

对(14)式右边进行部分积分, 并利用边界条件[22]: $\mathbf{j}|_{\text{boundary}} = 0, \mathbf{j} \ln \rho|_{\text{boundary}} = 0$.

可得到

$$\frac{dS}{dt} = -\int \frac{1}{\rho} \mathbf{j} \cdot \nabla_U \rho dU.\quad (15)$$

我们设方程(7)解的形式为

$$\rho(U, t|U', 0) = \exp[G(t)].\quad (16)$$

这里,

$$G(t) = \frac{-(U - \alpha(t))^2}{\sigma(t)} + \ln v(t).\quad (17)$$

给定初始条件^[14,17]

$$\rho(U, 0|U', 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi}} \exp[-\varepsilon(U - U')^2].\quad (18)$$

对比(16)和(18)式可得

$$\sigma(0) = \frac{1}{\varepsilon}, \alpha(0) = U', v(0) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi}}.\quad (19)$$

把方程(16)代入方程(7)可得到

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}(t) &= -2\gamma\sigma(t) + 4B, \\ \dot{\alpha}(t) &= -\gamma\alpha(t),\end{aligned}\quad (20)$$

$$\frac{1}{v(t)} \dot{v}(t) = -\frac{1}{2\sigma(t)} \dot{\sigma}(t).$$

求解方程(20)可得

$$\alpha(t) = \alpha(0) \exp(-\lambda t),$$

$$\sigma(t) = \frac{2B[1 - \exp(-2\lambda t)]}{\lambda} + \sigma(0)\exp(-2\lambda t). \tag{21}$$

将(16),(17),(21)式代入(15)式可得

$$\frac{dS}{dt} = -\gamma + \frac{2B}{\sigma(t)}. \tag{22}$$

其中上式可以写为

$$dS = -\gamma dt + \frac{2B}{\sigma(t)} dt. \tag{23}$$

对(23)式积分求解可得信息熵表达式为

$$S(t) = S(0) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\sigma(t)}{\sigma(0)}\right). \tag{24}$$

4. 耗散参数 γ 及准单色噪声对系统信息熵的影响分析

下面我们分析系统耗散参数 γ 及准单色噪声对系统信息熵的影响(所有计算值均为无量纲). 选取 $S(0) = 0.0, \sigma(0) = 0.5$. 图 1 我们给出了信息熵 S 随时间 t 的变化情况. 从图 1 可见, S 随着时间的增加单调增加, 当时间较大时 S 最终趋向于一有限定值, 即系统的熵变化减缓, 这表明系统内部各种因素的相互作用将最终使系统从非平衡态达到平衡态. 图 2 我们给出了信息熵 S 随耗散参数 γ 的变化情况, 从图 2 中可以看出, 对于较小的耗散参数 γ , S 随 γ 的增加单调增加, 然而当耗散参数 γ 较大时, S 随 γ 的增加单调减小, 即 S 随 γ 的增加出现了极值现象. 图 3 我们给出了信息熵 S 随协和振子阻尼系数 Γ 的变化情况. 从图 3 中可以看出, S 随协和振子

