

无扩散功能的缺陷对螺旋波动力学行为的影响*

唐冬妮 唐国宁[†]

(广西师范大学物理科学与技术学院, 桂林 541004)

(2009 年 6 月 23 日收到; 2009 年 7 月 20 日收到修改稿)

采用 Bär 模型, 在二维激发介质中引入无扩散功能的缺陷, 研究了均匀分布的缺陷对螺旋波动力学行为的影响. 研究发现, 缺陷导致介质的激发性降低、波传播速度减少, 在一定数量的缺陷均匀分布下, 缺陷可以使原来稳定的螺旋波发生漫游或破碎, 缺陷使原来不稳定的螺旋波稳定或漫游, 首次在激发介质中观察到螺旋波因 Doppler 效应破碎形成小螺旋波和时空混沌共存现象. 对产生这些现象的物理机理做了简要的讨论.

关键词: 激发介质, 螺旋波, 缺陷

PACC: 0545, 0547

1. 引 言

螺旋波是自然界中普遍存在的一种非平衡斑图, 因为它在生物、物理、化学等许多系统中被观察到, 如卵细胞中的钙离子波、黏性霉菌的自组织^[1], 铂催化剂表面的一氧化碳氧化^[2]、BZ 反应^[3]等. 生理学实验表明^[4], 在心脏病患者中观察到的一类心律不齐或心动过速现象, 可能是由于心肌电信号出现螺旋波引起的, 而心颤致死的过程则与心肌中螺旋电波的失稳有密切关系, 所以心脏学家一直在寻找有效的方法来消除心脏中的螺旋波电信号及其破碎形成的时空混沌. 因此有关螺旋波的产生、漫游、破碎和控制引起了人们极大的兴趣^[5-9]. 文献[10, 11]研究了缺陷对波头的影响, 指出在满足一定条件下螺旋波波头既可以被缺陷吸引也可以远离缺陷运动; 文献[12]研究了在激发介质中, 局部不均匀性对时空混沌的影响, 指出不均匀性可导致激发介质中出现单臂或多臂螺旋波, 甚至可观察到靶波出现; 文献[13]提出了用不可激发元胞的随机分布来防止螺旋波的破碎; 文献[14]指出螺旋波的破碎敏感地依赖于缺陷的位置和大小. 大家知道, 当激发介质中存在许多无扩散功能缺陷时, 会导致激发介质的激发性降低^[15], 激发性降低会导致螺旋波破碎. 文献[13]的结果与人们这些常识是矛盾

的, 所以有必要了解产生这些现象的物理机理.

本文采用 Bär 模型, 在均匀介质中均匀加入等大小、无扩散功能的缺陷, 研究此时螺旋波有怎样的动力学行为. 数值模拟结果发现, 在适当的缺陷密度和大小下, 原来不稳定的螺旋波变得稳定而不破碎; 观察到丰富的现象, 如螺旋波漫游, 螺旋波绕缺陷运动, 螺旋波因 Doppler 效应破碎, 但不发展成时空混沌, 而是螺旋波与时空混沌共存态, 这是一种新的不稳定现象. 对产生这些现象的物理机理我们也做了研究. 下面先简单介绍我们研究的模型, 然后介绍我们的数值模拟结果和对产生这些现象的物理机理的讨论, 最后给出结论.

2. 模 型

我们采用的模型是基于描述二维均匀激发介质的 Bär 模型, 该模型是 Bär 和 Eiswirth 于 1993 年提出的, 由以下方程组描述^[16]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} u(1-u) \left(u - \frac{v+b}{a} \right) + D \nabla^2 u, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = f(u) - v, \quad (1b)$$

其中 $f(u)$ 满足如下条件:

$$f(u) = \begin{cases} 0 & (u < 1/3), \\ 1 - 6.75u(u-1)^2 & (1/3 \leq u \leq 1), \\ 1 & (1 < u). \end{cases} \quad (1c)$$

* 国家自然科学基金(批准号:10765002)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: tangguoning@sohu.com

