

# 不确定动态混沌系统的最优控制\*

朱少平<sup>1)2)†</sup> 钱富才<sup>1)</sup> 刘 丁<sup>1)</sup>

1) (西安理工大学自动化与信息工程学院, 西安 710048)

2) (西安财经学院统计学院, 西安 710061)

(2009 年 5 月 18 日收到; 2009 年 7 月 28 日收到修改稿)

对于混沌系统的控制问题, 考虑到控制系统能量限制的要求, 首先确立一个二次目标函数, 然后给出了求解最优控制律的一个简单方法, 该方法通过求解线性二次最优控制问题, 获得了混沌系统的最优控制律, 避免了求解非线性 Hamilton-Jacobi-Bellman 偏微分方程 (HJB 方程) 的困难. 利用 Lyapunov 方法证明了闭环系统的稳定性. 对统一混沌系统和 Liu 混沌系统的仿真结果表明了控制策略的有效性.

**关键词:** 混沌控制, 状态反馈, 统一混沌系统, Liu 混沌系统

**PACC:** 0545

## 1. 引 言

近 40 多年来, 由于混沌系统在保密通信、信息处理、生物工程和化学过程中的广泛应用<sup>[1-3]</sup>, 混沌控制与同步的研究受到了人们极大的关注. 自 1990 年 Ott 等<sup>[4]</sup> 提出具有划时代意义的 OGY 方法以来, 许多新的混沌控制的方法<sup>[5-13]</sup> 相继产生. 文献 [10] 在将统一混沌系统<sup>[14]</sup> 表达为 T-S 模型的基础上, 利用泛函微分方程的 Lyapunov-Krasovskii 稳定性理论和线性矩阵不等式 (LMIs) 方法, 设计出一个新的带时延状态反馈模糊控制器; 文献 [11] 采用线性反馈控制方法, 通过混沌系统的最大 Lyapunov 正指数确定控制参数的取值范围, 实现了 Liu 混沌系统<sup>[15]</sup> 的同步控制. 然而, 现有的方法没有考虑实际过程中对控制能量的限制. 在实际物理系统中, 控制器的输出能量总是有限的, 并希望所需的控制能量越小越好. 因此, 研究在此条件下实现混沌系统的最优控制方法更具有实际意义.

本文对于混沌系统的控制问题, 考虑到控制系统能量限制的要求, 首先确立一个二次目标函数, 然后给出了求解最优控制律的一个简单方法, 该方法通过求解线性二次最优控问题, 获得了混沌系统的最优控制律, 避免了求解非线性 Hamilton-Jacobi-Bellman 偏微分方程 (HJB 方程) 的困难, 利用

Lyapunov 方法证明了闭环系统的稳定性. 该方法不仅实现了对混沌系统的控制, 而且在整个控制过程中消耗的控制能量最小.

## 2. 问题描述

考虑受控混沌系统

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (1)$$

其中  $\mathbf{x} \in R^n$  是状态向量,  $f(\mathbf{x}) \in R^n$  是连续可微向量函数,  $\mathbf{B} \in R^{n \times m}$  是常数矩阵,  $\mathbf{u} \in R^m$  是控制向量. 不妨设  $\mathbf{x} = 0$  为系统的一个平衡点. 从物理上看, 状态  $\mathbf{x}$  的二次型函数积分代表“运动能量”, 控制  $\mathbf{u}$  的二次型函数积分代表“控制能量”, 因此为衡量对系统控制所消耗能量的大小, 对系统 (1) 定义性能指标

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}] dt, \quad (2)$$

其中  $\mathbf{Q} \in R^{n \times n}$ ,  $\mathbf{R} \in R^{m \times m}$  是正定对称矩阵.

本文的目的是对系统 (1) 寻找最优控制律  $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$ , 即使系统 (1) 稳定, 也使由 (2) 式描述的性能指标  $J$  取最小值. 即求解如下最优控制问题

$$\min_{\mathbf{u}} J, \text{ s. t. } \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + \mathbf{B}\mathbf{u}. \quad (3)$$

对最优控制问题 (3), 根据动态规划的 Bellman 最优性原理, 最优控制律的获得需要求解 HJB 方程, 但 HJB 方程一般不能求得其解析解. 下面给出

\* 国家自然科学基金 (批准号: 60874033) 和陕西省自然科学基金 (批准号: SJ08F27) 资助的课题.