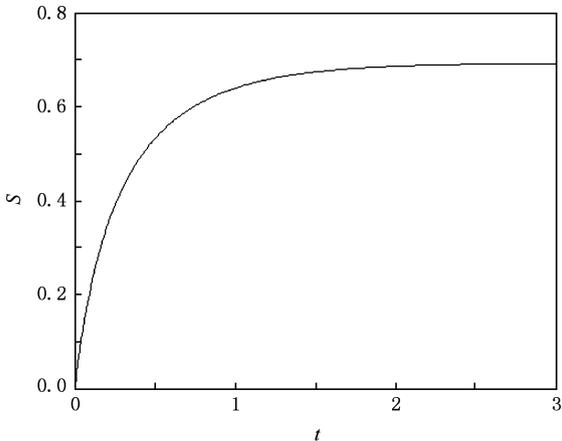


图 1 信息熵 S 随时间 t 的变化 $D = 1.0, \gamma = 1.0, \Gamma = 0.5, \omega_0 = 1.0$

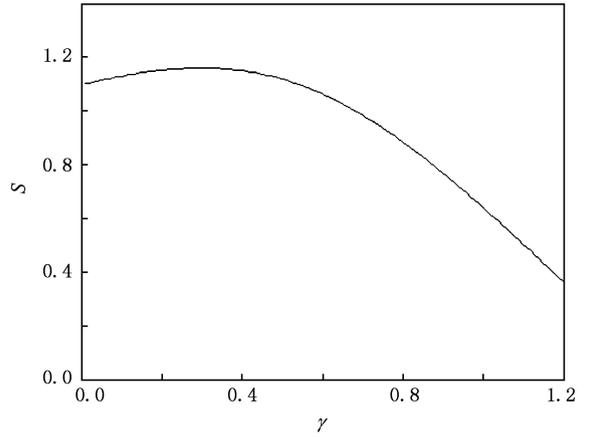


图 2 信息熵 S 随耗散参数 γ 的变化 $t = 1.0, D = 1.0, \Gamma = 0.5, \omega_0 = 1.0$

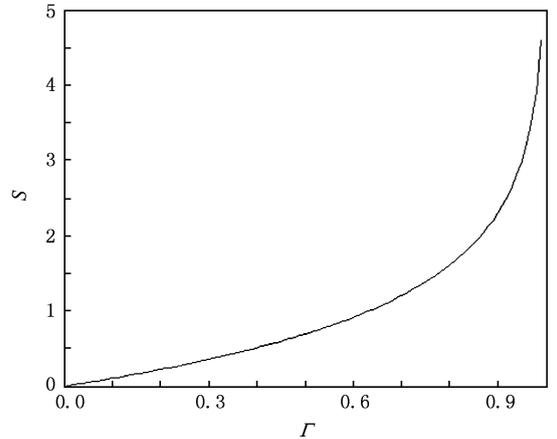


图 3 信息熵 S 随阻尼系数 Γ 的变化 $t = 1.0, D = 1.0, \gamma = 1.0, \omega_0 = 1.0$

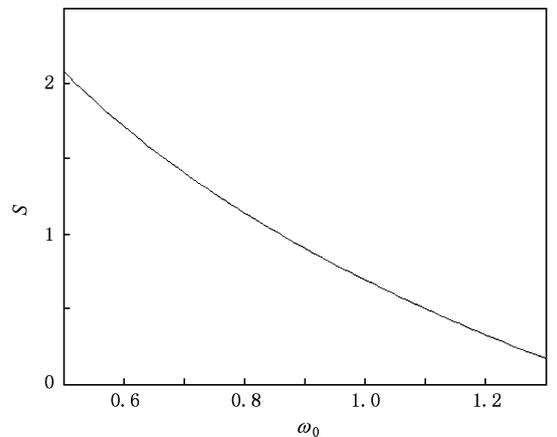


图 4 信息熵 S 随系统特征频率 ω_0 的变化 $t = 1.0, D = 1.0, \gamma = 1.0, \Gamma = 0.5$

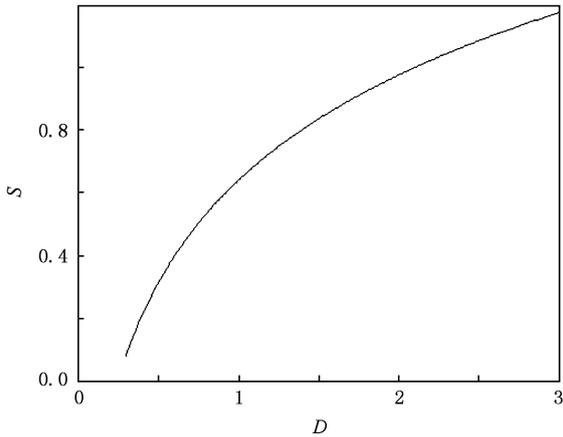


图5 信息熵 S 随噪声强度 D 的变化 $t = 1.0, \gamma = 1.0, \Gamma = 0.5, \omega_0 = 1.0$

阻尼系数 Γ 的增加而增加. 图 4 我们给出了信息熵 S 随系统特征频率 ω_0 的变化情况. 从图 4 可以看出 S 随系统特征频率 ω_0 增加单调减小, 这与图 3 的情况正好相反. 图 5 我们给出了信息熵 S 随噪声强度 D 的变化情况, 从图 5 中可以看出, S 随噪声强度 D 的增加而单调增加. 图 3, 图 4 和图 5 表明阻尼系数

Γ 与噪声强度 D 对系统信息熵的增加起到了促进作用, 而系统特征频率 ω_0 对系统信息熵的增加起到了抑制作用.

