

激光脉冲作用下囚禁离子在 Lamb-Dicke 区域精确的量子运动*

杨美蓉 海文华[†] 鲁耿彪 钟宏华

(湖南师范大学物理系, 长沙 410081)

(2009 年 5 月 16 日收到; 2009 年 8 月 9 日收到修改稿)

研究驻波型激光脉冲作用下, 囚禁于 Paul 阱中的单离子在 Lamb-Dicke 区域的久期运动. 通过试探解方法, 得到系统的量子力学精确解. 基于精确解描述的概率波包串, 发现: 1) 波包串中心以及波包串的高度和宽度受激光脉冲强度的控制, 通过调节激光强度可以控制波包串的形变和传播; 2) 在激光脉冲作用瞬间, 离子的能量期待值发生跳变, 而在激光关闭时段, 有窄的能带形成; 3) 存在一个激光脉冲强度的临界值, 在临界点附近, 系统的稳定性发生变化.

关键词: 囚禁离子, 激光脉冲, Lamb-Dicke 近似, 精确解

PACC: 3280, 0365G

1. 引 言

离子阱是现代原子分子物理研究最具代表性的装置之一, 由于能为囚禁的离子提供近乎与外界隔绝的空间, 且使离子体系的量子特征明显地显示出来, 并在较长时间内得以保持, 故已被广泛地应用于科学技术研究的各个领域. 尤其是近年来, 随着量子逻辑操作^[1-3]、量子计算^[4,5]、量子信息^[6,7]和量子态的制备^[8-10]等方面大量地应用离子阱这一工具进行研究, 人们对离子阱中囚禁离子的动力学特征越来越感兴趣. 但是由于外场参数和初始条件对囚禁离子有很大的影响, 两者的微小改变都可能导致离子运动轨迹发生较大的偏移, 甚至会使离子的运动出现混沌, 从而导致难以控制离子的运动状态. 所以, 对囚禁离子的动力学特征进行深入的研究也就显得尤为重要.

目前已有很多文献对离子体系的动力学特征进行了研究^[11,12], 而且由于囚禁单离子的系统比较简单, 相关的研究结果也比较多, 单离子与激光之间的相互作用更是受到了人们广泛的关注^[13,14]. 当激光强度很小时, 激光的作用相当于对系统的微

扰, 运动方程中的线性项起主导作用, 离子做规则运动. 随着激光强度的不断增大, 非线性效应增强, 离子运动变得越来越复杂. 当激光强度增大到某一临界值时, 离子运动开始进入混沌状态^[15-19]. 近年来, 由于整形激光技术的发展和超短激光脉冲对控制微观系统的有效性^[20,21], 利用超短激光脉冲控制囚禁离子的量子运动态已引起研究者广泛的兴趣. 对于谐振势阱中囚禁离子的久期运动, 考虑 Gauss 型激光脉冲的作用, 文献[22]从经典和量子力学两方面研究离子运动, 通过数值计算结果发现离子在不同参数范围内分别存在经典混沌和量子混沌的性质. 文献[23-25]分别考虑不同形式的驻波型激光脉冲对囚禁离子的作用, 从经典的角度出发, 通过分析和数值计算相结合的方法, 研究系统的规则和混沌运动特性. 文献[22, 26, 27]从量子力学的角度研究驻波型激光脉冲作用下的囚禁离子系统, 发现系统的量子混沌运动和能级跳变等性质. 但因周期势的存在, 人们只能得到该系统的量子微扰解和数值解. 然而, 当离子运动的概率密度波包的宽度远远小于激光的波长时, 离子运动范围将较好地定域在 Lamb-Dicke 区域^[28-30]. 在 Lamb-Dicke 区域, 驻波型激光形成的周期势能很好地用一个谐振子

* 国家自然科学基金(批准号:10875039)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: whhai2005@yahoo.com.cn

势来近似,从而可望得到系统在该区域的量子力学精确解.

本文考虑在驻波型激光脉冲作用下囚禁单离子系统在 Lamb-Dicke 区域的量子运动,通过试探解的方法,我们得到系统的量子力学精确解.从精确解出发,我们绘出离子运动概率波包的中心位置、波包的高度和宽度以及平均能量随时间的演化图.分析发现,首先,波包串中心以及波包串的高度和宽度受激光脉冲强度的控制,通过调节激光强度可以控制波包串的形变和传播;其次,能量期待值的时间演化显示,在激光脉冲作用瞬间,离子的平均能量发生跳变,而在激光关闭的不同时段,都有类似的窄能带形成;最后,波包串中心、波包的高度和宽度以及能量的期待值在激光脉冲强度较小时,都是随时间周期变化的,但在激光脉冲强度达到一临界值之后,它们随着时间不断增大,系统失去稳定性.

2. 系统的经典力学解

我们考虑囚禁于 Paul 阱中的一个单离子系统,该离子受到沿 x 方向的激光驻波作用.以 T 为时间间隔周期性的开关激光源,则得到其 Rabi 频率 Ω 与时间的关系^[26,27,31]

$$\Omega^2(t) = \Omega_0^2 \sum_{j=1}^{\infty} e^{-(t-jT)^2/\sigma^2} \quad (j = 1, 2, 3, \dots), \quad (1)$$

这些 Gauss 脉冲的宽度 σ 非常小,为了便于数学处理,选取 $\sigma \rightarrow 0$,从而(1)式近似为 δ 脉冲^[26,27]

$$\Omega^2(t) = \sigma \sqrt{\pi} \Omega_0^2 \sum_{j=1}^{\infty} \delta(t - jT), \quad (2)$$

从而在一维情况下囚禁于 Paul 阱中的单离子系统的 Hamilton 量为^[26,27]

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 + V \cos(2kx) \sum_{j=1}^{\infty} \delta(t - jT), \quad (3)$$

其中 m 为离子质量, ω_0 为阱频,它由加在 Paul 阱上的直流电压 U 和交流电压 $V_0 \cos(\omega t)$ 来调制^[30]; k

为激光波数, $V = \frac{\hbar \sigma \sqrt{\pi} \Omega_0^2}{8\Delta}$, 其中 Δ 取为足够大的失谐量,以避免内态共振跃迁对激光操控运动态的复杂影响.为了计算方便,我们已取定激光初位相为零^[26,27,31].