† E-mail: zhushaoping@126.com

问题(3)的一个简单的求解方法.

### 3. 混沌系统的控制律设计

对(3)式中的非线性函数  $f(x)$ , 根据 Taylor 定理

$$f(x) = f(0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0)x + g(x),$$

其中  $g(x)$  满足  $\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} = 0$ ,  $\|\cdot\|$  是向量 2-范数. 由  $f(0) = 0$ , 系统(1)变为

$$\dot{x} = Ax + g(x) + Bu,$$

其中  $A = \frac{\partial f}{\partial x}(0)$ .

为了获得混沌系统(1)的最优控制, 考虑如下二次型最优控制问题

$$\min_u J', \text{ s. t. } \dot{y} = Ay + BU, \quad (4)$$

其中  $J' = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [y^T Q y + U^T R U] dt$ ,  $Q, R$  与(2)式中相同,  $B \in R^{n \times m}$  与(1)式中相同, 且  $\{A, B\}$  完全可控,  $U \in R^m$  是控制向量.

由线性二次型最优控制理论<sup>[16]</sup>可知, 问题(4)的最优控制律为

$$U^* = -R^{-1}B^T P y, \quad (5)$$

其中  $P$  是 Riccati 方程

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (6)$$

的解, 最优性能指标  $J'^* = \frac{1}{2} y^T(0) P y(0)$ .

$$\text{令 } u = -R^{-1}B^T P x. \quad (7)$$

以  $u = -R^{-1}B^T P x$  作为控制律施于系统(1)后, 系统(1)变为

$$\dot{x} = (A - BR^{-1}B^T P)x + g(x). \quad (8)$$

下面证明  $u = -R^{-1}B^T P x$  就是问题(3)的解.

### 4. 系统稳定性及性能指标最优性分析

**定理 1** 系统(8)在原点是渐进稳定的.

**证明** 由  $Q \in R^{n \times n}$ ,  $R \in R^{m \times m}$  均是正定对称矩阵, 可得 Riccati 方程(6)的解  $P$  为正定矩阵.

对系统(8), 取 Lyapunov 函数为  $V(x) = x^T P x$ , 则  $V(x)$  沿系统轨线的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V} &= [(A - BR^{-1}B^T P)x + g(x)]^T P x \\ &\quad + x^T P [(A - BR^{-1}B^T P)x + g(x)] \\ &= x^T (PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P)x \end{aligned}$$

$$+ x^T (-PBR^{-1}B^T P)x + 2x^T P g(x)$$

$$= x^T (-Q)x + 2x^T P g(x) + x^T (-PBR^{-1}B^T P)x.$$

令  $V_1 = x^T (-Q)x + 2x^T P g(x)$ ,  $V_2 = x^T (-PBR^{-1}B^T P)x$ ,

显然  $V_2 \leq 0$ , 所以只要  $V_1 \leq 0$  时,  $\dot{V} \leq 0$ .

由函数  $g(x)$  满足  $\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{g(x)}{\|x\|} = 0$ , 有  $\forall \varepsilon > 0$ ,

$\exists \delta > 0$ , 当  $\|x\| < \delta$  时,

$$\frac{\|g(x)\|}{\|x\|} < \varepsilon,$$

即有  $\|g(x)\| < \varepsilon \|x\|$ .

又

$$x^T Q x \geq \lambda_{\min}(Q) \|x\|^2,$$

$$2x^T P g(x) \leq 2|x^T P g(x)| \leq 2\|x^T P\| \cdot \|g(x)\|$$

$$= 2\sqrt{x^T P P x} \cdot \|g(x)\|$$

$$\leq 2\sqrt{\lambda_{\max}(P^2)} \cdot \|x\| \cdot \|g(x)\|,$$

其中  $\lambda_{\min}(\cdot)$  表示矩阵的最小特征值,  $\lambda_{\max}(\cdot)$  表示矩阵的最大特征值. 由于  $Q$  和  $P$  都是对称且正定的, 所以  $\lambda_{\min}(Q)$  和  $\lambda_{\max}(P^2)$  为正实数, 因此, 当  $\|x\| < \delta$  时,

$$V_1 < -[\lambda_{\min}(Q) - 2\varepsilon \sqrt{\lambda_{\max}(P^2)}] \|x\|^2.$$

由于  $\lambda_{\min}(Q)$  及  $\lambda_{\max}(P^2)$  是确定的量, 所以存在正数  $\varepsilon$  满足  $\varepsilon < \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\sqrt{\lambda_{\max}(P^2)}}$ , 以保证  $V_1$  负定. 从

而  $\dot{V} \leq 0$ . 由 Lyapunov 稳定性定理可知, 原点是渐进稳定的. 定理证毕.