从文献[16]中可知,在 $a = 0.84, b = 0.07, D = 1.0$ 参数下,方程(1)描述的是激发介质, ε 的大小反映了介质的激发性, ε 越大,系统的激发性越低. 当 $0.01 < \varepsilon < 0.06$ 时,在适当的初始条件下,可在系统中产生稳定的螺旋波;当 $0.06 < \varepsilon < 0.069$ 时,产生的螺旋波因不稳定而漫游;当 $\varepsilon > 0.069$ 时,螺旋波将因 Dopple 不稳定而破碎,使系统出现时空混沌. 所以 $\varepsilon = 0.069$ 是系统的一个相变点.

本文采用 Euler 法和二阶精度的有限差分方法来数值解方程(1),空间步长取 $\Delta = \Delta x = \Delta y = 0.4$, 时间步长 $\Delta t = 0.02$, 采用无流边界条件,系统尺寸为 $l_x \times l_y = 120 \times 120$, 即空间被离散成 300×300 个格点. 本文固定取 $a = 0.84, b = 0.07$. 通过

以下的方式来产生螺旋波:先在介质的左边界上用外部刺激产生一系列线状波;当这列线状波运动到介质的某一位置时,从线波的中间截断并抹去一半;由于在截断处形成缺陷(称为截断点),剩下的半列线波将演化成螺旋波. 图 1 给出了在 $\varepsilon = 0.07$ 的情况下均匀介质中不同时刻的 u 变量斑图,从图 1 可以看出螺旋波的产生和螺旋波由于 Doppler 不稳定破碎成时空混沌态的过程.

本文在系统中均匀地加入无扩散功能的介质缺陷,即每间隔 N 个格点放置一个介质缺陷,在缺陷内 $D = 0$, 缺陷外 $D = 1$, 采用三种形状的缺陷,缺陷形状和分布如图 2 所示. 在介质中无扩散功能格点所占比率 γ 为

