

无标度立体 Koch 网络的建立 及其结构性质研究*

刘甲雪[†] 孔祥木

(曲阜师范大学物理工程学院, 曲阜 273165)

(2009 年 6 月 6 日收到; 2009 年 8 月 22 日收到修改稿)

根据经典 Koch 曲线的构造, 利用四面体作为迭代基元构造了一种立体 Koch 网络并对其结构性质做了研究, 给出了该网络的度分布函数, 计算了该网络的团簇系数、平均最短路径长度以及度关联函数. 结果表明, 所构建的网络是无标度网络, 度分布临界指数 $\gamma \approx 3.32$; 其团簇系数趋向于常数值 0.870435; 平均路径长度与网络尺寸的对数呈正比关系, 说明该网络具有小世界网络特性. 另外, 计算结果表明 $k_{nn}(k)$ 随 k 的变化而变化, 说明该 Koch 网络具有一定的度关联性.

关键词: 复杂网络, 无标度, 度关联, Koch 网络

PACC: 0540J, 8980H, 0590

1. 引 言

复杂网络是近年来研究的热点, 许多真实系统都可以用复杂网络来描述并加以研究^[1-6]. 研究表明, 真实网络具有很多共同的特点, 如无标度行为和度关联现象^[7]. 无标度性^[8]是指真实网络的度分布符合幂律分布 $P(k) \sim k^{-\gamma}$, 无特征尺度. 无标度行为和度关联性对网络的动力学过程具有重要的影响. 因此, 构建具有一定度关联性的无标度网络模型^[9]对于研究真实网络的结构性质及其内在机制是十分重要的^[10-19]. 在这些网络模型中, 无标度性和度关联性一般是耦合在一起的^[20-24], 但是通常只有在无关联网络上才能得到动力学问题的解析解^[12-15]. 因此构造并研究无度关联性的无标度网络模型是复杂网络研究中不可缺少的工作. 目前为止, 在这方面已经有很多的研究工作, 最近 Zhang 等^[25]提出了一种 Koch 网络的生成算法. 基于经典分形结构——Koch 曲线, 利用迭代的方法构造的平面 Koch 网络具有自相似特性, 可以利用解析的方法很容易地求解其结构性质. 研究表明, 所构造平面 Koch 网络同时具有无标度性、小世界网络特性、大

的团簇系数和度无关性. 本文将四面体作为迭代基元建立一种立体无标度 Koch 网络并研究其结构性质. 研究表明, 这种立体 Koch 网络具有与平面 Koch 网络相似的小世界网络特性, 但是其度分布临界指数不同于平面 Koch 网络; 对度关联性的研究则表明, 立体 Koch 网络不是度无关的. 故 Koch 网络算法具有一定的局限性.

2. 网络的构造

根据 Koch 曲线的构造^[26,27], 我们构造了一个立体 Koch 网络. 所要构建的网络开始于一个四面体, 如图 1(a) 所示, 然后用图 1(b) 代替图 1(a) 的四面体, 依次迭代, 即生成一个立体 Koch 网络. 用 $K(t)$ 表示经过 t 次迭代生成的网络. $t = 0$ 时, $K(0)$ 是一个四面体. 在迭代过程中每个四面体中的各格点都生成 3 个新格点, 这 3 个新格点与原格点构成一个新的四面体. 如图 1(b) 所示的 $K(1)$ 是经过一次迭代得到的. 图 2 是 $t = 2$ 时的 Koch 网络 $K(2)$, 它是将 $K(1)$ 中的每个四面体用 $K(1)$ 结构代替而得到的. 当 $t \geq 1$ 时, $K(t)$ 由 $K(t-1)$ 生成. 将 $K(t-1)$ 中的每个四面体都用图 1(b) 的结构 (即 $K(1)$) 代替即可得到 $K(t)$.

* 国家自然科学基金 (批准号: 10775088) 资助的课题.