考虑离子处在 Lamb-Dicke 区域的情况:采用 Lamb-Dicke 近似 $kx \ll 1$, 有 $\cos(2kx) = 1 - 2\sin^2(kx) \doteq 1 - 2k^2 x^2$. 此时(3)式的 Hamilton 量可

变为

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} [m\omega_0^2 - 4Vk^2 \sum_{j=1}^{\infty} \delta(t - jT)] x^2 + V \sum_{j=1}^{\infty} \delta(t - jT). \quad (4)$$

利用(4)式以及正则方程 $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$, $\dot{p} = m\ddot{x} = -\frac{\partial H}{\partial x}$, 得到离子在阱中受到激光脉冲作用下的经典运动方程

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{4Vk^2}{m} x \sum_{j=1}^{\infty} \delta(t - jT). \quad (5)$$

下面我们分几种情形对(5)式的解进行讨论.

情形 1 当时间 $t \neq jT$ 时,(5)式因右边为零,而成为谐振子方程

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (6)$$

在时间区间 $(j-1)T < t < jT$, 该谐振子方程的通解设为

$$x = A_j \cos(\omega_0 t) + B_j \sin(\omega_0 t), \quad (7a)$$

$$\dot{x} = -\omega_0 A_j \sin(\omega_0 t) + \omega_0 B_j \cos(\omega_0 t), \quad (7b)$$

A_j, B_j 是由初始条件决定的积分常数, $\sqrt{A_j^2 + B_j^2}$ 正比于离子运动振幅.由(7)式表明,当 $t \neq jT$ 时,离子做频率为 ω_0 的周期运动,但是对应于不同的时间区间,(7)式有不同的待定积分常数.

情形 2 当时间 $t = jT$ 时,设 $x(jT) = x_j$, $\dot{x}(jT) = \dot{x}_j$, $0 < \varepsilon \ll 1$,

1) 当 $t = jT - \varepsilon$ 时,有

$$x_j = A_j \cos(\omega_0 jT) + B_j \sin(\omega_0 jT), \quad (8a)$$

$$\dot{x}_j = -\omega_0 A_j \sin(\omega_0 jT) + \omega_0 B_j \cos(\omega_0 jT), \quad (8b)$$

2) 当 $t = (j+1)T - \varepsilon$ 时,有

$$x_{j+1} = A_{j+1} \cos[\omega_0(j+1)T] + B_{j+1} \sin[\omega_0(j+1)T], \quad (9a)$$

$$\dot{x}_{j+1} = -\omega_0 A_{j+1} \sin[\omega_0(j+1)T] + \omega_0 B_{j+1} \cos[\omega_0(j+1)T], \quad (9b)$$

A_{j+1}, B_{j+1} 也是由初始条件决定的积分常数.(8)式和(9)式给出了囚禁离子在受到激光脉冲作用瞬间的位置和速度.因离子的位置 x 具有连续的性质,即在 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时,碰撞前后离子的位置相同.根据(7)式我们还能得到

$$x = [A_j \cos(\omega_0 t) + B_j \sin(\omega_0 t)]_{t=jT-\varepsilon} = [A_{j+1} \cos(\omega_0 t) + B_{j+1} \sin(\omega_0 t)]_{t=jT+\varepsilon}. \quad (10)$$

下面我们利用文献[32,33]提出的解积分方程的方法,求在给定 A_1 为初始位置坐标, $B_1 \omega_0$ 为初始

速度时(5)式的精确解. 令(5)式右边等于零, 得到它的两线性无关解

$$\Psi_1 = \sin(\omega_0 t), \quad (11a)$$

$$\Psi_2 = \Psi_1 \int \Psi_1^{-2} dt = -\frac{1}{\omega_0} \cos(\omega_0 t). \quad (11b)$$

利用(11)式把(5)式化成一积分方程, 在时间区间 $0 < t < jT$ 内

$$\begin{aligned} x = & A_1 \cos(\omega_0 t) + B_1 \sin(\omega_0 t) \\ & + \frac{4Vk^2}{m} \Psi_2 \int_{T-\varepsilon}^{jT-\varepsilon} \Psi_1 x \sum_{n=1}^{j-1} \delta(t-nT) dt \\ & - \frac{4Vk^2}{m} \Psi_1 \int_{T-\varepsilon}^{jT-\varepsilon} \Psi_2 x \sum_{n=1}^{j-1} \delta(t-nT) dt. \quad (12) \end{aligned}$$

对(12)式积分, 得到单离子系统在时间 $t < jT$ 的精确解

$$\begin{aligned} x = & \left[A_1 - \frac{4Vk^2}{m\omega_0} \sum_{n=1}^{j-1} \sin(\omega_0 nT) x_n \right] \cos(\omega_0 t) \\ & + \left[B_1 + \frac{4Vk^2}{m\omega_0} \sum_{n=1}^{j-1} \cos(\omega_0 nT) x_n \right] \sin(\omega_0 t). \quad (13) \end{aligned}$$

根据(7)式和(13)式相等, 我们可以得到 A_j, B_j 与 A_1, B_1 的关系

$$A_j = A_1 - \frac{4Vk^2}{m\omega_0} \sum_{n=1}^{j-1} \sin(\omega_0 nT) x_n, \quad (14a)$$

$$B_j = B_1 + \frac{4Vk^2}{m\omega_0} \sum_{n=1}^{j-1} \cos(\omega_0 nT) x_n, \quad (14b)$$

若设(12)式中的积分上限为 $(j+1)T - \varepsilon$, 进而可得出 A_{j+1}, B_{j+1} 与 A_j, B_j 的关系

$$A_{j+1} = A_j - \frac{4Vk^2}{m\omega_0} \sin(\omega_0 jT) x_j, \quad (15a)$$

$$B_{j+1} = B_j + \frac{4Vk^2}{m\omega_0} \cos(\omega_0 jT) x_j, \quad (15b)$$

将(15)式代入(9)式, 并利用(8)式得出 x_{j+1}, \dot{x}_{j+1} 与 x_j, \dot{x}_j 的关系

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{j+1} \\ \dot{x}_{j+1} \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 T) & \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 T) \\ -\omega_0 \sin(\omega_0 T) & \cos(\omega_0 T) \end{pmatrix} \\ & \times \begin{pmatrix} x_j \\ \dot{x}_j + \frac{4Vk^2}{m} x_j \end{pmatrix}. \quad (16) \end{aligned}$$

(16)式是一个二维映射, 通过 jT 时刻离子的位置和速度给出了 $(j+1)T$ 时刻离子的位置和速度. 从给定的初始条件出发, 由(16)式可以得到任意 jT 时刻离子的状态.

