

# 广义 Chua 电路簇发现象及其分岔机理<sup>\*</sup>

陈章耀 张晓芳 毕勤胜<sup>†</sup>

(江苏大学理学院, 镇江 212013)

(2009 年 7 月 22 日收到; 2009 年 8 月 10 日收到修改稿)

通过引入由电感和电阻组成的控制电路模块, 并适当选定参数, 建立了具有快慢效应的四阶广义 Chua 电路的模型. 探讨了快子系统随慢变量变化产生 fold 分岔及 Hopf 分岔的条件, 进而探讨了整个系统的动力学演化过程, 重点分析了系统中存在的各种快慢效应, 给出了两种典型的对称式 fold/fold 和 fold/Hopf 周期簇发现象及其相应的分岔机制, 从分岔的角度, 指出了两种簇发现象的本质区别.

**关键词:** 广义 Chua 电路系统, 簇发, 静息态, 激发态

**PACC:** 0545, 0547

## 1. 引 言

自 Chua<sup>[1]</sup> 建立了非线性混沌振荡电路以来, Chua 电路一直是人们研究混沌现象的重要模型<sup>[2]</sup>. 基于 Chua 电路, 人们通过引入各种各样的电路元件, 给出了许多形式的广义 Chua 电路<sup>[3,4]</sup>, 并揭示了其中的复杂动力学行为, 如周期倍化分岔导致混沌、阵发混沌、准周期解进入混沌、危机现象等等<sup>[5]</sup>. 值得指出的是 Hartley 等<sup>[6]</sup> 用三次方模块取代原来的分段线性的二极管, 不仅避开了原系统的非光滑性, 同时也保留了 Chua 电路中的许多非线性现象, 受到了许多学者的关注<sup>[7,8]</sup>, 并讨论了该模型的自适应控制和同步现象<sup>[9,10]</sup>.

本文在 Hartley 等提出的电路模型基础上, 并联由电感和电阻组成的控制模块, 建立了四阶的广义 Chua 电路. 通过选取适当的物理量, 在无量纲意义下, 使得整个控制模块的变化与原系统的变化之间存在有量级上的差别, 从而得到了两时间尺度的非线性电路系统, 即快慢广义 Chua 电路.

一般地, 快慢系统的周期振荡经常表现为由相对的大幅值和微小幅值两种振荡的组合形式, 即所谓的  $N^K$  振荡, 其中  $N$  和  $K$  分别对应于单个周期内大幅振荡和小幅振荡的次数. 从另一个角度来说, 大幅振荡和小幅振荡可以分别看做快慢系统的激

发态 (spiking) 和静息态 (quiescent state), 这种连接快慢两过程的行为通常也称为簇发 (bursting). 簇发现在神经元模型中已被广泛地认识<sup>[11]</sup>. 对于一般的快慢系统, Izhikevich<sup>[12]</sup> 对低维情形下各种簇发现象及其分岔机制做了很好的总结. 然而, 对于两时间尺度下高维系统中的各种簇发现象及其复杂性机制, 还有许多问题没有解决. 特别是有关真实电路系统中的快慢效应的工作, 很少见诸报道.

本文建立了具有快慢效应的四阶广义 Chua 电路系统, 探讨了参数变化下系统的动力学演化过程. 通过分析快子系统随慢变量变化的分岔行为, 给出了连接快慢过程的各种不同的簇发现象, 揭示了其相应的分岔机制.

## 2. 四阶广义 Chua 电路系统模型

具有立方非线性特征的 Hartley 模型 (图 1 中不含虚框内部分) 具有复杂的动力学行为. 我们在此电路上并联了由电感和电阻组成的电路模块 (图 1 中虚框内部分), 以达到控制该系统的目的. Hartley 模型可由如下方程刻画:

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{1}{C_1} [G_1(V_2 - V_1) - g(V_1)],$$

$$\frac{dV_2}{dt} = \frac{1}{C_2} [G_1(V_1 - V_2) + i_3],$$

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金 (批准号: 10872080) 资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯联系人. E-mail: qbi@ujs.edu.cn