[†] E-mail: liujiaxue22@163.com

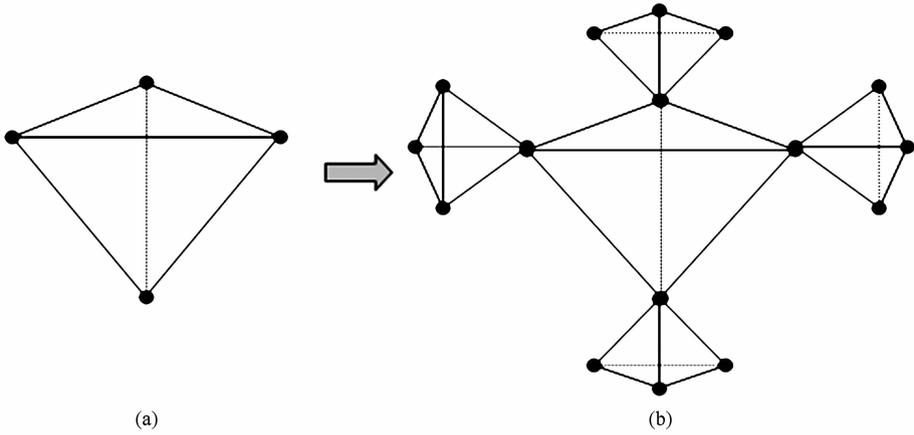


图 1 网络的迭代构造方法 (a)四面体,(b)迭代一次生成的网络,即 $t=1$ 时的 Koch 网络

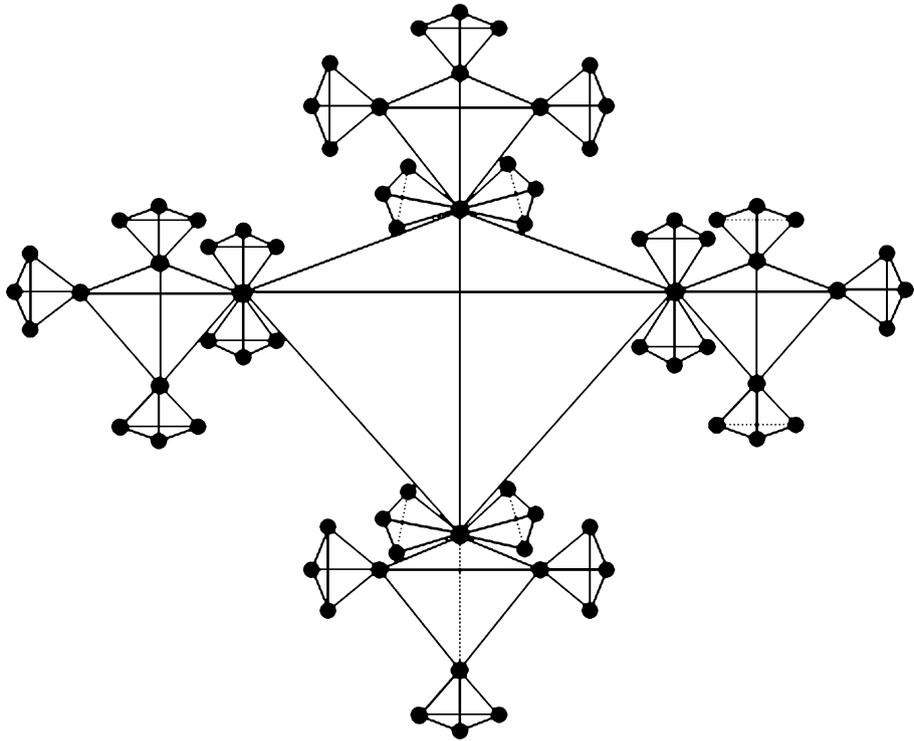


图 2 $t=2$ 时的 Koch 网络

t 时刻 Koch 网络 $K(t)$ 中总的四面体数用 $L_{\nabla}(t)$ 表示,总的三角形的个数用 $L_{\Delta}(t)$ 表示.在迭代过程中有 $L_{\nabla}(t) = 5L_{\nabla}(t-1)$. 而 $L_{\nabla}(0) = 1$, 所以可以得到 $L_{\nabla}(t) = 5^t$. 每个四面体中有 4 个三角形,所以 $L_{\Delta}(t) = 4 \times 5^t$. $L_v(t)$ 和 $L_e(t)$ 分别表示在第 t 次迭代中网络增加的节点数和连边数. 每一步迭代,每一个四面体会生成 12 个新节点和 24 个新连边,因此当 $t \geq 1$ 时可以得到 $L_v(t) = 12 \times 5^{t-1}$, $L_e(t) = 24 \times 5^{t-1}$. t 时刻立体 Koch 网络的总结点数

N_t 和总连边数 E_t 分别为

$$N_t = \sum_{t_i=0}^t L_v(t_i) = 3 \times 5^t + 1, \quad (1)$$

$$E_t = \sum_{t_i=0}^t L_e(t_i) = 6 \times 5^t. \quad (2)$$

节点的平均度数为

$$\langle k \rangle = \frac{2E_t}{N_t} = \frac{2 \times 6 \times 5^t}{3 \times 5^t + 1} \approx 4. \quad (3)$$

这说明生成的立体 Koch 网络具有稀疏的网络结构,

符合真实网络的特点.

3. 拓扑特性

3.1. 度分布

用 $k_i(t)$ 表示 t 时刻节点 i 的度. 节点 i 是 $t_i (t_i \geq 0)$ 时刻加入网络中的, 因此 $k_i(t_i) = 3$. 立体 Koch 网络包含节点 i 的三角形个数 $L_\Delta(i, t)$ 的迭代关系为 $L_\Delta(i, t) = 2L_\Delta(i, t - 1)$. 因为 $L_\Delta(i, t_i) = 3$, 有 $L_\Delta(i, t) = 3 \times 2^{t-t_i}$. 根据 $k_i(t)$ 和 $L_\Delta(i, t)$ 的关系可以得到