3. 系统的量子力学精确解

现在我们将单离子系统的 Hamilton 量(4)式量子化 ($p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$), 并代入含时的 Schrödinger 方程得

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = & -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \left[\frac{1}{2} m \omega_0^2 \right. \\ & \left. - 2Vk^2 \sum_{j=1}^{\infty} \delta(t-jT) \right] x^2 \psi \\ & + V \sum_{j=1}^{\infty} \delta(t-jT) \psi. \quad (17) \end{aligned}$$

我们以 $1/\omega_0$ 为单位归一化时间 t 以及周期 T , 分别以 $\sqrt{\hbar/(m\omega_0)}$ 和它的倒数 $\sqrt{m\omega_0/\hbar}$ 归一化空间坐标 x 和概率密度 $|\psi|^2$. 这样方程无量纲化后的形式为

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \psi}{\partial t} = & -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \\ & + \frac{1}{2} \left[1 - \frac{4Vk^2}{m\omega_0} \sum_{j=1}^{\infty} \delta(t-jT) \right] x^2 \psi \\ & + \frac{V}{\hbar} \sum_{j=1}^{\infty} \delta(t-jT) \psi. \quad (18) \end{aligned}$$

设方程(18)的试探解的形式为^[34,35]

$$\begin{aligned} \psi = & \psi_n = a_n(t) H_n(\xi) \\ & \times \exp[b(t)x - c(t)x^2 - f^2(t)/2], \\ \xi = & e(t)x - f(t), \quad (19) \end{aligned}$$

这里 $a_n(t), b(t)$ 和 $c(t)$ 是时间的复函数, $e(t)$ 和 $f(t)$ 是实函数. 分别对时间与空间坐标微分得:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \psi_n}{\partial t} = & ia_n \left[\dot{a}_n H_n + (\dot{e}x - \dot{f}) \frac{\partial H_n}{\partial \xi} \right. \\ & \left. + (\dot{b}x - \dot{c}x^2 - \dot{f}^2) H_n \right] e^{[bx - cx^2 - f^2/2]}, \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial x} = & a_n \left[e \frac{\partial H_n}{\partial \xi} + (b - 2cx) H_n \right] e^{[bx - cx^2 - f^2/2]}, \\ \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2} = & a_n \left[e^2 \frac{\partial^2 H_n}{\partial \xi^2} + (2b - 4cx) e \frac{\partial H_n}{\partial \xi} \right. \\ & \left. + (b^2 - 2c - 4bcx + 4c^2 x^2) H_n \right] \\ & \times e^{[bx - cx^2 - f^2/2]}. \quad (20) \end{aligned}$$

把(20)式代入方程(18), 得

$$\begin{aligned} e^2 \frac{\partial^2 H_n}{\partial \xi^2} + 2(be - if + ie^2 x - 2cex) \frac{\partial H_n}{\partial \xi} \\ + 2 \left\{ i \frac{\dot{a}_n}{a_n} - i\dot{f}^2 + \frac{b^2}{2} - c - \frac{V}{\hbar} \sum_{j=1}^{\infty} \delta(t-jT) \right\} \end{aligned}$$

$$+ (i\dot{b} - 2bc)x + \left[2c^2 - i\dot{c} - \left(\frac{1}{2} - \frac{2Vk^2}{m\omega_0} \sum_{j=1}^{\infty} \delta(t - jT) \right) \right] x^2 \} H_n = 0. \quad (21)$$

由于 Hermit 多项式必须遵守 Hermit 方程 $\frac{\partial^2 H_n}{\partial \xi^2}$

$- 2\xi \frac{\partial H_n}{\partial \xi} + 2nH_n = 0$, 将它与(21)式比较得

$$i\dot{c} = 2c^2 - \left[\frac{1}{2} - \frac{2Vk^2}{m\omega_0} \sum_{j=1}^{\infty} \delta(t - jT) \right],$$

$$i\dot{b} = 2bc,$$

$$i\dot{e} = 2ce - e^3,$$

$$i\dot{f} = be - e^2f,$$

$$i \frac{\dot{a}_n}{a_n} = iff' - \frac{b^2}{2} + c + \frac{V}{\hbar} \sum_{j=1}^{\infty} \delta(t - jT) + ne^2. \quad (22)$$

设 $c = \frac{\dot{\varphi}}{2i\varphi}$, 得到

$$i\dot{c} = \frac{\ddot{\varphi}}{2\varphi} - \frac{\dot{\varphi}^2}{2\varphi^2},$$

$$2c^2 = - \frac{\dot{\varphi}^2}{2\varphi^2}. \quad (23)$$

将(23)式代入(22)式中的第一个方程,得

$$\ddot{\varphi} = -k'(t)\varphi = - \left[1 - \frac{4Vk^2}{m\omega_0} \sum_{j=1}^{\infty} \delta(t - jT) \right] \varphi, \quad (24)$$

将(24)式对比(5)式,我们发现它们具有相同的形式,当然它们的解也应该具有相同的形式,只不过(5)式 x 的解是实函数,而(24)式 φ 的解为复函数. 若设它的实部和虚部分别为 φ_1 和 φ_2 , 它们也分别都满足同一方程(24)得到

$$\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2 = \rho(t)e^{i\theta(t)},$$

$$\rho(t) = \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}, \theta(t) = \arctan \frac{\varphi_2}{\varphi_1}. \quad (25)$$

由(5)式可知,在时间区间 $(j-1)T < t < jT$, φ_1 和 φ_2 的解的形式为

$$\varphi_1 = A'_j \cos(t) + B'_j \sin(t), \quad (26a)$$

$$\varphi_2 = A''_j \cos(t) + B''_j \sin(t), \quad (26b)$$

根据同样的分析方法可以得到 A'_j, B'_j, A''_j, B''_j 也有和(14)式相似的表达形式,它们与初始值以及激光项有关,

$$A'_j = A'_1 - \frac{4Vk^2}{m\omega_0} \sum_{n=1}^{j-1} \sin(nT) \varphi_{1n},$$

$$B'_j = B'_1 + \frac{4Vk^2}{m\omega_0} \sum_{n=1}^{j-1} \cos(nT) \varphi_{1n}, \quad (27a)$$

$$A''_j = A''_1 - \frac{4Vk^2}{m\omega_0} \sum_{n=1}^{j-1} \sin(nT) \varphi_{2n},$$

$$B''_j = B''_1 + \frac{4Vk^2}{m\omega_0} \sum_{n=1}^{j-1} \cos(nT) \varphi_{2n}, \quad (27b)$$

由 φ 和 c 之间的变换得到

$$c = \frac{\dot{\varphi}}{2i\varphi} = \frac{1}{2} \dot{\theta} - i \frac{\dot{\rho}}{2\rho}. \quad (28)$$

把(25)式代入(24)式,得到

$$\ddot{\theta} = \frac{-2\dot{\theta}\dot{\rho}}{\rho}, \ddot{\rho} = \rho\dot{\theta}^2 - k'(t)\rho. \quad (29)$$

