

时间延迟增强双稳系统的共振抑制*

林 灵¹⁾²⁾ 闫 勇²⁾ 梅冬成^{1)†}

1) (云南大学物理系, 昆明 650091)

2) (思茅师范高等专科学校计算机科学系, 普洱 665000)

(2009 年 6 月 10 日收到; 2009 年 8 月 4 日收到修改稿)

研究了时间延迟对双稳系统激活率的影响. 在短时间延迟的情况下, 应用最陡下降法导出延迟双稳系统的平均首通时间表达式和相应的与延迟时间有关的激活率表达式. 数值计算结果表明, 时间延迟可以增强双稳系统的共振抑制.

关键词: 双稳系统, 时间延迟, 共振抑制

PACC: 0540, 0250

1. 引 言

时间延迟和随机波动(噪声)是客观系统不可忽略的重要因素. 在很多情形下时间延迟反映了通过系统输运有关的物质、能量和信息的传输时间. 很多的实际过程都需要考虑时间延迟. 人们已经讨论了物理系统、激光系统、非线性网络、病毒传播和生物等非线性系统中时间延迟所产生的影响^[1-5]. 利用延迟方程的特性, 人们还提出了延迟反馈控制法^[6,7], 即把系统输出信号的一部分先经过延迟回路, 再反馈到系统中去, 使原来不稳定的系统变得稳定. 此外研究表明: 噪声对系统的演化起着决定性的作用, 这种无规则的随机干扰并不总是对宏观秩序起消极作用, 也会起到积极的作用^[8,9]. 噪声和时间延迟不可避免地出现在复杂系统中, 而且噪声和时间延迟还会对系统产生重要的影响. 因此, 研究噪声和时间延迟协同作用下的复杂系统具有重要的意义. 这方面的研究也成为近年来的热点课题, 新的理论和实验研究结果不断涌现^[10-16]. 在非线性和随机动力学系统的时间延迟方面开展的大量研究表明, 系统在噪声和延迟的协同作用下, 会出现更丰富的动力学行为.

双稳系统作为典型的非线性系统, 在 20 世纪后半期已经被人们广泛地认识和应用. 例如, 电子计

算机应用布尔代数处理计算过程和存储信息, 其基本要素 0 和 1 的值式是通过双稳器件实现的; 要实现光子计算机, 光学双稳器件的设计和制造是非常关键的. 因此人们对各种噪声源扰动下双稳系统的各种统计性质开展了大量的研究工作^[17-28]. 在交叉关联噪声驱动的双稳系统中发现激活率在乘性噪声与加性噪声之比为 1—10 之间有一个巨抑制现象, 且随着乘性噪声和加性噪声的交叉关联强度增大, 巨抑制的效果越明显^[17]. 噪声和延迟协同作用下的双稳系统定态性质和随机共振等已经得到了研究^[29-31]. 然而延迟和噪声协同作用对巨抑制现象的影响还未被研究.

本文研究了时间延迟和噪声协同作用下的双稳系统激活率的巨抑制. 应用短时间延迟近似方法得到定态概率分布函数, 进一步应用最陡下降法得到平均首通时间的分析表达式, 并数值模拟分析了延迟时间对激活率的影响.

2. 延迟随机双稳系统的跃迁率

考虑噪声驱动下有时间延迟的双稳系统^[30]

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t - \tau) - x^3(t) + x(t)\xi(t) + \eta(t), \quad (1)$$

其中 τ 是延迟时间, 乘性噪声 $\xi(t)$ 和加性噪声 $\eta(t)$ 满足统计性质如下:

* 国家自然科学基金(批准号:10865006)和云南省自然科学基金(批准号:2008CD214)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: meidch@ynu.edu.cn

$$\langle \xi(t) \rangle = \langle \eta(t) \rangle = 0, \quad (2)$$

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2D\delta(t-t'), \quad (3)$$

$$\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = 2\alpha\delta(t-t'), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \langle \xi(t)\eta(t') \rangle &= \langle \eta(t)\xi(t') \rangle \\ &= 2\lambda \sqrt{D\alpha}\delta(t-t'), \end{aligned} \quad (5)$$

其中 D 和 α 分别是 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 的强度, λ 代表 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 之间的关联强度.