$$k_i(t) = L_\Delta(i, t) = 3 \times 2^{t-t_i}. \quad (4)$$

(4) 式显示 Koch 网络的度分度是离散的. 系统的累计度分布为^[3]

$$P_c(k) = \frac{1}{N_t} \sum_{\tau \leq t_i} L_v(\tau) = \frac{3 \times 5^{t_i} + 1}{3 \times 5^t + 1}. \quad (5)$$

由 (4) 式得 $t_i = t - (\ln k - \ln 3) / \ln 2$, 并将其代入 (5) 式, 当 $t \rightarrow \infty$ 时得到

$$P_c(k) \approx Ak^{-\ln 5 / \ln 2}, \quad (6)$$

其中系数 $A \approx 12.8186$. 从 (6) 式可以看出 Koch 网络的度分布满足幂律指数分布, 是一个无标度网络, 其度分布临界指数 γ 为 $1 + \ln 5 / \ln 2 \approx 3.32$. 比三角形迭代生成的平面 Koch 网络的幂律指数要大一些.

3.2. 团簇系数

团簇系数描述的是网络的集聚程度^[28]. 节点 i 的团簇系数为 $C_i = \frac{2e_i}{k_i(k_i - 1)}$, 其中 e_i 表示网络中包含节点 i 的三角形的实际数目, $k_i(k_i - 1) / 2$ 是可能包含节点 i 的三角形的数目, k_i 是节点 i 的度数. 在立体 Koch 网络中存在关系 $e_i = k_i$, 所以可以得到关系 $C_i = 2 / (k_i - 1)$. 经过 t 次迭代生成的网络的平均团簇系数为^[25]

$$C_t = \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} C_i = \frac{1}{N_t} \sum_{i=0}^t \left[\frac{2}{k(t_i) - 1} \times L_v(t_i) \right], \quad (7)$$

其中 $k(t_i)$ 指在 t_i 时刻加入网络中的格点的度. 在 t 取无穷大时, 通过 (7) 式计算出立体 Koch 网络的团簇系数趋向于一个非零值 0.870435. 与三角形构成的平面 Koch 网络的团簇系数相比小很多. 图 3 给出

了立体 Koch 网络的变化趋势.