**定理 1**  $\lim_{t \rightarrow \infty} |J - J'| = 0$ , 且  $J^* = J'^* = \frac{1}{2} x^T(0) P x(0)$ .

**证明** 令  $e = x - y$ ,

则  $\dot{e} = \dot{x} - \dot{y} = (A - BR^{-1}B^T P)e + g(x)$ , (9)

由定理 1, 可知系统(9)在原点是渐进稳定的, 即  $\forall \varepsilon > 0, \exists T > 0$ , 当  $t > T$  时

$$\|e\| < \varepsilon,$$

即有  $\|x - y\| < \varepsilon$ .

所以  $\lim_{t \rightarrow \infty} |J - J'| = 0$ ,

且  $J^* = J'^* = \frac{1}{2} x^T(0) P x(0)$ .

定理证毕.

### 5. 仿真实验

根据前面的讨论, 我们采取对混沌系统的进行

控制的如下算法:(1)取矩阵  $B$ , 使  $\{A, B\}$  能控;(2)根据(6)式求解 Riccati 方程得到正定矩阵  $P$ ; (3)根据(7)式计算控制律  $u^*$ ; (4)把控制律  $u^*$  施于混沌系统(1), 得到受控混沌系统  $\dot{x} = f(x) + Bu^*$ .

应用上述算法, 我们对不同系统进行如下仿真实验.

### 5.1. 统一混沌系统

2002 年吕金虎等<sup>[14]</sup> 提出由下面方程所描述的一类混沌系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (25\alpha + 10)(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= (28 - 35\alpha)x_1 - x_1x_3 + (29\alpha - 1)x_2, \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - (\alpha + 8)x_3/3, \end{aligned} \quad (10)$$

其中  $x_1, x_2, x_3$  是系统状态变量,  $\alpha \in [0, 1]$  是系统参数. 由于对任意  $\alpha \in [0, 1]$  系统(10)都是混沌的, 且当  $0 \leq \alpha < 0.8$  时, 系统(10)是广义的 Lorenz 混沌系统; 当  $\alpha = 0.8$  时, 系统(10)是 Lü 混沌系统; 当  $0.8 < \alpha \leq 1$  时, 系统(10)是广义 Chen 混沌系统. 故称系统(10)为统一混沌系统<sup>[14]</sup>.

该方程在原点的 Jacobi 矩阵为  $A = \begin{pmatrix} -(25\alpha + 10) & (25\alpha + 10) & 0 \\ 28 - 35\alpha & 29\alpha - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8 + \alpha}{3} \end{pmatrix}$ , 经计算