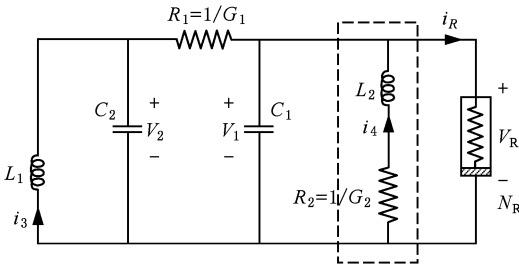


图1 四阶广义 Chua 电路

$$\frac{di_3}{dt} = -\frac{1}{L_1}V_2, \quad (1)$$

其电阻特性曲线(图2)为

$$i_R = g(V_1) = \frac{1}{R_1}(\alpha V_1^3 - \beta V_1), \quad (2)$$

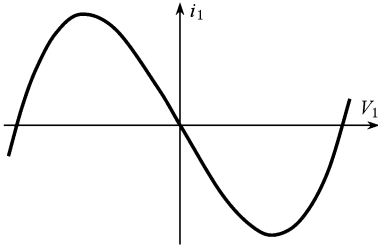


图2 非线性电阻特性曲线

而修改后的四阶广义 Chua 电路系统可表示为

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} &= \frac{1}{C_1}[G_1(V_2 - V_1) - g(V_1) + i_4], \\ \frac{dV_2}{dt} &= \frac{1}{C_2}[G_1(V_1 - V_2) + i_3], \\ \frac{di_3}{dt} &= -\frac{1}{L_1}V_2, \\ \frac{di_4}{dt} &= -\frac{1}{L_2}V_1 - \frac{R_2}{L_2}i_4. \end{aligned} \quad (3)$$

引入变换  $x = V_1, y = V_2, z = i_3 R_1, w = i_4 R_1, t = R_1 C_2 \tau, f(x) = R_1 g(V_1), p = C_2/C_1, q = R_1^2 C_2/L_1, k_0 = C_2, k_1 = R_1, k_2 = R_2, \varepsilon = R_1 C_2/L_2$ , (3)式可表示为如下无量纲形式

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= p[y - x - f(x)] + k_0 w, \\ \frac{dy}{d\tau} &= x - y + z, \\ \frac{dz}{d\tau} &= -qy, \\ \frac{dw}{d\tau} &= -\varepsilon(k_1 x + k_2 w), \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $f(x) = \alpha x^3 - \beta x$ , 参数  $p, q, \varepsilon, k_1, k_2$  均为大于零的值. 取定参数

$$\begin{aligned} R_1 &= 0.1 \text{ k}\Omega, \\ R_2 &= 1 \text{ k}\Omega, \\ L_2 &= 100 \text{ mH}, \\ C_2 &= 10 \text{ nF}, \end{aligned} \quad (5)$$

则无量纲参数  $k_1 = 0.1, k_2 = 1.0, \varepsilon = 0.01$ , 从而(4)式可以看作由三个快变量组成的快子系统和一个慢变量组成的慢子系统的四维耦合快慢非线性系统.

### 3. 广义 Chua 电路快子系统分岔分析

为了进一步揭示快子系统(即(4)式中的前三式)的分岔行为,我们首先分析参数  $p$  及慢变量  $w$  对快子系统平衡点的影响. 将慢变量  $w$  看作参数,显然快子系统的平衡点可以表示为  $E_q(x_0, 0, -x_0)$ , 其中  $x_0$  满足如下方程(由  $dx/d\tau = 0, dy/d\tau = 0, dz/d\tau = 0$  得到)

$$\alpha x_0^3 - \sigma x_0 - \frac{k_0 w}{p} = 0. \quad (6)$$

其中  $\sigma = \beta - 1$ , 其相应的 Jacobi 矩阵所对应的特征方程可以表示为

$$P_q(\lambda) = \lambda^3 + F_{q2}\lambda^2 + F_{q1}\lambda + F_{q0}, \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} F_{q2} &= (3\alpha x_0^2 - \sigma)p + 1, \\ F_{q1} &= (3\alpha x_0^2 - \sigma - 1)p + q, \\ F_{q0} &= (3\alpha x_0^2 - \sigma)qp. \end{aligned}$$

#### 3.1. fold 分岔

由于方程

$$\begin{aligned} dy/d\tau &= 0, \\ dz/d\tau &= 0 \end{aligned}$$

是线性的,而方程

$$dx/d\tau = 0$$

是三次非线性的,因此系统的平衡点个数可以从单个变为三个,而其临界条件对应于某个平衡点会分裂为两个不同的平衡点,从而产生 fold 分岔,在特征方程中,其相应的条件为出现零特征值,从而可以定义可能产生 fold 分岔的参数条件,即

$$\begin{aligned} 3\alpha q x_0^3 - \sigma q &= 0, \\ \alpha x_0^3 - \sigma x_0 - \frac{k_0 w}{p} &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

消去  $x_0$  后,分岔集可以进一步化简得

$$\left(\frac{w}{p}\right)^2 = \frac{4\sigma^3}{27\alpha k_0^2}. \quad (12)$$

### 3.2. Hopf 分岔

**引理** 设  $P(\lambda) = \lambda^3 + F_2\lambda^2 + F_1\lambda + F_0$ . 则  $P(\lambda)$  有一对纯虚根且第三个根为负实根的充分必要条件是:  $F_2 > 0, F_1 > 0$  且  $F_0 = F_1F_2$ .

显然, 此时有  $P(\lambda) = (\lambda^2 + F_1)(\lambda + F_2)$ .