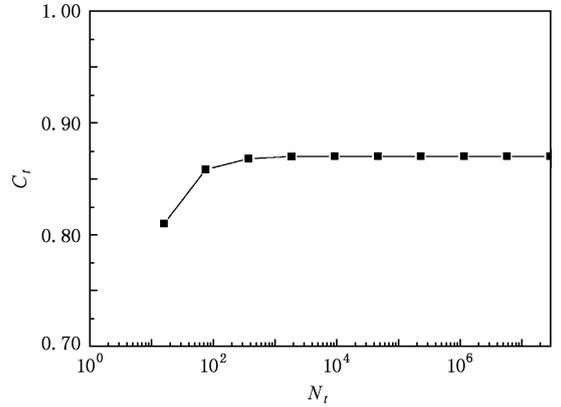


图 3 平均团簇系数 C_t 与网络节点个数 N_t 的关系

3.3. 平均路径长度

用 d_t 表示立体 Koch 网络平均团簇系数中的最短平均路径长度. d_{ij} 表示 $K(t)$ 网络中节点 i 和节点 j 之间的最短路径长度, 可以表示为^[25]

$$d_t = \frac{D_t}{N_t(N_t - 1) / 2}, \quad (8)$$

其中

$$D_t = \sum_{i \in K_t, j \in K_t, i \neq j} d_{ij}. \quad (9)$$

从 Koch 网络的构造可以看出该网络具有自相似结构, 故可解析求解 d_t . $K(t + 1)$ 可以看作是 $K(t)$ 的 5 个复制模本链接构成的, 这 5 个模本分别记作 $K_t^1, K_t^2, K_t^3, K_t^4, K_t^5$, 如图 4 所示.

D_{t+1} 可以写为

$$D_{t+1} = 5D_t + \Omega_t, \quad (10)$$

其中 Ω_t 表示不同分支中的节点间的最短路径长度的和. 已知 $D_0 = 12$, 由 (10) 式可以求得

$$D_t = 12 \times 5^t + \sum_{i=0}^{t-1} 5^{t-1-i} \Omega_i. \quad (11)$$

其中认为 $\Omega_0 = 0$. 如图 4 所示, $K(t + 1)$ 的各个分支由节点 A, B, C, D 链接在一起, 所以对 Ω_t 有贡献的路径至少经过这四个节点中的一个节点. 令 $\Omega_t^{\alpha, \beta}$ 表示分支 K_t^α 和 K_t^β 中节点间的最短路径的和. 如果 K_t^α 和 K_t^β 连接在一起, 那么 $\Omega_t^{\alpha, \beta}$ 不包含端点为链接点的路径的贡献. 如果 K_t^α 和 K_t^β 不直接连接在一起, 而是有连边链接, 那么 $\Omega_t^{\alpha, \beta}$ 中排除路径端点为连边端点的路径. Ω_t 可以表示为

$$\begin{aligned} \Omega_t = & \Omega_t^{1,2} + \Omega_t^{1,3} + \Omega_t^{1,4} + \Omega_t^{1,5} + \Omega_t^{2,3} + \Omega_t^{2,4} \\ & + \Omega_t^{2,5} + \Omega_t^{3,4} + \Omega_t^{3,5} + \Omega_t^{4,5}, \end{aligned} \quad (12)$$

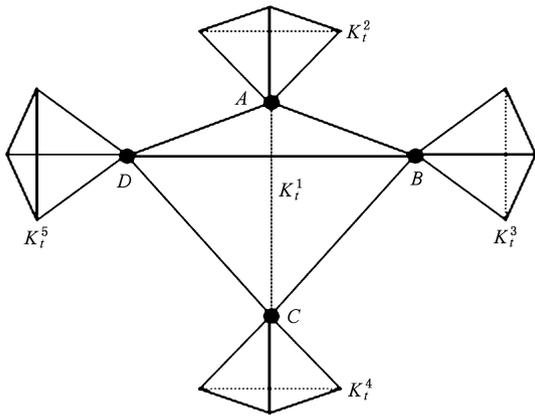


图 4 描述 Koch 网络的自相似结构 $K(t+1)$ 可看作是 $K(t)$ 的 5 个复制模板 $K_i^t (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ 链接构成