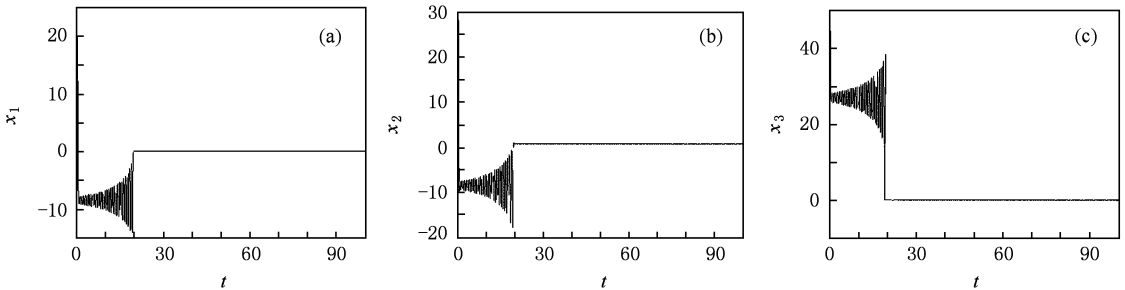


图1 Lorenz 混沌系统在受控前后状态变量随时间变化 (a) 状态变量  $x_1$ , (b) 状态变量  $x_2$ , (c) 状态变量  $x_3$

#### 仿真 II

取  $\alpha = 0.8$ , 系统(10)是 Lü 混沌系统<sup>[18]</sup>. 用本文给出的算法, 得系统控制律为

$$u = -R^{-1}B^T Px = - \begin{pmatrix} 0.0167 & 0.0096 & 0 \\ 0.0096 & 44.5028 & 0 \\ 0 & 0 & 8.2816 \end{pmatrix} x,$$

可知它有一个特征值为正, 所以线性化后的系统是不稳定的.

取  $B$  为三阶单位矩阵, 易知矩阵  $(B \ AB \ A^2B)$  的秩为 3, 所以线性系统  $\dot{x} = Ax + Bu$  是可控的, 则受控统一混沌系统方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (25\alpha + 10)(x_2 - x_1) + u_1, \\ \dot{x}_2 &= (28 - 35\alpha)x_1 - x_1x_3 + (29\alpha - 1)x_2 + u_2, \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - (\alpha + 8)x_3/3 + u_3, \end{aligned}$$

取  $R = I, Q = \text{diag}(1, 4, 20)$ , 其中  $I$  为三阶单位阵,  $\text{diag}(\cdot, \cdot, \cdot)$  为对角阵. 用本文给出的算法, 得系统(10)控制律为  $u = -R^{-1}B^T Px$ .

#### 仿真 I

取  $\alpha = 0$ , 系统(10)是 Lorenz 混沌系统<sup>[17]</sup>. 用本文给出的算法, 得系统控制律为

$$u = -R^{-1}B^T Px = - \begin{pmatrix} 14.7905 & 11.5553 & 0 \\ 11.5553 & 9.1282 & 0 \\ 0 & 0 & 7.8735 \end{pmatrix} x,$$

性能指标最小值  $J^* = 11.332$ .

选取初始值为  $x = (1, 0, -1)^T$ . 为了比较, 在  $t = 20$  s 时施加控制, 图 1 是 Lorenz 混沌系统在受控前后状态变量随时间的变化图.

性能指标最小值  $J^* = 4.1492$ .

选取初始值为  $x = (1, 0, 1)^T$ . 在  $t = 20$  s 时施加控制. 图 2 是 Lü 混沌系统在受控前后状态变量随时间的变化图.

#### 仿真 III

取  $\alpha = 1$ , 系统(10)是 Chen 混沌系统<sup>[19]</sup>. 用本文给出的算法, 得系统控制律为

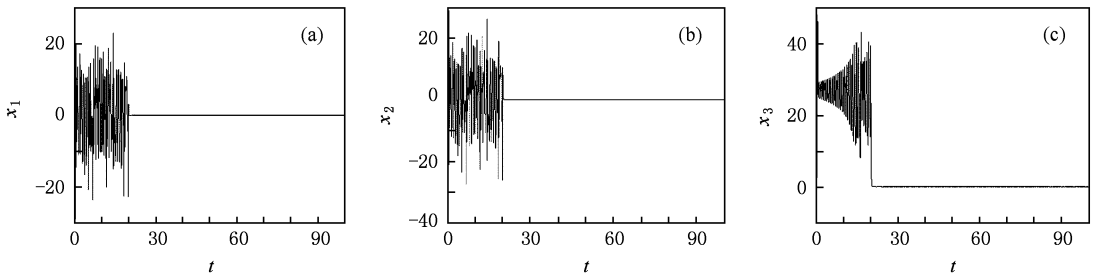


图2 Lü混沌系统在受控前后状态变量随时间变化 (a) 状态变量  $x_1$ , (b) 状态变量  $x_2$ , (c) 状态变量  $x_3$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x}$$

$$= -\begin{pmatrix} 0.6791 & -5.5855 & 0 \\ -5.5855 & 47.1264 & 0 \\ 0 & 0 & 2.3852 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

性能指标最小值  $J^* = 1.5321$ .

选取初始值为  $\mathbf{x} = (1, 0, -1)^T$ . 在  $t = 30$  s 时施加控制, 图3是Chen混沌系统在受控前后状态变量随时间的变化图.