在无延迟和噪声的情况下, 方程(1)对应的势函数为

$$V(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}, \quad (6)$$

方程(6)有两个稳态 $x_1 = 1$ 和 $x_2 = -1$, 还有一个亚稳态 $x_0 = 0$.

应用短时间延迟近似方法, 可得到方程(1)对应的 Fokker-Planck 方程为^[15]

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} \int (x_\tau - x^3 + Dx + \lambda \sqrt{D\alpha}) \\ &\quad \times P(x, t; x_\tau, t - \tau) dx_\tau \\ &\quad + \int \frac{\partial^2}{\partial x^2} g^2(x) P(x, t; x_\tau, t - \tau) dx_\tau, \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $P(x, t; x_\tau, t - \tau)$ 为联合概率密度, $x_\tau = x(t - \tau)$,

$$g(x) = \sqrt{Dx^2 + 2\lambda \sqrt{D\alpha}x + \alpha}.$$

方程(7)的稳态概率分布函数 (SPDF) 为^[17],

$$P_{st}(x) = Ng(x)^{\tau-1} \exp\left[-\frac{U(x)}{\alpha}\right], \quad (8)$$

其中 N 是归一化常数. 广义势函数 $U(x)$ 为

$$\begin{aligned} U(x) &= -(1 + \tau) \int^x \frac{y - y^3}{Ry^2 + 2\lambda \sqrt{R}y + 1} dy \\ &= -(1 + \tau) \left[\frac{(R - 4\lambda^2 + 3)\lambda}{\sqrt{(1 - \lambda^2)R^2}} \arctan \frac{\sqrt{R}x + \lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\lambda}{R\sqrt{R}}x + \frac{x^2}{2R} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2R} \left(\frac{4\lambda^2 - 1}{R} - 1 \right) \ln G(x) \right], \end{aligned}$$

其中 $G(x) = Rx^2 + 2\lambda \sqrt{R}x + 1$, $R = D/\alpha$ 为噪声强度比. 当延迟时间 $\tau = 0$ 时, (8)式和文献[17]中的(7)式一致.

现在考虑粒子从初态 $x_2 = -1$ 出发越过势垒向另一态 $x_1 = +1$ 跃迁的情形. 当噪声强度小于势垒高度, 即 D 或 α 小于 $U(0) - U(-1)$ 时, 利用最陡下降法^[8]可得系统的平均首通过时间为

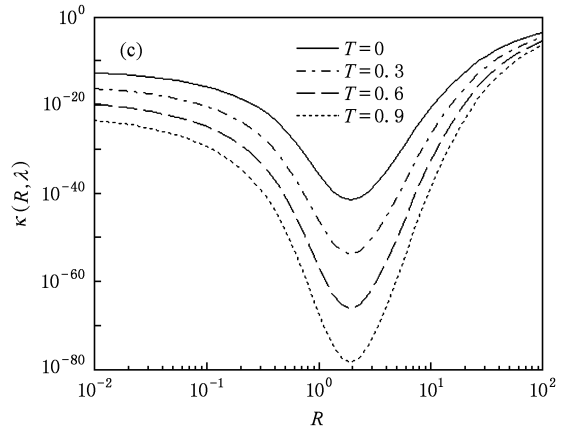
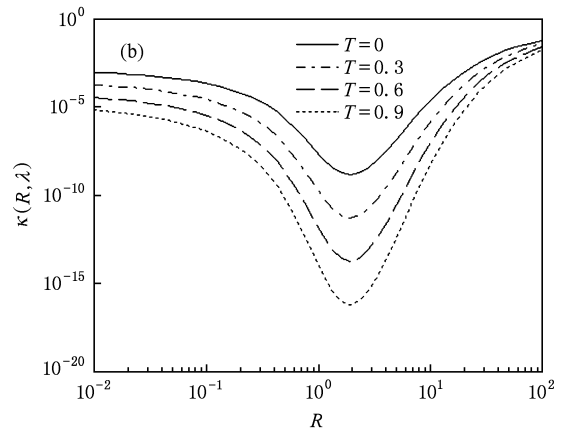
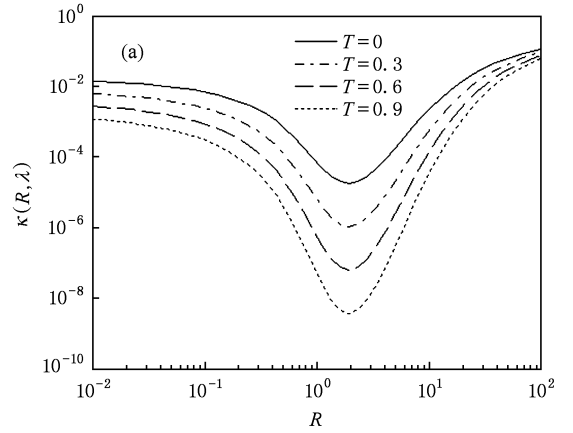