根据所构造的立体 Koch 网络自相似性可以知道 $\Omega_t^{1,2} = \Omega_t^{1,3} = \Omega_t^{1,4} = \Omega_t^{1,5}$ 和 $\Omega_t^{2,3} = \Omega_t^{2,4} = \Omega_t^{2,5} = \Omega_t^{3,4} = \Omega_t^{3,5} = \Omega_t^{4,5}$, 所以(12)式可以表示为

$$\Omega_t = 4\Omega_t^{1,2} + 6\Omega_t^{2,3}. \quad (13)$$

为求 $\Omega_t^{1,2}$ 和 $\Omega_t^{2,3}$, 定义 $s_t = \sum_{i \in K(t), i \neq A} d_{iA}$. 根据 Koch 网络的构造特点, 可以知道 s_t 的迭代关系是

$$\begin{aligned} s_{t+1} &= 2s_t + 3[s_t + (N_t - 1)] \\ &= 5s_t + 9 \times 5^t. \end{aligned} \quad (14)$$

利用 $s_0 = 3$, 可以得到

$$s_t = 3 \times 5^{t-1} (5 + 3t). \quad (15)$$

从上面的定义可以得到

$$\begin{aligned} \Omega_t^{1,2} &= \sum_{\substack{i \in K_1^t, j \in K_2^t \\ i, j \neq A}} d_{ij} \\ &= 2(N_t - 1) \sum_{i \in K_1^t, j \neq A} d_{iA} \\ &= 2(N_t - 1)s_t, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \Omega_t^{2,3} &= \sum_{\substack{i \in K_1^t, j \in K_2^t \\ i \neq A, j \neq B}} d_{ij} \\ &= 2(N_t - 1)s_t + (N_t - 1)^2. \end{aligned} \quad (17)$$

将(16)和(17)式代入(13)式得

$$\Omega_t = 18 \times 5^{2t} \times (13 + 6t). \quad (18)$$

将(18)式代入(11)式, 然后将所得结果代入(8)式, 可得

$$d_t = \frac{64 - 51 \times 5^{2-t} + 51 \times 5^{2+t}t}{8 + 24 \times 5^t}. \quad (19)$$

在迭代次数 $t \rightarrow \infty$ 时, 网络的平均路径长度近似等于 $25 \times (51 - 24t)/24$. 图 5 给出了所生成的立体 Koch 网络的平均路径与网络节点数之间的关系, 显

然这两者之间存在对数标度关系, 说明系统具有小世界网络特性.