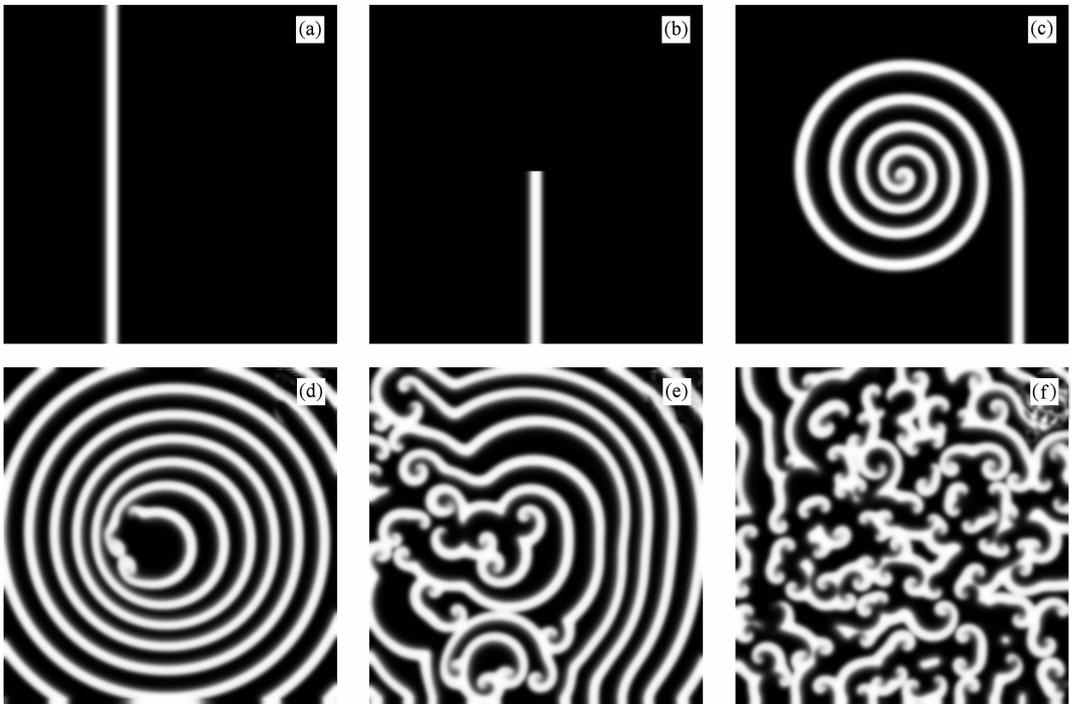


图 1 在 $\varepsilon = 0.07$ 的均匀介质中不同时刻 u 变量的空间演化斑图 (a) $t = 20$, (b) $t = 30$, 平面波列被截去一半, (c) $t = 50$, (d) $t = 74$, (e) $t = 160$, (f) $t = 1000$

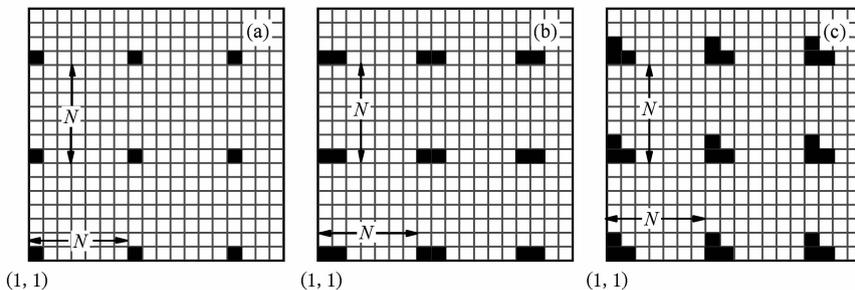


图 2 (a) 单个格点大小的缺陷, (b) 两个格点大小的缺陷, (c) 三个格点大小的缺陷

$$\gamma = mN^{-2}, \quad (2)$$

其中 m 为一个缺陷包含的格点数. 下面研究介质缺陷对螺旋波动力学行为的影响.

3. 数值模拟及结果

下面在有缺陷的情况下,按照图 1 的方式产生螺旋波,数值研究缺陷对螺旋波的动力学行为有哪些影响. 首先固定 $N = 10$ 和 $m = 1$ ($\gamma = 0.01$), 研究在不同激发性的介质中均匀分布的缺陷对螺旋波动力学行为的影响. 数值模拟结果表明: 当 $\varepsilon < 0.068$ 时, 无论在哪截断平面波, 得到的是稳定的螺旋波(不发生漫游的螺旋波); 而当 ε 在 $[0.068, 0.072]$ 范围(即在相变点附近)变化时, 得到的螺旋

波既可以是不漫游和漫游, 也可能发生螺旋波破碎成时空混沌, 依赖于截断点相对缺陷的位置; 当 $\varepsilon > 0.073$ 螺旋波仍然会破碎成湍流. 无缺陷时, 如果均匀介质激发性满足 $0.06 < \varepsilon < 0.069$, 用图 1 的方式产生的螺旋波是漫游的. 这里的结果表明, 适当数量的缺陷均匀分布起到了稳定螺旋波的作用. 但是, 如果缺陷密度较大时, 即使 ε 很小(介质的激发性高), 螺旋波也会漫游. 图 3 给出了当 $N = 6$ 和 $m = 1$ ($\gamma = 0.0278$) 以及 $\varepsilon = 0.058$ 时不同时刻 u 变量的斑图. 从图 3 可以看出, 当缺陷的密度较高的时候将导致介质的激发性降低, 使原来稳定的螺旋波发生漫游, 甚至漫游出边界. 当缺陷密度更高时, 数值模拟发现, 缺陷将阻止波传播, 导致时空混沌的产生.