图1 不同时间延迟下跃迁率 κ 随噪声强度比 R 的变化曲线 $\lambda = 0.9$, (a) $\alpha = 0.1$, (b) $\alpha = 0.05$, (c) $\alpha = 0.01$

$$\begin{aligned} T(-1 \rightarrow 0) &= 2\pi [|V''(-1)V''(0)|]^{-1/2} \\ &\quad \times \exp\left[\frac{U(0) - U(-1)}{\alpha} \right], \end{aligned} \quad (10)$$

其中 $V(x)$ 和 $U(x)$ 分别由(6)和(9)式给出. 相应的跃迁率为^[9]

$$\kappa = \frac{1}{T(-1 \rightarrow 0)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{U(-1) - U(0)}{\alpha}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \exp\left[\frac{1}{\alpha}(1 + \tau) \left(\frac{1}{2R} + \frac{2\lambda\sqrt{R}}{R^2}\right.\right.\right. \\
&\quad \left.\left.\left. - \frac{R + 1 - 4\lambda^2}{2R^2} \ln\left|Rx^2 + 2\lambda\sqrt{Rx} + 1\right|\right.\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \frac{R + 3 - 4\lambda^2}{R^2}\right.\right. \\
&\quad \left.\left. \times \left(\operatorname{atan} \frac{\lambda - \sqrt{R}}{\sqrt{1 - \lambda^2}} - \operatorname{atan} \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}}\right)\right)\right\}. \quad (11)
\end{aligned}$$

需要说明的是,文献[17]讨论了当延迟时间 $\tau = 0$ 时的巨抑制现象,而我们主要讨论延迟时间 τ 对跃迁率的影响.在不同的加性噪声强度 α 下,根据跃迁率(11)式得出跃迁率 κ 和噪声比 R 的变化关系,如图1所示.

由图1可看出,随着噪声比 R 的增大,跃迁率曲线上出现一个“谷”(最小值),这是一种巨抑制现象.同时,随着时间延迟 τ 的增大,这个“谷”愈来愈深,也就是巨抑制的作用越明显,意味着粒子完成势阱之间的跃迁将变得困难.从图1还可以看到,随着加性噪声强度 α 的减小,巨抑制现象也变得更显著.

3. 结 论

本文研究时间延迟对双稳系统共振抑制的影响.在短时间延迟的情况下,应用最陡下降法得到延迟双稳系统的平均首通时间表达式,并在此基础上得到相应的与延迟时间有关的逃逸率表达式.数值计算结果表明,时间延迟可以增强双稳系统的共振抑制,即时间延迟可以增强系统的稳定性.

