

# 参数未知的分数阶超混沌 Lorenz 系统的 自适应追踪控制与同步

赵灵冬 胡建兵<sup>†</sup> 刘旭辉

(中北大学电子测试技术国家重点实验室, 仪器科学与动态测试教育部重点实验室, 太原 030051)

(2009 年 7 月 21 日收到; 2009 年 7 月 28 日收到修改稿)

基于分数阶系统稳定性理论, 设计了控制器和未知参数的辨识规则, 实现了分数阶超混沌 Lorenz 系统同给定信号的追踪控制与同步. 数值仿真证实了所设计的控制器及未知参数辨识规则的有效性.

**关键词:** 分数阶, 超混沌, 追踪控制与同步, 自适应

**PACC:** 0545

## 1. 引 言

尽管分数阶微积分理论有 300 多年的历史, 但因长时间没有实际的应用背景而发展缓慢<sup>[1]</sup>. 自 1983 年 Mandelbort 指出自然界及许多科学技术领域中存在大量的分数维事实以来<sup>[2]</sup>, 作为分形几何和分数维动力学基础的分数阶微积分取得了极大的进展. 整数阶微积分仅仅决定于函数的局部特征, 而分数阶微积分以加权的形式考虑了函数的整体信息, 在很多方面应用分数阶数学模型可以更准确地描述实际系统的动态响应<sup>[3]</sup>. 研究表明: 分数阶系统与整数阶系统具有自相似现象. 一些整数阶混沌系统的分数阶形式也是混沌的<sup>[4-6]</sup>.

混沌同步由于在保密通信等领域的潜在应用而得到了广泛的研究并取得了许多成果. 同步方法主要有自适应同步、观测器同步、滑模同步、耦合同步、反馈同步等. 同步类型主要有完全同步、投影同步、反同步、追踪同步等<sup>[7-9]</sup>. 这些研究成果更多的是针对整数阶混沌系统领域实现的. 分数阶系统更具有普遍性且分数阶混沌系统具有更大的密钥空间, 因而分数阶混沌系统的同步更具研究价值. 然而由于分数阶微分理论的复杂性和起步较晚, 分数阶混沌同步尽管也取得了一些成果, 如 Yu 等<sup>[10]</sup>实现了分数阶 Lorenz 混沌系统的同步, Sheu 等<sup>[11]</sup>研究了分数阶 Newton-Leipnik 混沌系统的脉冲同步,

Xu 等<sup>[12]</sup>研究了异结构的分数阶混沌系统同步, 但远不如整数阶混沌同步发展得充分. 分数阶混沌同步现在主要是基于时域的分数阶线性系统稳定性理论和频域的 Laplace 终值定理. 基于分数阶线性系统稳定性理论, 通常是设计控制器, 使误差系统的系数矩阵为特定的定常矩阵. 这一方面控制代价较大, 另一方面牺牲了非线性项. 而基于 Laplace 终值定理实现分数阶混沌系统同步, 尽管能取得一定的效果, 但是这种方法缺乏灵活性, 很多同步方法和同步类型难以实现.

针对这些问题, 胡建兵等<sup>[3,14]</sup>提出了几个分数阶非线性系统的稳定性理论. 本文基于这些理论, 研究了如何设计控制器和参数辨识规则, 使参数未知的分数阶系统同任意给定的信号实现追踪控制与同步.

## 2. 追踪控制分数阶超混沌 Lorenz 系统

王兴元等<sup>[13]</sup>通过对 Lorenz 混沌系统添加一个非线性项提出了一个四维超混沌 Lorenz 系统, 其方程可表示为:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1) + x_4, \\ \dot{x}_2 &= cx_1 - x_1x_3 - x_2, \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - bx_3, \\ \dot{x}_4 &= -x_2x_3 + rx_4,\end{aligned}\tag{1}$$

其中  $a = 10, b = 8/3, c = 28, r = 8$ . 该系统的分数

<sup>†</sup> 通讯联系人. E-mail: hjb2008@163.com

阶形式:

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}x_1 &= a(x_2 - x_1) + x_4, \\ \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}x_2 &= cx_1 - x_1x_3 - x_2, \\ \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}x_3 &= x_1x_2 - bx_3, \\ \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}x_4 &= -x_2x_3 + rx_4, \end{aligned} \quad (2)$$

本文针对分数阶系统(2)的参数  $a, b, c, r$  未知时, 如何设计控制器和参数辨识规则使分数阶系统(2)追踪同步任意给定的参考信号  $\mathbf{y}(t) = [y_1, y_2, y_3, y_4]^T$ , 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i - y_i\| = 0$ .