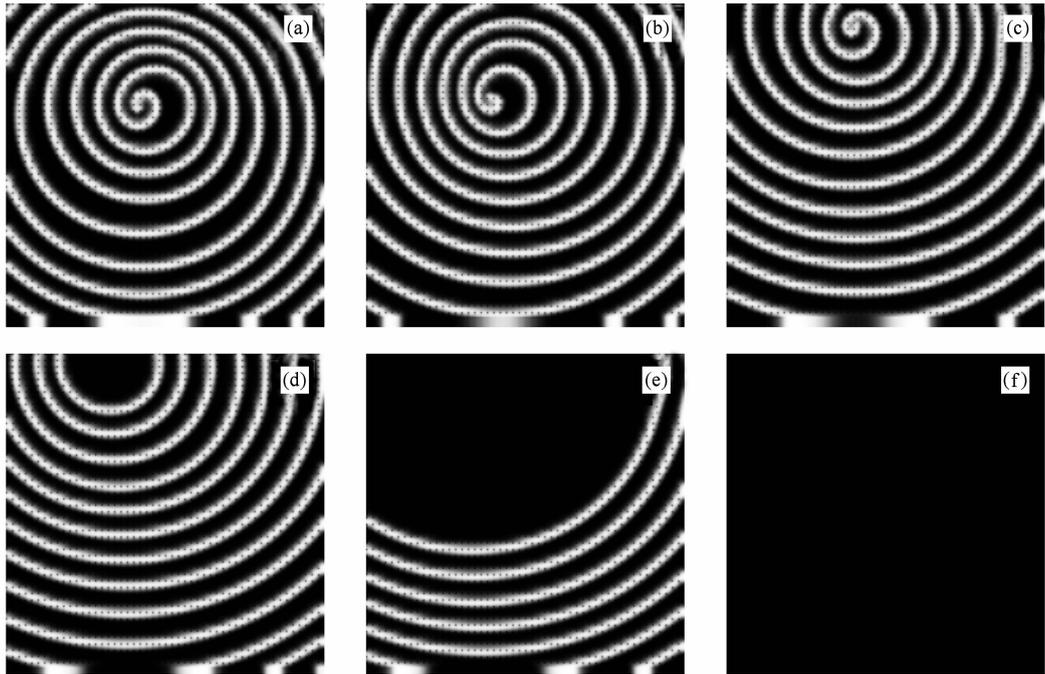


图 3 不同时刻 u 变量的斑图, $N = 6, m = 1, \varepsilon = 0.058$ (a) $t = 100$, (b) $t = 200$, (c) $t = 600$, (d) $t = 840$, (e) $t = 870$, (f) $t = 920$

为了进一步了解在相变点附近缺陷对螺旋波动力学行为的影响, 下面我们固定 $\varepsilon = 0.07$ 和 $m = 1$, 研究不同缺陷密度对螺旋波动力学行为的影响. 数值结果表明: 当 $N \leq 6$ 时, 由于缺陷分布太密, 导致波不能正常传播, 平面波或螺旋波都会直接破碎成时空混沌态. 当 $7 \leq N \leq 8$ 时, 无论在哪截断平面波, 形成的螺旋波在漫游一段时间后都会破碎成湍流态. 当 $N = 9$ 时, 形成的螺旋波有漫游和破碎成湍

流两种情形. 当 $10 \leq N \leq 60$ 时, 螺旋波是否稳定依赖于截断点相对缺陷的位置, 图 4 给出了相应的相对位置. 当截断点在如图 4 所示的阴影区时, 得到稳定螺旋波, 螺旋波不漫游. 如果在这个区域之外截断平面波, 我们观察到三种现象: 1) 螺旋波因 Dopple 不稳定在离波头不远处发生破碎(如图 5 所示), 形成稳定螺旋波与时空混沌共存态, 这是我们首次观察到的新的不稳定现象; 一般认为, 在激发