对(29)式中的第一个式子积分得到

$$c_0 = \rho^2 \dot{\theta} = \varphi_1 \dot{\varphi}_2 - \varphi_2 \dot{\varphi}_1. \quad (30)$$

c_0 是个积分常数. 结合方程(25)和(28),运用关系(30),从方程(22)得到

$$b = \frac{1}{\rho e^{i\theta}} (b_1 + ib_2) = k_1(t) + ik_2(t),$$

$$k_1 = \frac{\varphi_1 b_1 + \varphi_2 b_2}{\rho^2},$$

$$k_2 = \frac{\varphi_1 b_2 - \varphi_2 b_1}{\rho^2},$$

$$e = \sqrt{\dot{\theta}} = \frac{\sqrt{c_0}}{\rho},$$

$$f = \frac{k_1}{e} = \frac{k_1 \rho}{\sqrt{c_0}},$$

$$a_n = \frac{A_0}{\sqrt{\rho}} \exp i \left\{ \int \left[\frac{k_1^2}{2} - \frac{k_2^2}{2} \right] dt - \left(\frac{1}{2} + n \right) \theta + \frac{V}{\hbar} j \right\}. \quad (31)$$

这里 b_1, b_2 和 A_0 是任意实常数, j 表示激光脉冲作用的次数. 把这些代入方程(19)得到精确解 $\psi_n(x, t)$, 在归一化条件

$$\int |\psi_n|^2 dx = A_0^2 \sqrt{c_0^{-1}} \int H_n^2(\xi) \exp(-\xi^2) d\xi$$

$$= A_0^2 \sqrt{c_0^{-1}} \pi 2^n n! = 1$$

下得到常量

$$A_0 = [\sqrt{c_0} / (\sqrt{\pi} 2^n n!)]^{1/2}, \quad (32)$$

由方程(19), (31), (32)可以得到归一化波函数

$$\psi_n(x, t) = R_n(x, t) \exp[i\Theta_n(x, t)]$$

$$(n = 0, 1, 2, 3 \dots),$$

$$R_n(x, t) = \left[\frac{\sqrt{c_0}}{\sqrt{\pi} 2^n n! \rho(t)} \right]^{1/2} H_n(\xi) \exp\left(-\frac{1}{2} \xi^2\right),$$

$$\Theta_n(x, t) = \frac{\dot{\rho}(t)}{2\rho(t)} x^2 + k_2(t)x$$

$$\begin{aligned}
& + \int \left[\frac{k_1^2(t)}{2} - \frac{k_2^2(t)}{2} \right] dt \\
& - \left(\frac{1}{2} + n \right) \theta(t) + \frac{V}{\hbar} j, \\
\xi(x, t) & = \frac{\sqrt{c_0}}{\rho(t)} x - \frac{k_1(t)\rho(t)}{\sqrt{c_0}}. \quad (33)
\end{aligned}$$

对于任意量子数 n , 精确解(33)的模 $R_n(x, t)$ 描述的波包串包含 $n + 1$ 个波包, 波包串的中心轨迹 $x_c(x, t)$ 由方程(33)令 $\xi = 0$ 得到

$$x_c = \frac{k_1 \rho^2(t)}{c_0}. \quad (34)$$

结合方程(31)和(25), (34), 得到波包串中心轨道的形式为

$$x_c = \frac{\varphi_1 b_1 + \varphi_2 b_2}{c_0}. \quad (35)$$

对比(12)式, 我们发现波包串的中心轨迹与经典的轨道具有相同的形式.

在精确解(33)的 ξ 中包含的函数 $\rho(t)$ 描述了波包串和每个波包的宽度, 分母中的 $\rho(t)$ 则控制着每个波包的高度, 所以我们称 $\rho(t)$ 是波包的高度和宽度的函数.

现在我们在态 $\psi(x, t)$ 下计算平均能量. 用 Dirac 符号, 左矢和右矢, 由方程(33)和在态 ψ 中平均能量的定义, 我们得到

$$\begin{aligned}
E_n & = \left\langle \psi_n \left| i \frac{\partial}{\partial t} \psi_n \right. \right\rangle \\
& = \left\langle \psi_n \left| i \frac{\partial}{\partial t} \left\{ R_n(x, t) \exp[i\Theta_n(x, t)] \right\} \right| \psi_n \right\rangle. \quad (36)
\end{aligned}$$

将精确解代入(36)式, 直接对时间求导得到

$$\begin{aligned}
E_n & = i \left\langle \psi_n \left| \frac{-\dot{\rho}}{2\rho} \psi_n \right. \right\rangle + i \left\langle \psi_n \left| \dot{\xi} \frac{1}{H_n} \frac{dH_n}{d\xi} \psi_n \right. \right\rangle \\
& - i \left\langle \psi_n \left| \dot{\xi} \xi \psi_n \right. \right\rangle \\
& - \left\langle \psi_n \left| \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\rho}}{2\rho} \right) x^2 + \dot{k}_2 x + \left(\frac{k_1^2}{2} - \frac{k_2^2}{2} \right) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \left(\frac{1}{2} + n \right) \dot{\theta} \right] \psi_n \right. \right\rangle. \quad (37)
\end{aligned}$$

运用归一化条件 $\langle \psi_n | \psi_{n'} \rangle = \delta_{nn'}$ 以及公式

$$\xi = e(t)x - f(t),$$

$$\xi \psi_n = \sqrt{n/2} \psi_{n-1} e^{-i\theta} + \sqrt{(n+1)/2} \psi_{n+1} e^{i\theta},$$

$$\begin{aligned}
2\xi^2 \psi_n & = \sqrt{n(n-1)} \psi_{n-2} e^{-2i\theta} + (2n+1) \psi_n \\
& + \sqrt{(n+1)(n+2)} \psi_{n+2} e^{2i\theta},
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{H_n} \frac{\partial H_n}{\partial \xi} \psi_n = 2n \frac{H_{n-1}}{H_n} \psi_n = \sqrt{2n} \psi_{n-1} e^{-i\theta}, \quad (38)$$

我们得到平均能量为

$$\begin{aligned}
E_n & = \left(\frac{1}{2} + n \right) \left[\frac{c_0}{\rho^2} - \frac{\rho^2}{c_0} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\rho}}{2\rho} \right) \right] \\
& - \frac{1}{2} (k_1^2 - k_2^2) - \dot{k}_2 \bar{x} - \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\rho}}{2\rho} \right) \right] \bar{x}^2. \quad (39)
\end{aligned}$$