**定理** 若慢变量  $w$  设为快子系统的分岔参数, 则快子系统平衡点  $E_q(x_0, 0, -x_0)$  在  $w = w_c$  处产生 Hopf 分岔的必要条件是

$$x_0^2 \geq \frac{\sigma}{3\alpha} \quad (0 < p < q, \alpha > 0, \sigma \in R^1), \quad (10a)$$

$$6\alpha x_0 k_0 (6p\alpha x_0^2 - 2p\sigma + 1 - p) \neq 0, \quad (10b)$$

其中  $w_c$  满足  $\alpha\left(\frac{aw_c}{b+cw_c^2}\right)^3 - \sigma\left(\frac{aw_c}{b+cw_c^2}\right) - \frac{k_0 w_c}{p} = 0$ ,

且

$$a = 3k_0[(3\sigma - 1)p^2 + (-3\sigma + 1)p + q - 1],$$

$$b = (4\sigma^3 - 6\sigma^2 + 2\sigma)p^3 + (6\sigma^2 - 5\sigma + 1)p^2 + (2\sigma + q\sigma - q - 1)p + q,$$

$$c = -27\alpha p k_0^2.$$

**证明** 若慢变量  $w$  设为快子系统的分岔参数, 显然, 系统的平衡点  $E_q(x_0, 0, -x_0)$  满足(6)式, 由于  $\alpha, \sigma, k_0, p, w$  为实数, 故这是一个实系数一元三次方程, 由方程理论知: 无论实系数值为多少, 至少有一个实数根存在. 即这里至少有一个平衡点  $(x_0, 0, -x_0)$  存在. 由于  $x_0$  为实数, 故(7)式中  $F_{q2}, F_{q1}, F_{q0}$  为实系数.

由 Hopf 定理<sup>[13]</sup>, 其存在条件需满足负实根及纯虚根的条件. 由引理知, (7)式必须满足

$$F_{q2} > 0, \quad F_{q1} > 0, \quad F_{q0} > 0; \quad (11a)$$

$$F_{q0} = F_{q1}F_{q2}. \quad (11b)$$

由(11a)式得

$$F_{q2} = (3\alpha x_0^2 - \sigma)p + 1 > 0,$$

$$F_{q1} = (3\alpha x_0^2 - \sigma - 1)p + q > 0,$$

$$F_{q0} = (3\alpha x_0^2 - \sigma)qp > 0,$$

因此  $3\alpha x_0^2 - \sigma > -\frac{1}{p}$ ,  $3\alpha x_0^2 - \sigma > 1 - \frac{q}{p}$ ,  $3\alpha x_0^2 - \sigma > 0$ , 综合可得

$$x_0^2 \geq \frac{\sigma}{3\alpha}.$$

由(11b)式可得

$$9\alpha^2 p^2 x_0^4 + (-6\alpha p^2 \sigma + 3\alpha p - 3\alpha p^2)x_0^2$$

$$+ \sigma^2 p^2 - \sigma p + \sigma p^2 - p + q = 0.$$

由(12)式及平衡方程(6)式联立消去  $x_0$  可得

$$\alpha\left(\frac{aw_c}{b+cw_c^2}\right)^3 - \sigma\left(\frac{aw_c}{b+cw_c^2}\right) - \frac{k_0 w_c}{p} = 0, \quad (13)$$

其中

$$a = 3k_0[(3\sigma - 1)p^2 + (-3\sigma + 1)p + q - 1],$$

$$b = (4\sigma^3 - 6\sigma^2 + 2\sigma)p^3 + (6\sigma^2 - 5\sigma + 1)p^2 + (2\sigma + q\sigma - q - 1)p + q,$$

$$c = -27\alpha p k_0^2.$$

不妨设特征方程(7)中含有一对共轭复根  $\lambda_{1,2}$  和一负实根  $\lambda_3$ , 则 Hopf 分岔存在还必须满足横截性条件  $\text{Re}(d\lambda_1/dw)|_{w=w_c} \neq 0$ . 下面采用摄动方法给予证明.

由上述必要条件可知, 快子系统平衡点  $E_q(x_0, 0, -x_0)$  在  $w = w_c$  处, 其相应的特征值可以表示为  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ ,  $\lambda_3 = -R$ , 其中  $\omega > 0$ ,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $R > 0$ , 也即

$$P(\lambda) = \lambda^3 + F_{q2}\lambda^2 + F_{q1}\lambda + F_{q0} \\ = (\lambda^2 + \omega^2)(\lambda + R),$$