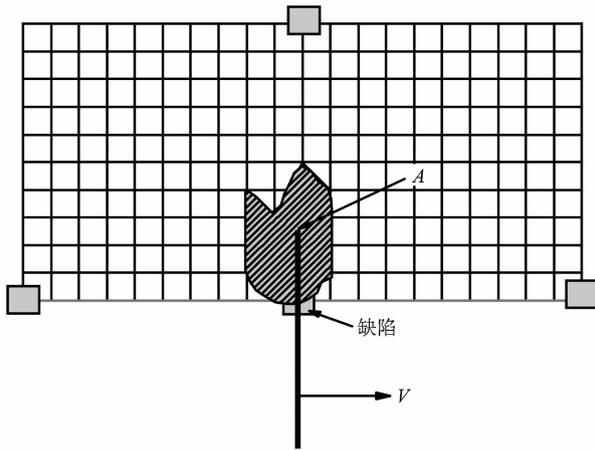


图4 截断点与缺陷的相对位置,灰色方块为缺陷,阴影区为螺旋波稳定区,A点表示为截断点,截断点在此区域,得到稳定螺旋波,粗黑线代表波峰位置,系统参数取 $\varepsilon = 0.07$, $N = 10$, $m = 1$

介质中,当螺旋波发生 Dopple 不稳定后,都会演化成时空混沌,但是我们的结果表明,在有缺陷存在

的情况下,Dopple 不稳定不一定导致完全的时空混沌;2)观察到螺旋波破碎形成时空混沌和许多稳定的小螺旋波共存(如图6所示);3)观察到螺旋波直接破碎成湍流.应当指出:缺陷的大小对螺旋波的稳定也是有影响的,当 $m = 2, 3$ 时,在比图4显示的稳定区域更大的区域内截断平面波,得到稳定螺旋波.

下面取 $\varepsilon = 0.08$,研究介质激发性远离相变点时介质缺陷对螺旋波失稳的影响.数值模拟结果表明,当 $m = 1$ 时,无论 N 取何值,无论截断点在介质中的哪个位置,螺旋波都会破碎成湍流.当 $m = 2, 3$ 时,在 N 比较小的时候,波无法正常传播,随着 N 的逐渐增大,可以观察到稳定螺旋波或者是螺旋波破碎成湍流态,而产生稳定螺旋波的条件类似图4,与截断点相对缺陷的位置有关.总之,观察到的现象不如 $\varepsilon = 0.07$ 情况下那么丰富,即只能观察到稳定螺旋波和螺旋波破碎两种现象.