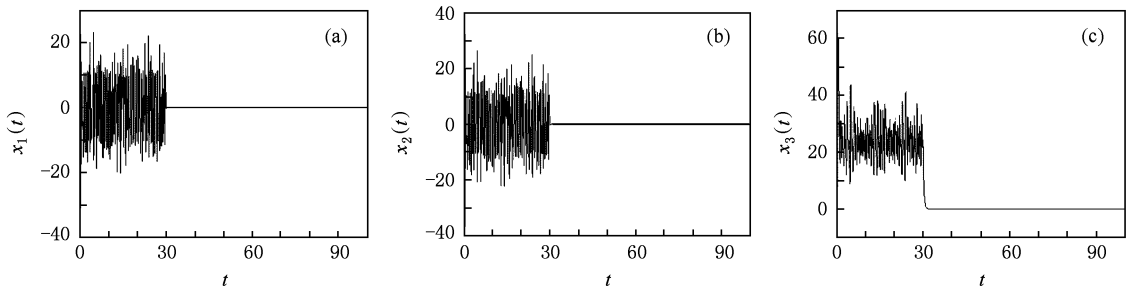


图3 Chen混沌系统在受控前后状态变量随时间变化 (a) 状态变量  $x_1$ , (b) 状态变量  $x_2$ , (c) 状态变量  $x_3$

## 5.2. Liu 混沌系统

Liu混沌系统<sup>[15]</sup>方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -10x_1(t) + 10x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= 40x_1(t) - x_1(t)x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) &= -2.5x_3(t) + 4x_1^2(t). \end{aligned} \quad (11)$$

该方程在原点的 Jacobi 矩阵为  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.5 \end{pmatrix}$ , 特征值为:  $\lambda_1 = 15.6155$ ,

$\lambda_2 = -25.6155$ ,  $\lambda_3 = -2.5$ , 所以线性化后的系统是不稳定的.

取  $\mathbf{B}$  为三阶单位矩阵, 易知矩阵  $(\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \mathbf{A}^2\mathbf{B})$  的秩为 3, 所以线性系统  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$  是可控的. 则受控 Liu 混沌系统方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -10x_1(t) + 10x_2(t) + u_1, \\ \dot{x}_2(t) &= 40x_1(t) - x_1(t)x_3(t) + u_2, \\ \dot{x}_3(t) &= -2.5x_3(t) + 4x_1^2(t) + u_3. \end{aligned} \quad (12)$$

取  $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{Q} = \text{diag}(2, 4, 30)$ . 用本文给出的算法, 得

系统(12)控制律为

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x}$$

$$= -\begin{pmatrix} 22.2567 & 14.2803 & 0 \\ 14.2803 & 9.2563 & 0 \\ 0 & 0 & 3.5208 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

性能指标最小值  $J^* = 4.6279$ .

选取初始值为  $\mathbf{x} = (0, 1, 0)^T$ . 在  $t = 10$  s 时施加控制, 图4是Liu混沌系统在受控前后状态变量随时间的变化图.

## 6. 结 论

对线性二次型最优控制理论用于混沌控制的问题做了较为详细的讨论, 并针对统一混沌系统和Liu系统存在的混沌现象的控制问题做了仿真. 研究表明, 将线性二次型最优控制理论用于混沌控制, 可以有效地克服混沌系统控制器解析设计的困难, 能够方便地实现对混沌系统的有效控制. 证明该方法具有较好的控制性能, 也适用于其他混沌系统.