比较等式两边, 有

$$F_{q2} = R, \quad F_{q1} = \omega^2, \quad F_{q0} = \omega^2 R. \quad (14)$$

为了计算  $d\lambda_1/dw$  在  $w = w_c$  处的实部, 设  $w$  在  $w_c$  处微扰, 即  $w = w_c + \zeta$ , 其中  $\zeta$  为小量, 则平衡点  $E_q$  也会相应出现微扰, 记为  $E_{q1}(x_0 + \Delta, 0, -x_0 - \Delta)$ , 在微扰下其相应的特征多项式可表示为

$$P_1(\lambda) = \lambda^3 + g_2\lambda^2 + g_1\lambda + g_0, \quad (15)$$

其中

$$g_2 = [3\alpha(x_0 + \Delta)^2 - \sigma]p + 1,$$

$$g_1 = [3\alpha(x_0 + \Delta)^2 - \sigma - 1]p + q,$$

$$g_0 = [3\alpha(x_0 + \Delta)^2 - \sigma]qp. \quad (16)$$

不妨设(15)式中的三个特征值可以表示为

$$\lambda_{1,2} = \mu \pm (\omega + \eta)i \quad (\omega > 0),$$

$$\lambda_3 = -(R + \delta) \quad (R > 0),$$

从而

$$P_1(\lambda) = [\lambda - \mu - (\omega + \eta)i][\lambda - \mu + (\omega + \eta)i] \\ \times (\lambda + R + \delta), \quad (17)$$

由于此时  $\Delta, \zeta, \mu, \eta, \delta$  为小量, 由根与系数的关系可得

$$g_2 = R + \delta - 2\mu,$$

$$g_1 = \omega^2 + 2\omega\eta - 2\mu R + (-2\mu\delta + \mu^2 + \eta^2),$$

$$g_0 = 2\omega\eta R + \omega^2\delta + \omega^2 R$$

$$+ (2\omega\eta\delta + \eta^2 R + \eta^2\delta + \mu^2 R + \mu^2\delta), \quad (18)$$

略去高阶小量并将 (14) 式代入得

$$\begin{aligned} g_2 &= F_{q2} + \delta - 2\mu, \\ g_1 &= F_{q1} + 2\omega\eta - 2\mu F_{q2}, \\ g_0 &= 2\omega\eta F_{q2} + F_{q1}\delta + F_{q0}. \end{aligned} \quad (19)$$

注意在  $w = w_c$  处有  $F_{q0} = F_{q1}F_{q2}$ , 由 (19) 式求得  $\mu, \eta, \delta$ , 这里只列出  $\lambda_1$  实部的小量,

$$\mu = -\frac{1}{2} \frac{g_1 F_{q2} - F_{q1} F_{q2} - g_0 + F_{q1} g_2}{F_{q2}^2 + F_{q1}}, \quad (20)$$

同时, 由  $E_{q1}(x_0 + \Delta, 0, -x_0 - \Delta)$  满足平衡方程可知

$$-p\sigma(x_0 + \Delta) + p\alpha(x_0 + \Delta)^3 - k_0(w_c + \zeta) = 0, \quad (21)$$

略去高阶小量得

$$\Delta = \frac{k_0\zeta}{p(-\sigma + 2\alpha x_0^2)},$$

从而 (16) 式可以表示为

$$\begin{aligned} g_2 &= 6p\alpha x_0\Delta + F_{q2}, \\ g_1 &= 6p\alpha x_0\Delta + F_{q1}, \\ g_0 &= q \cdot 6p\alpha x_0\Delta + F_{q0}, \end{aligned} \quad (22)$$

代入 (20) 式, 略去高阶项可得

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{-6\alpha k_0 x_0 (6p\alpha x_0^2 - 2p\sigma + 1 - p)}{F_{q2}^2 + F_{q1}} \zeta, \quad (23)$$

从而

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(\frac{d\lambda_1}{dw}\right)_{w=w_c} &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{\mu}{\zeta} \\ &= \frac{1}{2} \frac{-6\alpha k_0 x_0 (6p\alpha x_0^2 - 2p\sigma + 1 - p)}{F_{q2}^2 + F_{q1}}, \end{aligned}$$

因此产生 Hopf 分岔必须满足

$$6\alpha x_0 k_0 (6p\alpha x_0^2 - 2p\sigma + 1 - p) \neq 0. \quad (24)$$

证毕.

### 3.3. 快子系统的分岔集

由上述分析可知, 快子系统随慢变参数可能产生 fold 及 Hopf 两种分岔行为. 为进一步形象描述各种分岔及其相应条件, 取定其他参数

$$\begin{aligned} \alpha &= 2/7, \\ \beta &= 8/7, \\ L_1 &= 0.007 \text{ mH}, \end{aligned}$$

可得快子系统在无量纲参数  $p$  及慢变量  $w$  平面上的分岔集, 见图 3. 其中 LP1, LP2 为 fold 分岔集直线, H1, H2 为 Hopf 分岔集曲线. H1 和 H2 曲线分别于 LP1 和 LP2 在点 BT1, BT2 处相切, 也即 BT1,