同时容易得到在态 $\psi(x, t)$ 下坐标 x 和动量 p 的期待值为

$$\begin{aligned}
\bar{x} & = \langle \psi_n | x | \psi_n \rangle = \frac{\rho^2}{c_0} k_1, \\
\bar{p} & = \left\langle \psi_n \left| -i \frac{\partial}{\partial x} \right| \psi_n \right\rangle = k_2 + \frac{\dot{\rho}}{\rho} \bar{x}. \quad (40)
\end{aligned}$$

明显地, 我们将方程(12), (13), (26)和(34)对比 \bar{x} 的能量期待值, 可知量子力学期待值的轨道也是经典的轨道, $\bar{x} = x, \bar{p} = p$. 由(40)式并结合(29), (30)和(5)式, 并取自然单位 $m = \omega_0 = 1$, 得到

$$\begin{aligned}
E_n & = \left(\frac{1}{2} + n \right) \frac{1}{2c_0} \left[\frac{c_0^2}{\rho^2} + \dot{\rho}^2 + k'(t)\rho^2 \right] \\
& + \frac{1}{2} [p^2 + k'(t)x^2] \\
& (n = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (41)
\end{aligned}$$

我们发现, 平均能量包括经典和量子两部分. 能量期待值的时间平均给出了能量振荡的平衡位置, 这个位置随着量子数 n 的增大而增大.

4. 概率波包串的激光控制

通过分析波包串的中心 x_c , 波包串的高度和宽度函数 ρ , 以及平均能量 E_n 的表达式, 我们发现它们都与 φ_1 和 φ_2 的取值情况紧密相关. 由(26)和(27)式可知, 决定着 φ_1 和 φ_2 的常数 A'_j, B'_j, A''_j 和 B''_j 不仅与它们的初始取值有关, 而且与受其系统本身以及激光控制的系数 $\frac{4Vk^2}{m\omega_0}$ 有关. 由于本文是讨论离

子处在 Lamb-Dicke 区域的运动情况, 激光的波数 k 非常小. 以囚禁 $^9\text{Be}^+$ 离子为例, 其质量为 $m \approx 1.5063 \text{ kg}$, 假定实验中阱频取值为 $\omega_0 \approx 2.5 \times 10^5 \text{ Hz}$, 当离子概率密度波包的宽度远远小于激光波长时, 离子运动定域在 Lamb-Dicke 区域^[30], 即 Lamb-Dicke 参数 $\eta = kl_0 \ll 1$, 其中 $l_0 = \sqrt{\hbar/(2m\omega_0)} \approx 1.6735 \times 10^{-7} \text{ m}$ 为谐振子长度. 因此, 波数取值范围被限制到 $k = \eta/l_0 \ll 1/l_0 \approx 5.9756 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$, 当以 l_0 为单位时, 可取 $k \leq 0.1$. 令 $a = \frac{4Vk^2}{m\omega_0}$, 显然它是一个与激光参数和阱频有关的可控参数, 我们可通过

调节激光脉冲的强度 V 和波数 k 来改变参数 a 的大小. 下面我们将取不同的 a 值, 由 (35), (25) 和 (41) 式分别作出一组 x_c, ρ 和 E_n 随时间的演化图形, 由此分析激光脉冲对概率波包串的影响.

取定 $b_1 = 1, b_2 = 2, T = 1$, 并且令初始值为 $A'_1 = 0.2, B'_1 = 0.1, A''_1 = 0.1$ 和 $B''_1 = 0.1$, 由 (35) 式结合 (26), (27) 和 (30) 式, 绘出波包串的中心随时间的演化图 (见图 1), 图 1(a), 1(b) 和 1(c) 分别对应 $a = 0.8, a = 1.05$ 和 $a = 1.1$ 的情况. 分析图形我们发现, 在每个 $t = jT$ 时刻, 激光 δ 势的瞬间作用

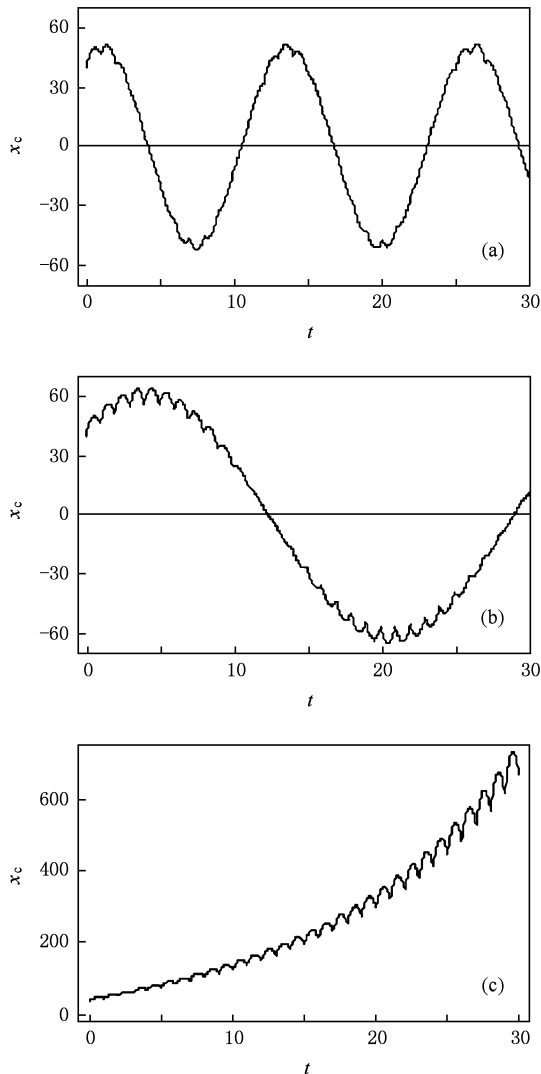


图 1 波包串的中心随时间的演化图 参数取 $b_1 = 1, b_2 = 2, T = 1, A'_1 = 0.2, B'_1 = 0.1, A''_1 = 0.1$ 和 $B''_1 = 0.1$; (a) $a = 0.8$, (b) $a = 1.05$, (c) $a = 1.1$. 图 (a), (b) 中波包串中心周期性振荡, a 取较大值时振荡周期较长; 图 (c) 中波包串中心随时间不断远离其初始位置. t 和周期 T 以 $1/\omega_0$ 为单位归一化, 空间坐标 x 和概率密度 $|\psi|^2$ 以 $\sqrt{\hbar/(m\omega_0)}$ 和它的倒数 $\sqrt{m\omega_0/\hbar}$ 为单位归一化

都会使得波包串中心的运动速度剧烈变化, 从而改变波包中心本身固有的振荡轨迹, 而在紧接着的激光关闭时段, 由于没有外部激光的作用, 波包串中心的运动又会逐渐回到由其系统自身所决定的振荡轨道上来, 直到下一个激光脉冲的又一次作用. 当 a 取 0.8 和 1.05 时 (见图 1(a) 和图 1(b)), 波包串的中心在一定的空间范围内做周期性的振荡. 对比图 1(a) 和图 1(b) 我们知道, a 的取值较大时, 波包串中心振荡的范围以及波包串中心振荡的周期也会较大. 而当 a 变大到 1.1 时 (见图 1(c)), 波包串中心不再周期性的振荡, 而是随着激光脉冲的不断作用而不断远离原来的振荡中心. 可见 a 的取值变大, 也就是说激光脉冲的强度或波数变大, 会使得波包串中心由周期性的振荡而变成不断远离原来中心位置的运动. 在这种情况下, 系统最终将失去稳定性.