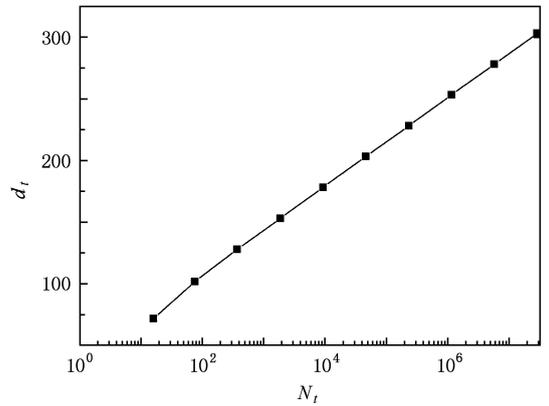


图 5 平均路径与网络节点数间的关系

3.4. 度关联性

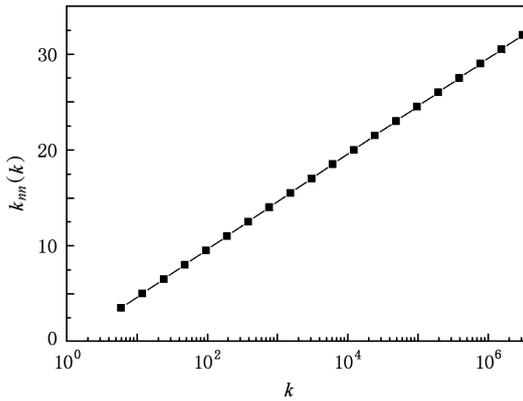
因为度关联与网络的拓扑特性有重要的内在关系, 对了解网络的演化以及网络上的动力学问题十分重要, 因此对网络度关联性的研究是十分必要的. 网络的度关联性可以用节点的最近邻节点的平均度来描述, 记为 $k_{nn}(k)$ [29]. 一般真实网络的 $k_{nn}(k)$ 都是 k 的函数. 如果 $k_{nn}(k)$ 随 k 的增大而增大, 表示网络中度值大的节点倾向于和度值大的节点连接, 网络被看作是正向匹配的. 如果 $k_{nn}(k)$ 随 k 的增大而减小, 表示度值大的节点倾向于和度值小的节点连接, 网络被看作是反向匹配的. 若 $k_{nn}(k)$ 是一个常数, 即与 k 值无关时, 相应的网络系统是无度关联性的. 对于有四面体迭代构成的立体 Koch 网络, 根据网络的构造特点 $k_{nn}(k)$ 可以表示为 [30,31]

$$\begin{aligned} k_{nn}(k) &= \left[\sum_{t'_i=0}^{t'_i=t_i-1} L_v(t'_i)k(t'_i, t_i - 1)k(t'_i, t) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{t'_i=t_i+1}^{t'_i=t} L_v(t_i)k(t_i, t'_i - 1)k(t'_i, t) \right] \\ &\quad \times \frac{1}{L_v(t_i)k(t_i, t)} + 2. \end{aligned} \quad (20)$$

将 $k(t_i, t) = 3 \times 2^{t-t_i}$ 代入(20)式, 可得

$$k_{nn}(k) = 8 - 6 \times (2/5)^{t_i} + 3(t - t_i)/2. \quad (21)$$

将 $t_i = t - (\ln k - \ln 3)/\ln 2$ 代入(21)式, 可以得到 $k_{nn}(k)$ 与 k 的关系, 如图 6 所示. 显然, 由四面体迭代形成的 Koch 网络是具有度关联性的, 且所生成的 Koch 网络是正向匹配的, 即节点取向于链接在度数相近或较大的节点上.

图 6 $k_{nn}(k)$ 与度 k 的关系图

4. 结 论

本文根据经典 Koch 曲线的构造,通过对四面体

的迭代构造了一个具有自相似性的立体 Koch 网络,并用解析的方法研究了该网络的度分布、团簇系数、平均路径长度以及网络的度关联性.研究发现,立体 Koch 网络的团簇系数和平均路径长度的增长行为同平面 Koch 网络的十分近似,但是其度分布临界指数 $\gamma > 3$,而对其网络度关联性的研究说明,立体 Koch 网络具有度关联性,这说明 Koch 网络算法具有它的局限性,不能构建任意的无度关联性的无标度网络.但是这种方法构造的网络具有自相似的特点,易于分析研究网络的性质,也易于分析网络的结构特性对系统的物理性质如传播特性、动力学特性等的影响,所以 Koch 网络仍然可以作为一个很好的网络模型,揭示真实系统的结构特性和物理特性.文中对立体 Koch 网络的度关联性做了简单的分析和说明.对该网络的度关联性更为细致的研究,将会进一步揭示网络的无标度性和度关联性的关系.