- [1] Niebur E, Schuster H G, Kammen D M 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 2753
- [2] Losson J, Mackey M C 1995 *Phys. Rev. E* **52** 115
- [3] Boccaletti S, Maza D, Mancini H, Genesio R, Arecchi F T 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 5246
- [4] Yeung M K S, Strogatz S H 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 648
- [5] Li J C, Mei D C 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6792 (in Chinese) [李江城、梅冬成 2008 物理学报 **57** 6792]
- [6] Janson N B, Balanov A G, Schöll E 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 010601
- [7] Balanov A G, Beato V, Janson N B, Engel H, Schöll E 2006 *Phys. Rev. E* **74** 016214
- [8] Zhang T R 2007 *Statistical Dynamics and Application* (Beijing: Metallurgical Industry Press) p13 (in Chinese) [张太荣 2007 统计动力学及其应用(北京:冶金工业出版社)第13页]
- [9] Hu G 1994 *Stochastic Force and Nonlinear System* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) p5 (in Chinese) [胡 岗 1994 随机力与非线性系统(上海:上海科技教育出版社)第5页]
- [10] Ohira T, Milton J G 1995 *Phys. Rev. E* **52** 3277
- [11] Ying Y J, Huang Z Q 2001 *Chin. Phys. Lett.* **18** 695
- [12] Wu D, Zhu S Q 2006 *Phys. Rev. E* **73** 051107
- [13] Nie L R, Mei D C 2007 *Europhys. Lett.* **79** 20005
- [14] Guillouzie S, L'Heureux I, Longtin A 1999 *Phys. Rev. E* **59** 3970
- [15] Frank T D 2005 *Phys. Rev. E* **72** 011112
- [16] Tsimring L, Pikovsky A 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 250602
- [17] Madureira A J R, Hanggi P, Wio H S 1996 *Phys. Lett. A* **217** 248
- [18] Wu D J, Cao L, Ke S Z 1994 *Phys. Rev. E* **50** 2496
- [19] Jia Y, Li J R 1996 *Phys. Rev. E* **53** 5786
- [20] Jia Y, Li J R 1996 *Phys. Rev. E* **53** 5764
- [21] Jia Y, Li J R 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 994
- [22] Mei D C, Xie C W, Zhang L 2003 *Phys. Rev. E* **68** 051102
- [23] Mei D C, Xie G Z, Cao L, Wu D J 1999 *Phys. Rev. E* **59** 3880
- [24] Mei D C, Xie G Z, Cao L, Wu D J 1999 *Chin. Phys. Lett.* **16** 327
- [25] Xie C W, Mei D C 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 813
- [26] Wang C J, Mei D C 2006 *Chin. Phys.* **15** 1435
- [27] Mei D C, Xie C W, Xiang Y L 2004 *Physica A* **343** 167
- [28] Shao J H, Wang B, Wu X Q 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1391 (in Chinese) [邵继红、王 兵、吴秀清 2009 物理学报 **58** 1391]
- [29] Wu D, Zhu S Q 2007 *Phys. Lett. A* **363** 202
- [30] Nie L R, Mei D C 2007 *Chin. Phys. Lett.* **24** 3074
- [31] Wang C J, Mei D C 2008 *Mod. Phys. Lett. B* **22** 2677

Time delay to enhance the giant suppression in a bistable system *

Lin Ling ¹⁾²⁾ Yan Yong ²⁾ Mei Dong-Cheng ^{1)†}

1) (*Department of Physics, Yunnan University, Kunming 650091, China*)

2) (*Department of Computer Science, Simao Teachers' College, Puer 665000, China*)

(Received 10 June 2009; revised manuscript received 4 August 2009)

Abstract

Effects of time delay on the active rate of a bistable system was investigated. Using the steepest-descent approximation method, the analytical expression of the mean first passage time and the active rate of the bistable system with time delay was derived under the condition of small delay time. The numerical computations show that the time delay enhances the resonance suppression in the system.

Keywords: bistable system, time delay, resonance suppression

PACC: 0540, 0250

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10865006) and the Natural Science Foundation of Yunnan Province, China (Grant No. 2008CD214).

† Corresponding author. E-mail: meidch@ynu.edu.cn