由 (25) 式结合 (26) 和 (27) 式我们也知道, 波包高度和宽度的函数 ρ 受初始值 A'_1, B'_1, A''_1 和 B''_1 的直接影响, 它们的取值越大, ρ 的改变也会越大. 在对应相同的参数的情况下, 我们绘出 ρ 随时间的演化图 (见图 2), 图 2(a), 2(b), 2(c) 同样的分别对应 $a = 0.8, a = 1.05$ 和 $a = 1.1$. 分析图形我们发现, 在每个 $t = jT$ 时刻, 激光 δ 势的瞬间作用都会使得 ρ 有大的变化率, 而在紧接着的激光关闭时段, 波包高度和宽度的函数又会逐渐回到其系统自身所决定的振荡轨迹上来, 直到下一个激光脉冲的又一次作用. 当 a 取 0.8 和 1.05 时 (见图 2(a), 图 2(b)), 波包串的高度和宽度函数总是在很小的范围内周期性的振荡, 这表明离子运动时波包的高度和宽度的改变是很小的, 波包串在空间传播时, 波包串只发生小的变形. 对比图 2(a) 和图 2(b) 我们知道, a 的取值较大时, ρ 的振荡的周期也会较大. 而当 a 变大到 1.1 时 (见图 2(c)), 波包高度和宽度的函数 ρ 不再周期性的振荡, 而是随着激光脉冲的不断作用而不断增大. 分析 (33) 式很容易知道, ρ 的越来越大意味着波包的高度越来越小, 波包的宽度越来越大, 此时波包串在空间传播时, 会由于一次次激光脉冲的作用而塌缩. 进一步增加 a 的取值, 也就是激光脉冲强度再变大, 会使得波包高度和宽度的函数 ρ 继续增大.

在方程 (41) 中, 由 (24) 式我们知道 $k'(t)$ 是直接和激光脉冲有关的系数, 当时间取 $t = jT$ 时, δ 激发项为无穷大, 此时将无法求出平均能量. 当时间 t

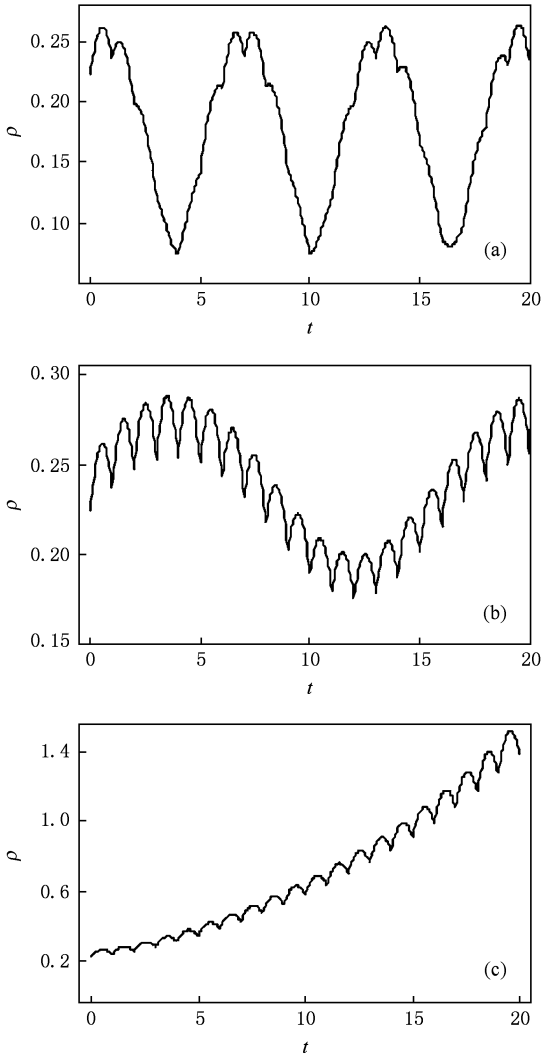


图 2 波包高度和宽度的函数 ρ 随时间的演化图 与图 1 的相关参数取相同的值;(a) $a = 0.8$, (b) $a = 1.05$, (c) $a = 1.1$. (a),(b)中波包高度和宽度的函数在很小的范围内周期性振荡,(c)中该函数随时间不断增大. t 和周期 T 以 $1/\omega_0$ 为单位归一化,空间坐标 x 和概率密度 $|\psi|^2$ 以 $\sqrt{\hbar/(m\omega_0)}$ 和它的倒数 $\sqrt{m\omega_0/\hbar}$ 为单位归一化