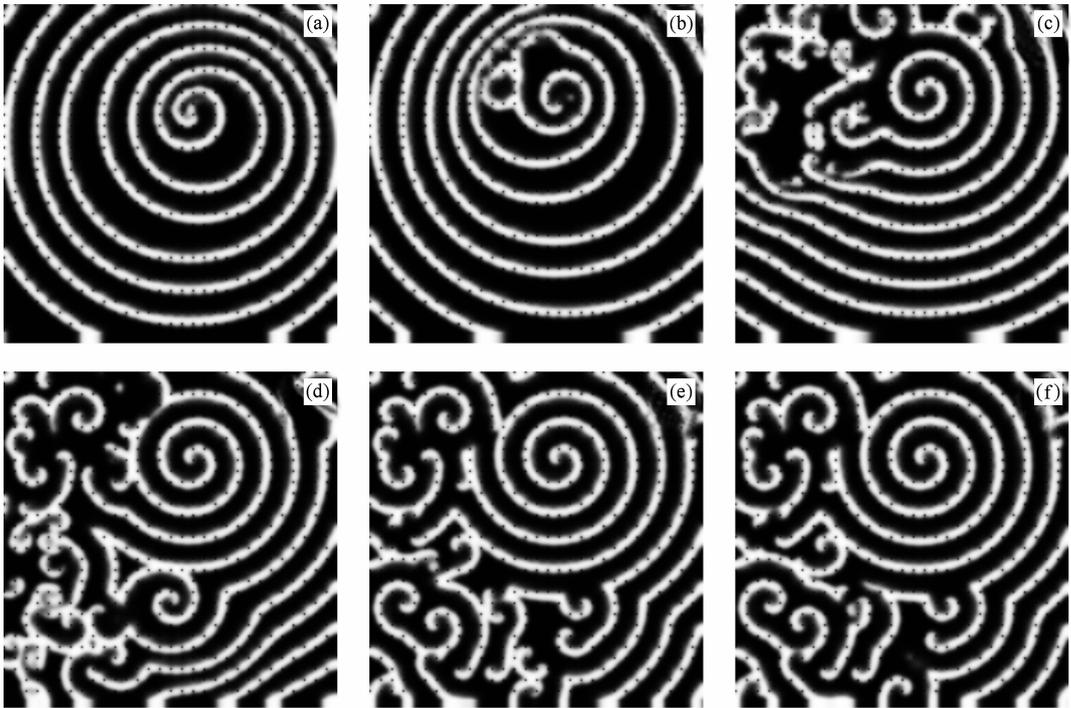


图5 不同时刻的 u 变量时空斑图, $\varepsilon = 0.07$, $N = 10$, $m = 1$ (a) $t = 100$, (b) $t = 124$, (c) $t = 200$, (d) $t = 300$, (e) $t = 600$, (f) $t = 800$

上述结果与选取的空间、时间步长无关,在更小的空间、时间步长下我们也得到类似的结果.

4. 物理机理

为了解相关的物理机理,先来研究 $m = 1$ 的缺

陷均匀分布对波速的影响.我们在边界上加周期信号产生平面波,通过测量波长 λ 和周期 T 计算出对应的波速 $V = \frac{\lambda}{T}$,如果平面波破碎成时空混沌,则不计算波速.图7给出在 $\varepsilon = 0.07$ 和 $m = 1$ 情况下波速随 N 的变化曲线,图8给出有无缺陷情况下波

速随 ε 变化的曲线,由此可知,在介质激发性一定的情况下,波速随 N 的增大而增大,在 N 一定的情况下,波速随介质的激发性降低 (ε 增大) 而降低. 这些结果表明,无缺陷介质激发性高,波速大,得到的

螺旋波就是稳定的,否则螺旋波就会漫游甚至破碎;缺陷的存在具有阻碍波传播导致激发介质激发性降低的作用,这种作用是缺陷对波阻挡和吸引造成的.