通过图 1—5 的分析我们可以看出, 虽然准单色噪声对系统信息熵的影响使得 S 随 γ 的演化出现了极值现象, 但随着时间的增加系统最终仍将会趋于平衡态.

5. 结 论

对准单色噪声驱动的耗散动力系统的信息熵演化现象进行了研究. 通过线性变换的方法给出了所研究系统的 FPK 方程, 并结合 Shannon 信息熵定义推导了该系统随时间演化信息熵的精确表达式, 进一步分析了系统耗散参数和准单色噪声对系统信息熵的影响. 研究发现, 在 $\Gamma \leq \omega_0$ 时, 阻尼系数 Γ 对系统信息熵的演化过程起到了抑制作用, 而系统特征频率 ω_0 与噪声强度 D 对系统信息熵的演化过程起到了促进作用; 并且在准单色噪声的影响下, 系统内部各种参数的相互作用使得信息熵 S 随 γ 的增加出现了极值现象.

[1] Gammaitoni L, Hanggi P, Jung P, Marchesoni F 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 223
 [2] van den Broeck C, Parrondo J M R, Toral R 1994 *Phys. Rev. Lett.* **73** 3395
 [3] Fuentes M A, Wio H S, Toral R 2002 *Physica A* **303** 91
 [4] Li J H, Huang Z Q 1996 *Phys. Rev. E* **53** 3315
 [5] Denisov S I, Vitrenko A N 2003 *Phys. Rev. E* **68** 046132
 [6] Jia Y, Yu S N, Li J R 2000 *Phys. Rev. E* **62** 1869
 [7] Luo X Q, Zhu S Q 2003 *Phys. Rev. E* **67** 021104
 [8] Mei D C, Xie G Z, Cao L, Wu D J 1999 *Phys. Rev. E* **59** 3880
 [9] Li R, Hu G, Yang C Y, Wen X D, Qing G R, Zhu H J 1995 *Phys. Rev. E* **51** 3964
 [10] Dykman M I, Mannella R, McClintock P V E, Stein N D, Stocks N G 1993 *Phys. Rev. E* **47** 3996
 [11] Dykman M I, McClintock P V E, Stein N D, Stocks N G 1991

Phys. Rev. Lett. **67** 933
 [12] Xu W, Xie W X, Cai L, Tang Y N 2007 *Physica A* **384** 273
 [13] Xie W X, Xu W, Cai L, Jin Y F 2005 *Chin. Phys.* **14** 1766
 [14] Bag B C 2002 *Phys. Rev. E* **65** 046118
 [15] Goswami G, Mukherjee B, Bag B C 2005 *J. Phys. A* **38** 1659
 [16] Bag B C, Banik S K, Ray D S 2001 *Phys. Rev. E* **64** 026110
 [17] Bag B C 2002 *Phys. Rev. E* **66** 026122
 [18] Daems D, Nicolis G, 1999 *Phys. Rev. E* **59** 4000
 [19] Xing X S 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2969 (in Chinese) [邢修三 2003 物理学报 **52** 2969]
 [20] Xing X S 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2852 (in Chinese) [邢修三 2004 物理学报 **53** 2852]
 [21] Kramers H A 1940 *Physica* **7** 284
 [22] Brody D, Meister B 1995 *Phys. Lett. A* 1995 **204** 93

Time dependence of information entropy of a dynamical system driven by quasimonochromatic noise^{*}

Guo Yong-Feng[†] Xu Wei Li Dong-Xi Wang Liang

(*Department of Applied Mathematics, Northwestern Poly-technical University, Xi'an 710072, China*)

(Received 25 June 2009; revised manuscript received 28 July 2009)

Abstract

The quasimonochromatic noise (QMN) is the “truly colored” noise, and in this paper the time derivative of entropy for a dynamical system driven by QMN is studied. The dimension of Fokker-Planck equation is reduced by way of linear transformation. The exact time dependence of the entropy is calculated based on the definition of Shannon's information entropy. The relationship between the properties of QMN and dissipative parameters and their effect on the entropy is also discussed.

Keywords: information entropy, quasi-monochromatic noise, Fokker-Planck equation

PACC: 0520, 0570L, 6550

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10872165).

[†] E-mail: guoyongfeng@mail.nwpu.edu.cn