**引理 1**<sup>[14]</sup> 对于分数阶系统  $\frac{d^q \mathbf{X}}{dt^q} = f(\mathbf{X})$

( $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ ), 当分数阶阶次  $q \leq 1$  时, 如果存在正定矩阵  $\mathbf{P}$  使函数  $J = \mathbf{X}^T \mathbf{P} \frac{d^q \mathbf{X}}{dt^q} \leq 0$  恒成立, 则系统变量  $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  渐近稳定.

以  $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{r}$  作为分数阶系统(2)的未知参数  $a, b, c, r$  的估计, 参数估计误差:

$$\begin{aligned} e_a &= a - \tilde{a}, \\ e_b &= b - \tilde{b}, \\ e_c &= c - \tilde{c}, \\ e_r &= r - \tilde{r}, \end{aligned} \quad (3)$$

则有:

$$\begin{aligned} a &= \tilde{a} + e_a, \\ b &= \tilde{b} + e_b, \\ c &= \tilde{c} + e_c, \\ r &= \tilde{r} + e_r, \end{aligned} \quad (4)$$

对(2)式设计控制器以及根据(4)式有:

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}x_1 &= (\tilde{a} + e_a)(x_2 - x_1) + x_4 - u_1, \\ \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}x_2 &= (\tilde{c} + e_c)x_1 - x_1x_3 - x_2 - u_2, \\ \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}x_3 &= x_1x_2 - (\tilde{b} + e_b)x_3 - u_3, \\ \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}x_4 &= -x_2x_3 + (\tilde{r} + e_r)x_4 - u_4. \end{aligned} \quad (5)$$

定义受控分数阶系统(5)与任意给定参考信号  $\mathbf{y}(t) = [y_1, y_2, y_3, y_4]^T$  的追踪同步误差为:

$$e_1 = x_1 - y_1,$$

$$\begin{aligned} e_2 &= x_2 - y_2, \\ e_3 &= x_3 - y_3, \\ e_4 &= x_4 - y_4. \end{aligned} \quad (6)$$

**定理** 如果设计的控制器及未知参数辨识规则选择为:

$$\begin{aligned} u_1 &= (-\tilde{a} + 1)x_1 - y_1 + \tilde{a}y_2 + y_4 - \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}y_1, \\ u_2 &= (\tilde{c} + \tilde{a})x_1 - \tilde{a}y_1 - y_2 - x_1y_3 - \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}y_2, \\ u_3 &= (-\tilde{b} + 1)x_3 + x_1y_2 - y_3 - \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}y_3, \\ u_4 &= x_1 - x_2x_3 + (\tilde{r} + 1)x_4 - y_1 - y_4 - \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}y_4. \end{aligned} \quad (7)$$

参数自适应规则:

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}\tilde{a} &= -(x_1 - x_2)e_1, \\ \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}\tilde{b} &= -x_3e_3, \\ \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}\tilde{c} &= x_1e_2, \\ \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}\tilde{r} &= x_4e_4, \end{aligned} \quad (8)$$

则分数阶受控系统(5)能追踪同步给定的参考信号  $\mathbf{y}(t) = [y_1, y_2, y_3, y_4]^T$ .

**证明**

根据(3)式及设计的参数辨识规则有:

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}e_a &= -\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}\tilde{a} = (x_1 - x_2)e_1, \\ \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}e_b &= -\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}\tilde{b} = x_3e_3, \\ \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}e_c &= -\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}\tilde{c} = -x_1e_2, \\ \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}e_r &= -\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}\tilde{r} = -x_4e_4. \end{aligned} \quad (9)$$

由设计的控制器(7)式有:

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}e_1 &= \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}x_1 - \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}y_1 = -e_1 + \tilde{a}e_2 + e_4 \\ &\quad + (-x_1 + x_2)e_a, \\ \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}e_2 &= \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}x_2 - \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}y_2 = -\tilde{a}e_1 - e_2 - x_1e_3 + x_1e_c, \\ \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}e_3 &= \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}x_3 - \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}y_3 = x_1e_2 - e_3 - x_3e_b, \\ \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}e_4 &= \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}x_4 - \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}y_4 = -e_1 - e_4 + x_4e_r. \end{aligned} \quad (10)$$

根据引理构造函数:

$$J = [e_1, e_2, e_3, e_4, e_a, e_b, e_c, e_r]$$

$$\begin{bmatrix} d^\alpha/dt^\alpha e_1 \\ d^\alpha/dt^\alpha e_2 \\ d^\alpha/dt^\alpha e_3 \\ d^\alpha/dt^\alpha e_4 \\ d^\alpha/dt^\alpha e_a \\ d^\alpha/dt^\alpha e_b \\ d^\alpha/dt^\alpha e_c \\ d^\alpha/dt^\alpha e_r \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= e_1 \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} e_1 + e_2 \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} e_2 + e_3 \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} e_3 \\ &+ e_4 \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} e_4 + e_a \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} e_a + e_b \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} e_b \\ &+ e_c \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} e_c + e_r \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} e_r, \end{aligned} \quad (11)$$