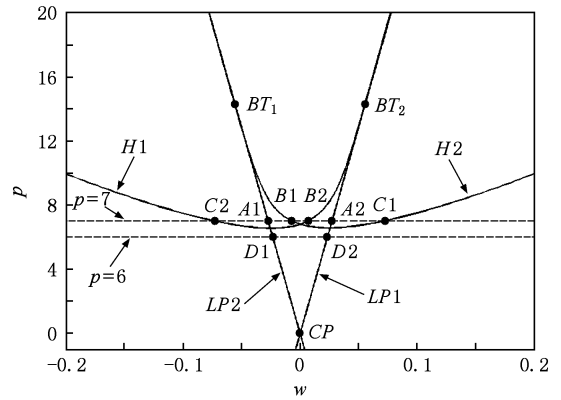


图 3 快子系统分岔集

BT2 ( $\mp 0.055544, 14.285714$ ) 为余维二 Bogdanov-Takens 分岔点. CP 为 LP1, LP2 为 fold 分岔集直线的交点 (0,0), 即余维二 cusp 分岔点<sup>[14]</sup>.

从图中可以发现, 当  $0 < p < 6.559$  时, 快子系统可能产生 fold 分岔, 而当  $p \geq 6.559$  时, 快子系统不仅可能产生 fold 分岔, 也可能产生 Hopf 分岔.

### 4. 快慢效应

为进一步揭示快慢效应, 图 4 给出了整个系统随  $p$  变化的动力学演化过程及系统最大的 Lyapunov 指数, 其他三个 Lyapunov 指数均为非正实数, 在图 5 中没有列出.

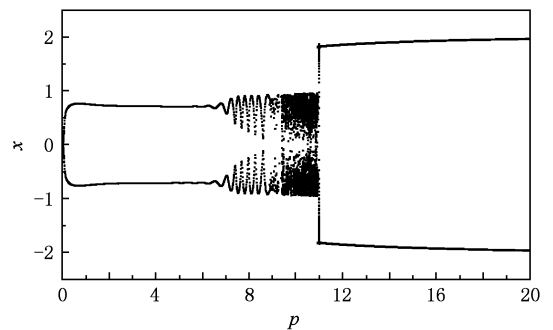


图 4  $w=0$  截面的分岔图

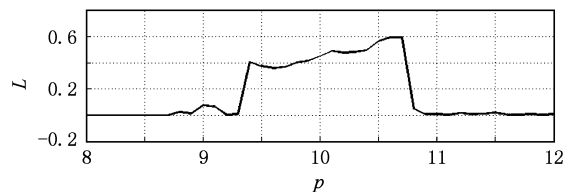
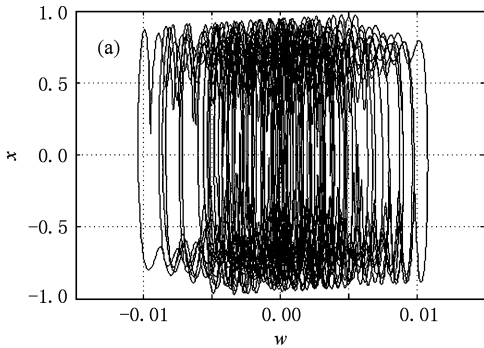


图 5 最大 Lyapunov 指数

显然,当  $p \in [8.7, 11.5]$  时,系统处于混沌状态(图 6),  $p$  在其他值时,系统呈现出常规的运动模式.

下面我们讨论两种具有典型快慢效应的簇发现象及其相应的分岔机制.



### 4.1. 对称式 fold/fold 簇发现象

图 7 给出了  $p = 6.0$  时整个系统在  $w-x$  和  $x-y$  平面上的相图. 从图中可以看出,系统轨迹做周期振荡,而在某些局部区域,轨迹出现微幅振荡.