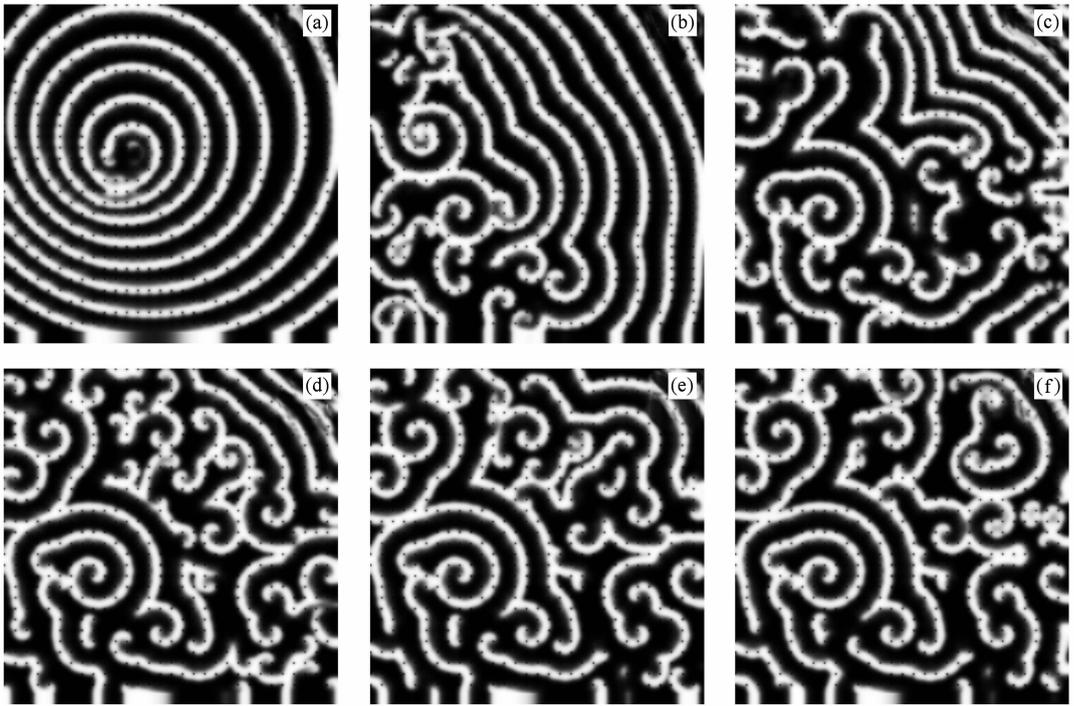


图 6 不同时刻 u 变量的时空斑图, $\varepsilon = 0.07$, $N = 10$, $m = 1$ (a) $t = 200$, (b) $t = 300$, (c) $t = 400$, (d) $t = 600$, (e) $t = 700$, (f) $t = 800$

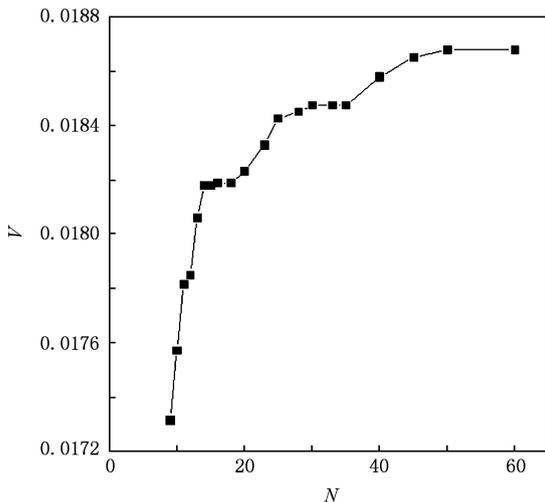


图 7 在 $\varepsilon = 0.07$ 情况下波速随 N 的变化曲线

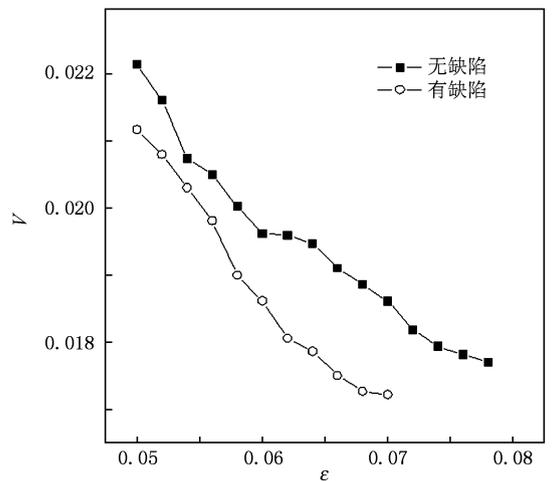


图 8 有无缺陷时波速随介质激发性 ε 的变化曲线. 空心圆曲线对应有缺陷情况 ($N = 10, m = 1$), 黑色正方形曲线对应无缺陷情况

在激发介质中,螺旋波会由于 Doppler 效应而破碎形成时空混沌. 一定数目缺陷均匀分布在介质中,之所以使稳定的螺旋波发生漫游和破碎,是因

为缺陷导致介质激发性降低的缘故;缺陷使原来不稳定的螺旋波漫游而不破碎,是由于缺陷降低了波速,导致螺旋波漫游受到缺陷的限制,降低了

Doppler 效应,所以不破碎;螺旋波因 Doppler 效应而破碎出现稳定螺旋波与时空混沌共存,是由于缺陷起到稳定螺旋波波核的作用;当缺陷分布很稀疏时还能使原来不稳定的螺旋波稳定,是因为螺旋波的波头被引入的缺陷吸引,使波头绕着缺陷运动,降低了 Doppler 效应的结果.