根据(5)–(8)式可得:

$$\begin{aligned} &e_1 \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} e_1 + e_2 \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} e_2 + e_3 \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} e_3 + e_4 \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} e_4 \\ &+ e_a \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} e_a + e_b \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} e_b + e_c \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} e_c + e_r \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} e_r \\ &= e_1(-e_1 + \tilde{a}e_2 + e_4 + (-x_1 + x_2)e_a) \\ &+ e_2(-\tilde{a}e_1 - e_2 - x_1e_3 + x_1e_c) \\ &+ e_3(x_1e_2 - e_3 - x_3e_b) \\ &+ e_4(-e_1 - e_4 + x_4e_r) + e_a((x_1 - x_2)e_1) \\ &+ e_b(x_3e_3) + e_c(-x_1e_2) + e_r(-x_4e_4) \\ &= -e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 - e_4^2 \leq 0, \end{aligned} \quad (12)$$

显然(12)式符合引理 1,故同步误差  $e_1, e_2, e_3, e_4$  随着时间渐近趋于零. 故实现了未知参数的自适应追踪同步. 定理得证.

### 3. 数值仿真

取分数阶阶次  $\alpha = 0.96$ , 分别以追踪控制到原点、自同步、同分数阶超混沌 Chen 系统异结构同步为例, 基于 Adams-Bashforth-Moulton 理论进行仿真.

#### 3.1. 追踪控制到原点

让系统(2)追踪控制到原点, 即  $\mathbf{y}(t) = [y_1, y_2, y_3, y_4]^T = [0, 0, 0, 0]^T$ . 则

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} y_1 = 0,$$

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} y_2 = 0, \quad (13)$$

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} y_3 = 0,$$

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} y_4 = 0,$$

取初值  $x_1 = 0.5, x_2 = 0.6, x_3 = 1, x_4 = 2$ , 未知参数设为  $a = 10, b = 8/3, c = 28, r = -1$ , 未知参数的估计值的初值取为  $\tilde{a} = 1, \tilde{b} = 1, \tilde{c} = 1, \tilde{r} = 1$ . 对误差系统(8)进行仿真, 其仿真结果如图 1 所示. 仿真结果表明实现了追踪控制.

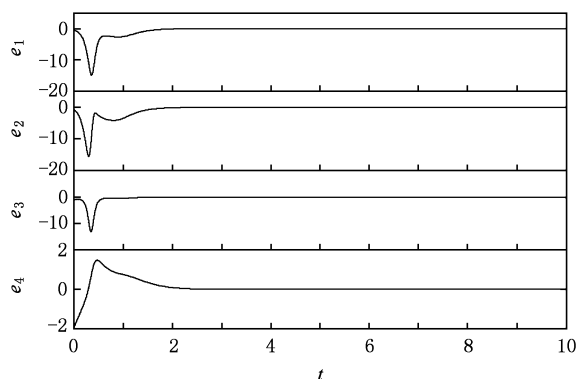


图 1 分数阶超混沌 Lorenz 系统追踪控制到原点的同步误差图

#### 3.2. 自同步

以分数阶超混沌 Lorenz 系统作为驱动系统, 实现追踪控制.

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} y_1 = a(y_2 - y_1) + y_4,$$

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} y_2 = cy_1 - y_1y_3 - y_2, \quad (14)$$

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} y_3 = y_1y_2 - by_3,$$

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} y_4 = -y_2y_3 + ry_4,$$

取初值  $x_1 = 0.5, x_2 = 0.6, x_3 = 1, x_4 = 2, y_1 = 1, y_2 = 2, y_3 = 3, y_4 = 4$  未知参数设为  $a = 10, b = 8/3, c = 28, r = -1$ , 未知参数的估计值的初值取为  $\tilde{a} = 1, \tilde{b} = 1, \tilde{c} = 1, \tilde{r} = 1$ . 对误差系统(8)进行仿真, 其仿真结果如图 2 所示. 仿真结果表明也实现了追踪控制与同步.