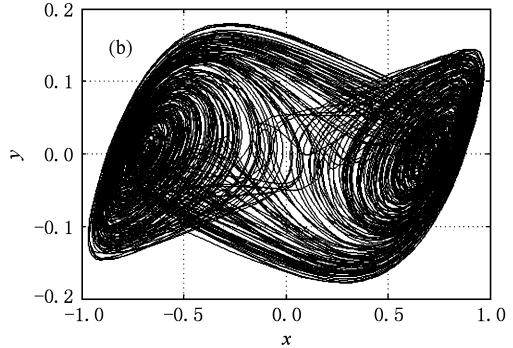


图 6  $p = 10.0$  时的相图 (a)  $w-x$  平面的相图, (b)  $x-y$  平面的相图

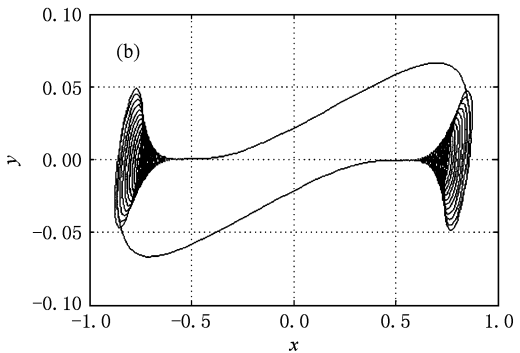
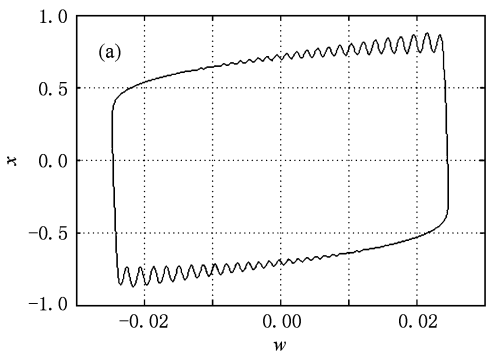


图 7  $p = 6.0$  快慢系统相图 (a)  $w-x$  平面, (b)  $x-y$  平面

图 8(a) 给出了快子系统的平衡点随  $w$  的变化情况. 当  $w = \pm 0.023328$  时,快子系统产生 fold 分岔 ( $D1$  和  $D2$  点),  $D1$  和  $D2$  区间  $[-0.023328,$

$0.023328]$  对应于三个平衡点. 其中虚线所画为不稳定焦点,实线所画为稳定焦点. 其  $D1$  和  $D2$  点即为图 3 中  $p = 6.0$  的水平线与分岔曲线的交点.

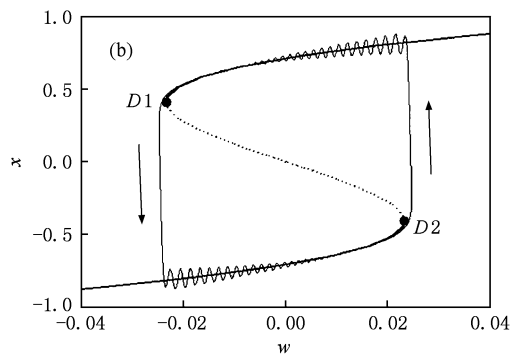
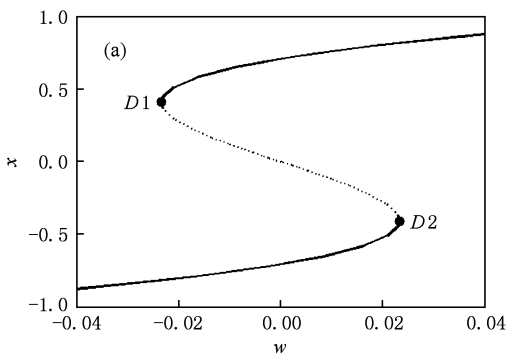


图 8 快子系统的平衡点随  $w$  变化的分岔 (a)  $p = 6.0$  快子系统  $(x, y, z)$  关于慢变参数  $w$  的平衡点分岔分析, (b)  $p = 6.0$  快子系统  $(x, y, z)$  关于慢变参数  $w$  的平衡点分岔分析与快慢系统  $(w, x)$  相图的叠加

为揭示这种运动模式的产生机制,我们将快子系统的平衡点随  $w$  变化的分岔(图 8(a))与系统在  $w-x$  平面上的相图相叠加(图 8(b)). 不妨设系统(4)轨道从下半支的  $w = 0$  (位于两个 fold 分岔点之间)出发,由图 8(b)可知,系统此时处在静息态,随着时间的变化,在  $w = 0.023328$  时,快子系统产生 fold 分岔导致快子系统的平衡点产生跳跃,使得系统轨迹跳到上半支,进入另一静息态,并围绕快子系统的平衡点振荡,随着  $w$  的减少,振荡幅值逐渐减少,直到  $w = -0.023328$  时再次产生 fold 分岔,导致轨迹跃到下半支,并围绕快子系统的平衡点振荡,振荡幅值逐渐减少. 从而,两种静息态在快子系统的两个 fold 分岔点之间产生跳跃现象,构成了周期性重复的对称式 fold/fold 簇发现象.

值得指出的是,由于在快子系统中不出现 Hopf 分岔,快子系统的激发态没有出现,这种簇发运动只是围绕着快子系统的平衡点做微幅振荡.