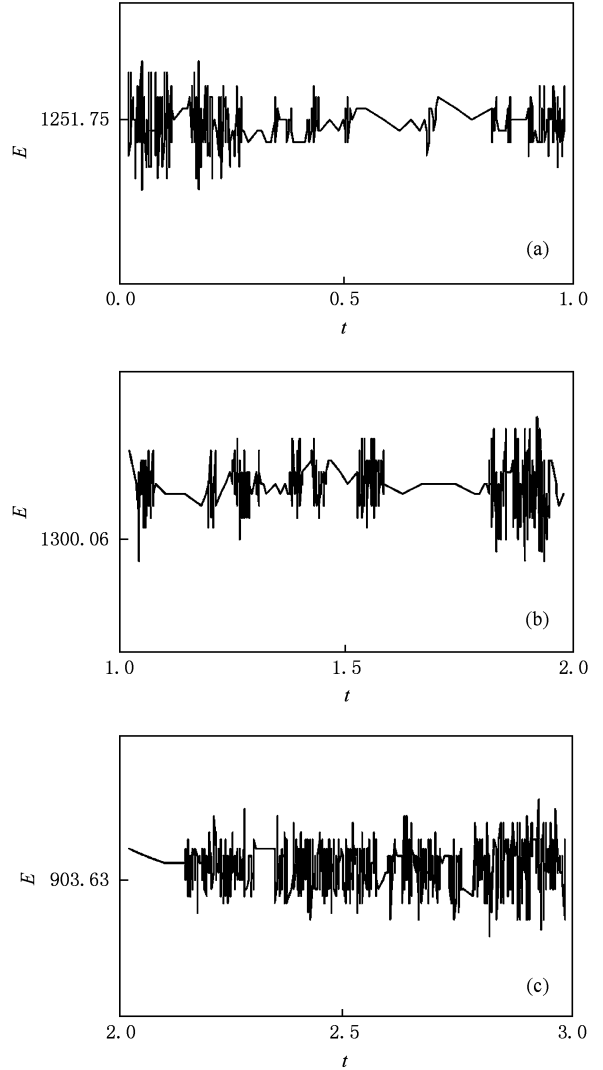


图 3 波包串的平均能量 E_n 随时间的演化图 与图 1 的相关参数取相同的值,并取定 $n = 1, a = 0.8$;(a) t 取 0 到 1,(b) t 取 1 到 2,(c) t 取 2 到 3. 三个图中能量期待值都在很小的范围内连续性振荡. t 和周期 T 以 $1/\omega_0$ 为单位归一化,空间坐标 x 和概率密度 $|\psi|^2$ 以 $\sqrt{\hbar/(m\omega_0)}$ 和它的倒数 $\sqrt{m\omega_0/\hbar}$ 为单位归一化

$\neq jT$ 时, δ 激发项为零,再结合(24)–(26),(30)和(40)式,仍在与图 1 和图 2 相同的参数情况下,给定 $n = 1$,很容易绘出平均能量 E_n 随时间的演化图(见图 3 和图 4).图 3(a),3(b)和 3(c)是都取定了 $a = 0.8$,时间分别为 0 到 1,1 到 2 和 2 到 3 离子运动的平均能量.分析图形我们发现,在激光脉冲关闭的一段时间里,离子运动的平均能量总是在一定的范围内连续振荡,通过对图的具体分析,我们发现这个能量振荡的幅度非常小,仅仅为 10^{-12} 数量级.在图 3(a),3(b),3(c)的三个时间段,平均能量

振荡的中心不同,分别以 $E = 1251.75, 1300.06$ 和 903.63 为中心,能量以不同值为中心的小幅振荡形成窄的能带.图 4(a),4(b)和 4(c)是 a 分别取定为 $0.8, 1.05, 1.1$ 而绘出的平均能量在较长时间内的演化图.由该图我们看到,在每个 $t = jT$ 时刻,激光 δ 势的作用使得平均能量发生跳变.在紧接着的激光关闭时段,平均能量只会在一个非常小的能带范围内发生连续性变化,直到激光脉冲发生下一次作用.这种激光脉冲瞬间的作用导致平均能量发生跳变的效应通过分析方程(41)很容易能理解.在方程

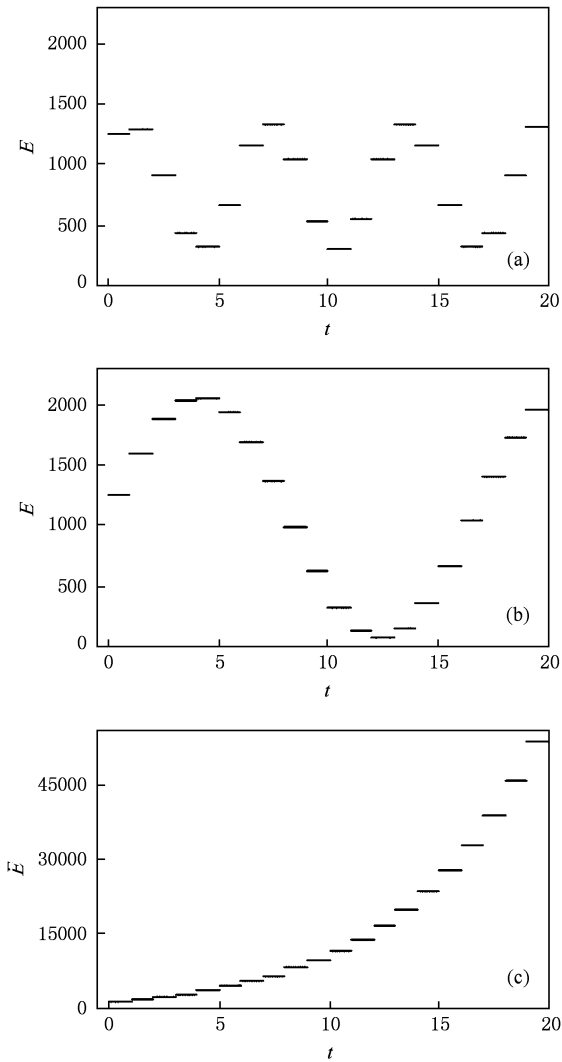


图4 波包串的平均能量 E_n 随时间的演化图 与图1的相关参数取相同的值,并取定 $n=1$; (a) $a=0.8$, (b) $a=1.05$, (c) $a=1.1$. 从中看到,激光脉冲的作用会使得能量期待值发生跳变. (a), (b)中能量期待值在一定范围内周期性跳变, a 取较大值,这个周期也较长; (c)中的能量期待值随时间不断增大而向上跳变. t 和周期 T 以 $1/\omega_0$ 为单位归一化,空间坐标 x 和概率密度 $|\psi|^2$ 以 $\sqrt{\hbar/(m\omega_0)}$ 和它的倒数 $\sqrt{m\omega_0/\hbar}$ 为单位归一化

(41)中,平均能量包含了经典和量子两部分,经典部分中的动量 p 在激光 δ 脉冲作用前后是不连续的,这就导致了平均能量的跳变.此外,观察较长时间范围内的平均能量随时间演化图(图4)我们还发现,当 a 取0.8和1.05时(见图4(a)和图4(b)),平均能量在一定范围内周期性地上下跳变, a 的取值较大,这个跳变的范围也较大,而且跳变周期也较长.当 a 变大到1.1时(见图4(c)),平均能量不再做周期性跳变,而是随着一次次激光脉冲的作用

而向上跳变,不断增大.根据图4的能级分布,在某个特定的时间关闭激光脉冲,可以控制运动态能量到相应的特定能级上.