- [1] Albert R, Barabási A L 2002 *Rev. Mod. Phys.* **74** 47
- [2] Dorogvtsev S N, Mendes J F F 2002 *Adv. Phys.* **51** 1079
- [3] Newman M E J 2003 *SIAM Rev.* **45** 167
- [4] Boccaletti S, Latora V, Moreno Y, Chavez M, Hwang D U 2006 *Phys. Rep.* **424** 175
- [5] Wu J S, Di Z R 2004 *Prog. Phys.* **24** 18 (in Chinese) [吴金闪、狄增如 2004 物理学进展 **24** 18]
- [6] Ouyang M, Fei Q, Yu M H 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6763 (in Chinese) [欧阳敏、费奇、余明辉 2008 物理学报 **57** 6763]
- [7] Costa L da F, Rodrigues F A, Traverso G, Boas P R V 2007 *Adv. Phys.* **56** 167
- [8] Barabási A L, Albert R 1999 *Science* **286** 509
- [9] Li J, Wang B H, Jiang P Q, Zhou T, Wang W X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4051 (in Chinese) [李季、汪秉宏、蒋品群、周涛、王文旭 2006 物理学报 **55** 4051]
- [10] Pastor-Satorras R, Vázquez A, Vespignani A 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 258701
- [11] Albert R, Jeong H, Barabási A L 2000 *Nature* **406** 378
- [12] Callaway D S, Newman M E J, Strogatz S H, Watts D J 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 5468
- [13] Cohen R, Erez K, ben-Avraham D, Havlin S 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 4626
- [14] Cohen R, Erez K, ben-Avraham D, Havlin S 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 3682
- [15] Pastor-Satorras R, Vespignani A 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 3200
- [16] Boguñá M, Pastor-Satorras R, Vespignani A 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 028701
- [17] Song C, Havlin S, Makse H A 2006 *Nat. Phys.* **2** 275
- [18] Zhang Z Z, Zhou S G, Zou T 2007 *Eur. Phys. J. B* **56** 259
- [19] Chavez M, Hwang D U, Martinerie J, Boccaletti S 2006 *Phys. Rev. E* **74** 066107
- [20] Molloy M, Reed B 1995 *Random Struct. Algor.* **6** 161
- [21] Molloy M, Reed B 1998 *Combinatorics, Probab. Comput.* **7** 295
- [22] Park J, Newman M E J 2003 *Phys. Rev. E* **68** 026112
- [23] Maslov S, Sneppen K, Zaliznyak A 2004 *Physica A* **333** 529
- [24] Catanzaro M, Boguñá M, Pastor-Satorras R 2005 *Phys. Rev. E* **71** 027103
- [25] Zhang Z Z, Zhou S G, Xie W L, Chen L C, Lin Y, Guan J H 2009 *Phys. Rev. E* **79** 061113
- [26] Von Koch H 1906 *Acta Math.* **30** 145
- [27] Lakhtakia A, Varadan V K, Messier R, Varadan V V 1987 *J. Phys. A* **20** 3537
- [28] Watts D J, Strogatz H 1998 *Nature* **393** 440
- [29] Newman M E J 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 208701
- [30] Doye J P K, Massen C P 2005 *Phys. Rev. E* **71** 016128
- [31] Zhang Z Z, Zhou S G, Zou T, Chen L C, Guan J H 2007 *Eur. Phys. J. B* **60** 257

Establishment and structure properties of the scale-free Koch network^{*}

Liu Jia-Xue[†] Kong Xiang-Mu

(College of Physics and Engineering, Qufu Normal University, Qufu 273165, China)

(Received 6 June 2009; revised manuscript received 22 August 2009)

Abstract

According the iterative algorithm of Koch curve, we generate a Koch network by considering tetrahedron as the basic unit of the iteration and investigate its structure properties, such as degree distribution, clustering coefficient, and average path length, degree correlation, analytically. The results show that the network is scale-free and the exponent of the degree distribution is $\gamma \approx 3.32$. The clustering coefficient tends to be 0.870435 in the limit of large iteration and the study of the average path length proves that the network exhibits small world effect. We also find that the generated network is not degree uncorrelated because the function $k_{nn}(k)$ is dependent on the degree of site.

Keywords: complex networks, scale-free, degree correlations, Koch network

PACC: 0540J, 8980H, 0590

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10775088).

[†] E-mail: liujiaxue22@163.com.