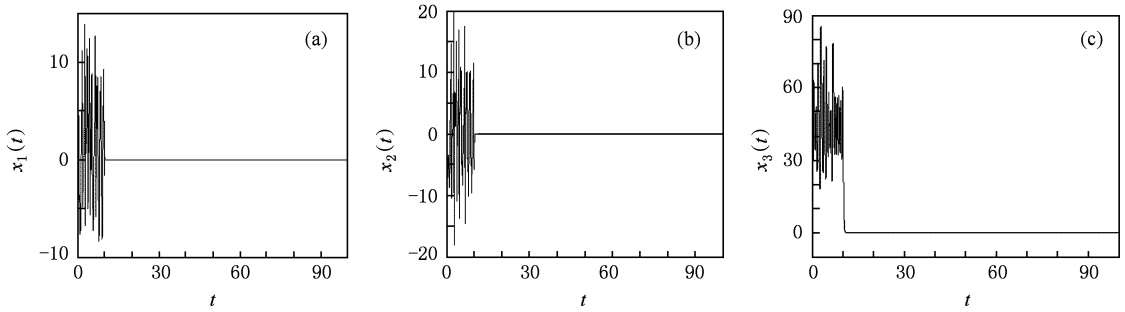


图 4 Liu 混沌系统在受控前后状态变量随时间变化 (a) 状态变量  $x_1$ , (b) 状态变量  $x_2$ , (c) 状态变量  $x_3$

- [1] Colet P, Roy R 1994 *Opt. Lett.* **19** 2056
- [2] Sugawara T, Tachikawa M, Tsukamoto T, Shimizu T 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 3502
- [3] Lu J A, Wu X Q, Lü J H 2002 *Phys. Lett. A* **305** 365
- [4] Ott E, Grebogi C, Yorke A J 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1196
- [5] Pyragas K 1992 *Phys. Lett. A* **170** 421
- [6] Pyragas K 1993 *Phys. Lett. A* **180** 99
- [7] Tang G N, Luo X S, Kong L J 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 0030 (in Chinese) [唐国宁、罗晓曙、孔令江 2000 物理学报 **49** 0030]
- [8] Guan X P, Fan Z P, Peng H P, Wang Y Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2108 (in Chinese) [关新平、范正平、彭海朋、王益群 2001 物理学报 **50** 2108]
- [9] Song Y Z, Zhao G Z, Qi D L 2007 *Control Theory and Applications* **24** 795 (in Chinese) [宋运忠、赵光宙、齐冬莲 2007 控制理论与应用 **24** 795]
- [10] Gao X, Liu X W 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 0084 (in Chinese) [高心、刘兴文 2007 物理学报 **56** 0084]
- [11] Wang F Q, Liu C X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5055 (in Chinese) [王发强、刘崇新 2006 物理学报 **55** 5055]
- [12] Chen X P, Hao J B 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2914 (in Chinese) [陈光平、郝加波 2009 物理学报 **58** 2914]
- [13] Wang X F, Xue H J, Si S K, Yao Y T 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3729 (in Chinese) [王晓锋、薛红军、司守奎、姚跃亭 2009 物理学报 **58** 3729]
- [14] Lü J H, Chen G, Cheng D, Celikovsky S 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **12** 2917
- [15] Liu C X, Liu T, Liu L, Liu K 2004 *Chaos Soliton. Fract.* **22** 1031
- [16] Zheng D Z 2002 *Linear System Theory* (2nd Ed.) p324 (Beijing: Tsinghua University Press) (in Chinese) [郑大钟 2002 线性系统理论(第二版)(北京:清华大学出版社)第 324 页]
- [17] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
- [18] Lü J, Chen G 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **12** 659
- [19] Chen G R, Ueta T 1999 *Int. J. Bifur. Chaos* **9** 1465

# Optimal control for uncertainty dynamic chaotic systems<sup>\*</sup>

Zhu Shao-Ping<sup>1)2)†</sup> Qian Fu-Cai<sup>1)</sup> Liu Ding<sup>1)</sup>

1) (*School of Automation and Information Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China*)

2) (*School of Statistics, Xi'an University of Finance and Economics, Xi'an 710061, China*)

(Received 18 May 2009; revised manuscript received 28 July 2009)

## Abstract

For chaos control problem, in accordance with the constraints of control system energy, a quadratic objective function is first determined, and then a simple method for obtaining the optimal control law is proposed. This method gives the optimal control law by solving linear quadratic optimal control problem and avoids the difficulty of solving Hamilton-Jacobi-Bellman equation. Using Lyapunov method, we prove the stability of the closed-loop system. For the unified chaotic system and Liu chaotic system the simulation results show the effectiveness of the control method.

**Keywords:** chaos control, linear state feedback, unified chaotic system, Liu chaotic system

**PACC:** 0545

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60874033), the Natural Science Foundation of Shaanxi Province, China (Grant No. SJ08F27).

<sup>†</sup> E-mail: zhushaoping@126.com