### 4.2. 对称式 fold/Hopf 簇发现象

随着  $p$  的增加,当  $p \geq 6.559$  时,快子系统可能会产生 Hopf 分岔,图 9 给出了  $p = 7.0$  时系统在  $w-x, x-y$  平面的相图,显然此时向量场仍表现为周期振荡. 图 10 给出了快子系统的平衡点随  $w$  的变化情况,实线为稳定焦点,虚线为不稳定焦点. 当  $w = \pm 0.027217$  时,快子系统产生 fold 分岔 ( $A1$  和  $A2$  点),在  $w = \pm 0.006904$  ( $B1$  和  $B2$  点)和  $w = \pm 0.072411$  ( $C1$  和  $C2$  点)时,快子系统产生 Hopf 分岔. 其中  $B1$  和  $B2$  相应于超临界 Hopf 分岔,  $C1$  和  $C2$  点对应于亚临界 Hopf 分岔. 值得注意的是,在  $w = 0.072411$  时,由  $B1$  点产生的稳定的极限环与  $C1$  点处产生的不稳定的极限环在 LPC 点碰撞产生极限环的折迭分岔 (limit point bifurcation of cycles). 同理,在  $w = -0.072411$  时,由  $B2$  点产生的稳定的极限环与  $C2$  点处产生的不稳定的极限环发生碰撞

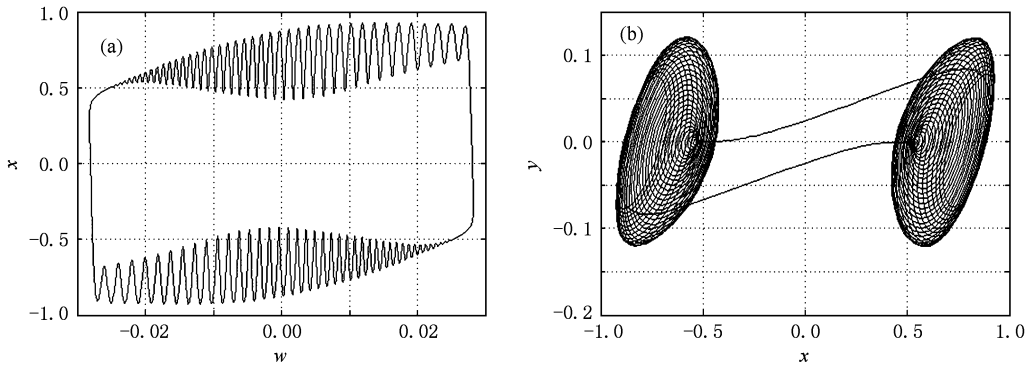


图 9  $p = 7.0$  快慢系统相图 (a)  $w-x$  平面, (b) 平面  $x-y$

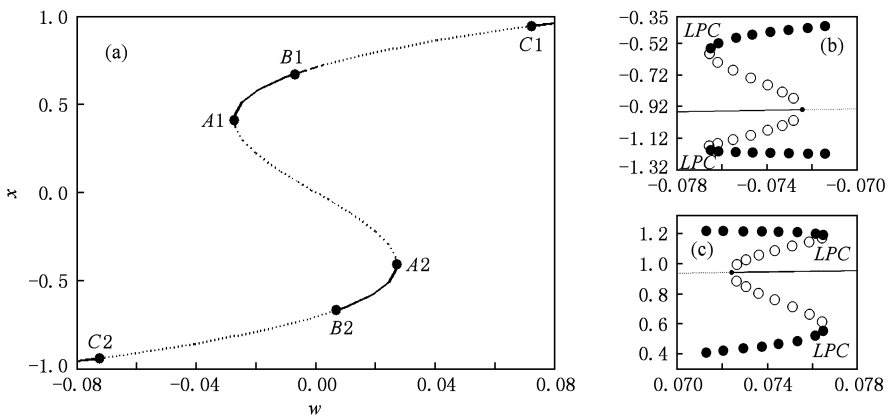


图 10  $p = 7.0$  快子系统  $(x, y, z)$  关于慢变参数  $w$  的平衡点分岔分析 (b), (c) 是 (a) 图的局部放大

产生极限环的折迭分岔. 其中  $A1, B1, C1, A2, B2, C2$  即为图 3 中  $p = 7.0$  的水平线与分岔集曲线的交点.

仍设系统(4)轨迹从下半支的  $w = 0$  点出发, 由图 11 可知, 系统产生围绕快子系统极限环的振荡现象即重复的激发态 (repetitive spiking), 简称激发态. 随着时间的推移, 激发态的振幅不断减小, 在  $w = 0.006904$  处, 系统因超临界 Hopf 分岔而退出激发态, 进入静息态. 随着  $w$  的增加, 系统围绕稳定的静息态向右运动, 当  $w$  增加到  $w = 0.027217$  时, 该静息态的轨道在 fold 分岔点跳跃, 进入上半支的另一重复激发态. 随着时间的变化, 上分支的激发态在  $w = -0.006904$  处同样由超临界 Hopf 分岔回到另一静息态, 并由 fold 分岔 ( $w = -0.027217$ ) 使得轨

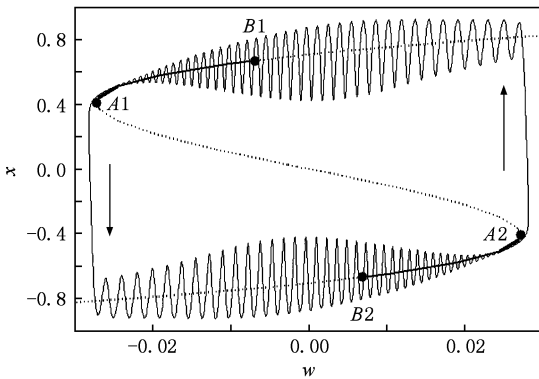


图 11  $p = 7.0$  快子系统  $(x, y, z)$  关于慢变参数  $w$  的平衡点分岔分析与快慢系统  $(w, x)$  相图的叠加

道跳跃进入下半支的激发态. 两种静息态和两种激发态由 fold 分岔和 Hopf 分岔连接, 周期性重复形成了对称式 fold/Hopf 簇发现象.