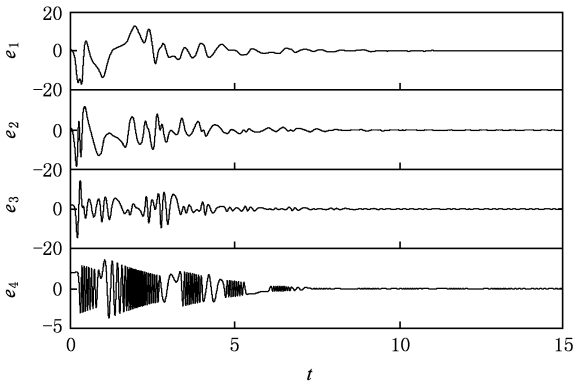


图2 分数阶超混沌 Lorenz 系统自同步误差随时间演化图

### 3.3. 追踪同步分数阶超混沌 Chen 系统

以分数阶超混沌 Chen 系统作为驱动系统,实现追踪控制与同步. Chen 系统表达式为

$$\begin{aligned}
 \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} y_1 &= 35(y_2 - y_1) + y_4, \\
 \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} y_2 &= 7y_1 - y_1 y_3 + 12y_2, \\
 \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} y_3 &= y_1 y_2 - 3y_3, \\
 \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} y_4 &= y_2 y_3 + 0.5y_4,
 \end{aligned} \tag{15}$$

参数的初值选取同例 3.2, 仿真结果如图 3 所示. 仿真结果也表明实现了同步.

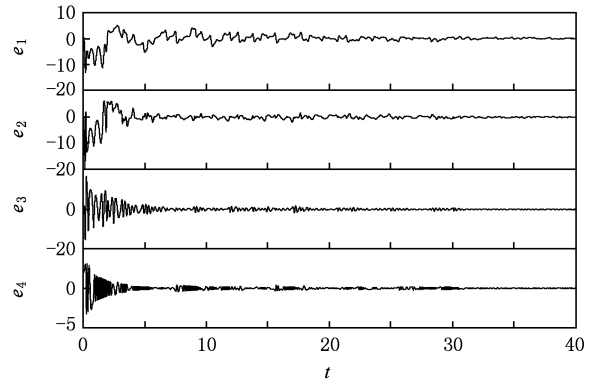


图3 同分数阶超混沌 Chen 系统的同步误差随时间演化图

## 4. 结 论

本文基于新的分数阶系统稳定性理论,设计控制器和未知参数自适应更新规则,实现了参数未知的分数阶超混沌 Lorenz 系统的自适应追踪控制与同步.通过数值仿真,验证了设计的控制器和参数更新规则的有效性.本方法通用性强,实用范围宽,可以为各种条件下实现混沌控制与同步提供新的途径.

[1] Liu C X 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1198 (in Chinese) [刘崇新 2002 物理学报 **51** 1198 ]  
 [2] Mandelbort B B 1983 *The Fractal Geometry of Nature* (New York: Freeman)  
 [3] Hu J B, Han Y, Zhao L D 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7522 (in Chinese) [胡建兵、韩 焱、赵灵冬 2008 物理学报 **57** 7522]  
 [4] Grigorenko I, Grigorenko E 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 034101  
 [5] Li C P, Peng G J 2004 *Chaos Soliton. Fract.* **22** 443  
 [6] Li C G, Chen G R 2004 *Chaos Soliton. Fract.* **22** 549  
 [7] Tu L L, Lu J A 2005 *Chin. Phys.* **14** 1755  
 [8] Zhang J, Xu H B, Wang H J 2006 *Chin. Phys.* **15** 953

[9] Wang X Y, Wu X J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 605 (in Chinese) [王兴元、武相军 2006 物理学报 **55** 605]  
 [10] Yu Y G, Wen G G, Li H X 2009 *Int. J. Nonlin. Sci. Num.* **10** 379  
 [11] Sheu L J, Tam L M, Lao S K 2009 *Int. J. Nonlin. Sci. Num.* **10** 33  
 [12] Xu C, Wu G, Feng J W 2008 *Int. J. Nonlin. Sci. Num.* **9** 89  
 [13] Wang X Y, Wang M J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5136 (in Chinese) [王兴元、王明军 2007 物理学报 **56** 5136]  
 [14] Hu J B, Han Y, Zhao L D 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2235 (in Chinese) [胡建兵、韩 焱、赵灵冬 2009 物理学报 **58** 2235]

# Adaptive tracking control and synchronization of fractional hyper-chaotic Lorenz system with unknown parameters

Zhao Ling-Dong Hu Jian-Bing<sup>†</sup> Liu Xu-Hui

(*National Key Laboratory for Electronic Measurement Technology, Key Laboratory of Instrumentation Science and Dynamic Measurement of Ministry of Education, North University of China, Taiyuan 030051, China*)

(Received 21 July 2009; revised manuscript received 28 July 2009)

## Abstract

Based on the fractional stability theory, the controller and recognizing rules of the uncertain parameters are designed. Tracking control and synchronization of fractional hyper chaotic Lorenz system is realized. Numerical simulation verifies the effectiveness of the approach of this paper.

**Keywords:** fractional, hyper chaotic, tracking control and synchronizing, adaptive

**PACC:** 0545

---

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: hjb2008@163.com