5. 结 论

我们在均匀介质中引入均匀分布的无扩散功

能的缺陷来观察螺旋波的动力学行为,发现缺陷的存在降低了介质的激发性和波传播的速度,在一定数量的缺陷均匀分布下,既可以使原来稳定的螺旋波发生漫游或破碎,也可以使原来不稳定的螺旋波稳定或漫游. 我们首次在激发介质中观察到新现象,即螺旋波因 Doppler 不稳定破碎成稳定小螺旋波与时空混沌共存的现象. 研究表明:缺陷对螺旋波的影响有两面性,一方面使螺旋波稳定,另一方面使螺旋波破碎. 由于选择的参数范围有限,因此缺陷对螺旋波还有哪些影响还需要进一步研究.

-
- [1] Ouyang Q 2000 *Pattern Formation in Reaction-Diffusion Systems* (Shanghai: Shang Scientific and Technological Education Publishing House) p73—78 (in Chinese) [欧阳颀 2000 反应扩散系统中螺旋波的失稳 (上海:上海科技教育出版社) 第 73—78 页]
- [2] Jakubith S, Rotermund H H, Engel W, Oertzen A V, Erth G 1990 *Phys. Rev. Lett.* **65** 859
- [3] Henry H 2004 *Phys. Rev. E* **70** 026204
- [4] Nash M P, Panfilov A V 2004 *Prog. Biophys. Molec. Biol.* **85** 501
- [5] Zhang H, Hu B, Hu G 2003 *Phys. Rev. E* **68** 026134
- [6] Ma J, Jin W Y, Yi M, Li Y L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2832 (in Chinese) [马 军、靳伍银、易 鸣、李廷龙 2008 物理学报 **57** 2832]
- [7] Ma J, Jin W Y, Li Y L, Chen Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2456 (in Chinese) [马 军、靳伍银、李廷龙、陈 勇 2007 物理学报 **56** 2456]
- [8] Yin X Z, Liu Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6844 (in Chinese) [尹小舟、刘 勇 2008 物理学报 **57** 6844]
- [9] Gan Z N, Ma J, Zhang G Y, Chen Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 5400 (in Chinese) [甘正宁、马 军、张国勇、陈 勇 2008 物理学报 **57** 5400]
- [10] Steinbock O, Muller S C 1993 *Phys. Rev. E* **47** 1506
- [11] Munuzuri A P, Perez-Munuzuri V, Perez-Villar V 1998 *Phys. Rev. E* **58** R2689
- [12] Li B W, Zhang H, Ying H P, Hu G 2009 *Phys. Rev. E* **79** 026220
- [13] Ten Tusscher K H W J, Panfilov A V 2003 *Phys. Rev. E* **68** 062902
- [14] Shajahan T K, Sinha S, Pandit R 2007 *Phys. Rev. E* **75** 011929
- [15] Dai Y, Tang G N 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1491 (in Chinese) [戴 瑜、唐国宁 2009 物理学报 **58** 1491]
- [16] Bär M and Eiswirth M 1993 *Phys. Rev. E* **48** R1635

The influence of the defects without diffusion function on dynamics of spiral wave^{*}

Tang Dong-Ni Tang Guo-Ning[†]

(College of Physics and Technology, Guangxi Normal University, Guilin 541004, China)

(Received 23 June 2009; revised manuscript received 20 July 2009)

Abstract

The Bär model is considered. The influence of the defect, defined by failure of the diffusion effect, on dynamics of spiral wave is investigated by introducing in to the system some defects. These defects are uniformly distributed. It was found numerically that these defects can lead to the reduction of the excitability of medium and the wave speed. When the number of defects is large enough, these defects can induce the meandering or the breakage of an originally stable spiral wave. On the other hands, the defects can yet cause an unstable spiral wave to become a rigidly rotating or meandering spiral wave. The phenomenon that Doppler effect causes unstable spiral wave to break up into co-existing states of spatiotemporal chaos and small spiral waves is observed for the first time. The physical mechanism of these phenomena are briefly discussed.

Keywords: excitable medium, spiral wave, defect

PACC: 0545, 0547

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10765002).

[†] Corresponding author. E-mail: tangguoning@sohu.com