必须指出的是, 由于快慢系统之间的强耦合, 快子系统的振荡会导致慢变量的变化, 使得快子系统的分岔与实际轨迹的变化之间存在着较大的差别. 另外快子系统在  $C1$  和  $C2$  点会产生亚临界 Hopf 分岔, 该分岔随  $w$  的变化进一步得到闭环的折迭分岔, 使得当系统的静息态由 fold 分岔产生跳跃时不再表现为快子系统的平衡态, 而是直接呈现出激发态的特征.

## 5. 结 论

具有快慢效应的非线性电路会产生各种复杂的簇发现象, 通过分析快子系统随慢变量变化的分岔行为, 可以揭示连接快慢过程的各种簇发分岔机制. 由静息态和激发态通过不同分岔连接的簇发现象会呈现出不同的动力学特性. 与由 fold 分岔连接快慢过程的簇发相比, 由 Hopf 分岔连接快慢过程的簇发, 其中的静息态和激发态表现得比较明显. 同时, 由于快慢系统之间的强耦合, 快子系统平衡点的分岔与轨迹的变化之间存在着一定的差别. 另外, 当由 fold 分岔引起的静息态跳跃进入激发态时, 在不同的周期簇发中, 系统轨迹可以呈现出不同的振荡行为.

- [1] Chua L O, Lin G N 1990 *IEEE Trans. Circ. Syst.* **37** 885
- [2] Feng C W, Cai L, Kang Q 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6155 (in Chinese) [冯朝文、蔡理、康强 2008 物理学报 **57** 6155]
- [3] Luo X S, Wang B H, Chen G R, Jiang P Q, Fang J Q, Quan H J 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 0988 (in Chinese) [罗晓曙、汪秉宏、陈关荣、蒋品群、方锦清、全宏俊 2002 物理学报 **51** 0988]
- [4] Zhang C X, Yu S M 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 120 (in Chinese) [张朝霞、禹思敏 2009 物理学报 **58** 120]
- [5] Stouboulos I N, Miliou A N, Valaristos A P, Kyprianidis I M, Anagnostopoulos A N 2007 *Chaos Soliton. Fract.* **33** 1256
- [6] Hartley T T, Mossayebi F 1989 *Proc. Am. Contr. Conf. Pittsburgh* 419
- [7] Hassan S, Aria A 2008 *Math. Comput. Simul.* **79** 233
- [8] Yassen M T 2003 *Appl. Math. Comput.* **135** 113
- [9] Thongchai B, Piyapong N 2007 *Math. Comput. Simul.* **75** 37
- [10] Jun J Y, Jui S L, The L L 2008 *Chaos Soliton. Fract.* **36** 45
- [11] Yang Z Q, Lu Q H 2008 *Sci. Chin. Ser. G* **51** 687
- [12] Izhikevich E M 2000 *Int. J. Bifur. Chaos* **10** 1171
- [13] Gukenheimer J, Holmes P 1983 *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Field* (New York: Springer)
- [14] Kuznetsov Y A 1998 *Elements of Applied Bifurcation Theory* (New York: Springer Verlag)

# Bursting phenomenon and the bifurcation mechanism in generalized Chua's circuit<sup>\*</sup>

Chen Zhang-Yao Zhang Xiao-Fang Bi Qin-Sheng<sup>†</sup>

(*Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China*)

(Received 22 July 2009; revised manuscript received 10 August 2009)

## Abstract

By introducing the electrical controlling circuit composed of inductance and capacitance, a fourth order model of generalized Chua's circuit with fast-slow effect has been established for certain parameter conditions. The conditions for fold bifurcation as well as Hopf bifurcation of the fast subsystem are investigated with the variation of the slow variable. Furthermore, the dynamical evolution of the entire system is explored, in which the fast-slow effect existing in the system is focused. Two types of bursting phenomenon, namely, the symmetric fold/fold and fold/Hopf periodic bursters, as well as their mechanism, are presented, which discloses the difference between the two burstings from the view point of bifurcation.

**Keywords:** generalized Chua's circuit, bursting, quiescent state, spiking

**PACC:** 0545, 0547

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10872080).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: qbi@ujs.edu.cn