通过对图1—4的分析,我们知道, a 取值的不断变大,会导致波包中心、波包高度和宽度的函数以及能量的期待值都由周期性的振荡变成不断的增大.而且从文献[23]中我们知道在标准映射下存在着使得离子运动进入到整体混沌状态的激光强度的临界值.那么本文所研究的系统也应该存在着类似的临界点,使得在临界点附近,系统的稳定性发生变化.通过选取一系列不同的 a 值绘出波包串中心的时间演化图,我们能粗略地确定这个临界值的大小(见图5).图5(a)取定 $a=a_1=1.09260$,内插图是 t 取[1008,1020]时间区间内波包串中心的振荡图.图5(b)取定 $a=a_2=1.09261$,内插图是 t 取[2608,2620]时间区间内波包串中心的振荡图.我们看到图5(a)中当 $a=1.09260$ 时波包串的中心仍然是周期性振荡的,只不过此时振荡周期的时间已经非常长.而在图5(b)中 a 的取值仅仅增加了

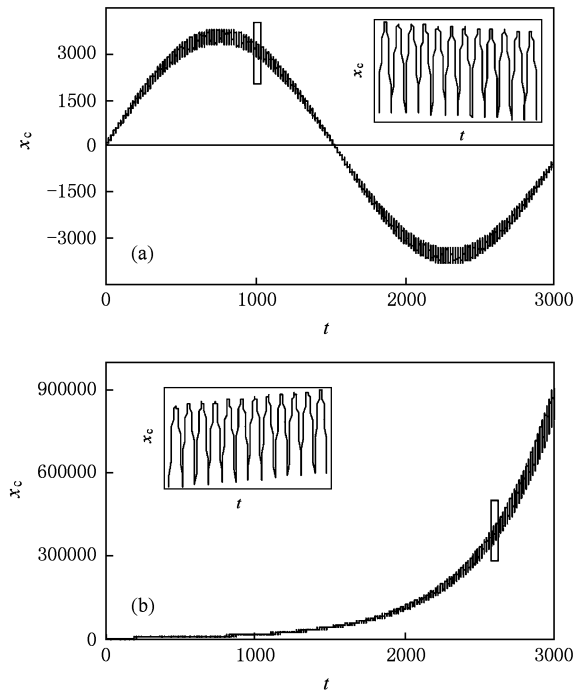


图5 波包串的中心随时间的演化图 与图1的相关参数取相同的值, (a) $a=a_1=1.09260$,波包串中心周期性的振荡,内插图是 t 取1008到1020时间区间内波包串中心的振荡图; (b) $a=a_2=1.09261$,波包串中心随激光脉冲的作用不断远离初始位置,内插图是 t 取2608到2620时间区间内波包串中心的振荡图. t 和周期 T 以 $1/\omega_0$ 为单位归一化,空间坐标 x 和概率密度 $|\psi|^2$ 以 $\sqrt{\hbar/(m\omega_0)}$ 和它的倒数 $\sqrt{m\omega_0/\hbar}$ 为单位进行归一化

0.00001, 此时波包串中心已经不再做周期性振荡, 而是随着激光脉冲的不断作用而不断远离初始位置, 从而系统失去稳定性. 可见, 在 a_1 与 a_2 之间一定存在着一个 a 的临界值, $a \in (1.09260, 1.09261)$. 在该临界值附近, 系统由稳定在一定区域周期性振荡变得不再稳定. 也就是说, 存在一个激光脉冲强度的临界值, 使得系统的稳定性在临界点附近发生变化.

5. 结 论

本文研究的是驻波型激光脉冲作用下囚禁于 Paul 阱中的一个单离子系统, 分析离子处在 Lamb-Dicke 区域的量子运动. 对系统 Hamilton 中的激光势项采用了 Lamb-Dicke 近似, 分析得出了系统的经典力学解, 又通过试探解的方法得到了系统量子力学精确解. 通过分析激光脉冲对概率波包串的具体影响, 我们发现由于采用 Lamb-Dicke 近似将非线性势近似成了线性势, 离子运动不会出现混沌状态.

当激光脉冲强度较小时, 离子运动的波包串中心以及波包串的高度和宽度随时间周期性振荡, 其振荡的周期以及振荡范围都会受到激光脉冲强度的影响; 当激光脉冲强度增大到某一临界值之后, 离子运动的波包串中心以及波包串的高度和宽度都会随着激光脉冲的不断作用而不断增大, 波包的高度会越来越小, 宽度会越来越大, 空间传播的波包串会发生塌缩. 此外在激光关闭时段, 离子运动的能量期待值在非常窄的能带范围内变化, 不受激光脉冲的影响; 而在激光脉冲作用瞬间, 离子的能量期待值发生跳变. 当激光脉冲强度较小时, 激光脉冲的多次作用使得能量期待值在一定范围内上下跳变, 其跳变的周期以及跳变范围都受激光脉冲强度的影响. 当激光脉冲强度增大到某一临界值之后, 能量期待值会随着激光脉冲的不断作用而不断向上跳变. 上述结果显示, 通过调节激光脉冲的强度可以操纵波包串的形变和传播, 同时控制系统能量的跳变.

- [1] Ai L Y, Yang J, Zhang Z M 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 5589 (in Chinese) [艾凌艳、杨 健、张智明 2008 物理学报 **57** 5589]
- [2] Protsenko I E, Reymond G, Schlosser N, Grangier P 2002 *Phys. Rev. A* **66** 062306
- [3] Childs A M, Chuang I L 2000 *Phys. Rev. A* **63** 012306
- [4] Klappenecker A, Rötteler M 2003 *Phys. Rev. A* **67** 010302
- [5] Lévi B, Georgeot B, Shepelyansky D L 2003 *Phys. Rev. E* **67** 046220
- [6] Steane A, Roos C F, Stevens D, Mundt A, Leibfried D, Schmidt-Kaler F, Blatt R 2000 *Phys. Rev. A* **62** 042305
- [7] Nägerl H C, Leibfried D, Rohde H, Thalhammer G, Eschner J, Schmidt-Kaler F, Blatt R 1999 *Phys. Rev. A* **60** 145
- [8] Feng M, Wang X G 2002 *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **4** 283
- [9] Feng M, Luo X L, Zhu X W, Shi L, Yan M 1998 *Acta Phys. Sin. (Oversea)* **7** 488
- [10] Wu Y, Yang X X 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 3086
- [11] Shi L, Duan Y W, Feng M, Zhu X W, Fang X M 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 1248 (in Chinese) [施 磊、段宜武、冯 芒、朱熙文、方细明 1998 物理学报 **47** 1248]
- [12] Gao K L, Yan M, Luo X L, Zhu X W, Huang G L, Li J M, Shi L 1995 *Acta Phys. Sin.* **44** 43 (in Chinese) [高克林、颜 旻、罗学立、朱熙文、黄贵龙、李交美、施 磊 1995 物理学报 **44** 43]
- [13] Wang Z Q, Duan C K, An G L 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3438 (in Chinese) [汪仲清、段昌奎、安广雷 2006 物理学报 **55** 3438]
- [14] Fang M F, Liu X 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2363 (in Chinese) [方卯发、刘 翔 2001 物理学报 **50** 2363]
- [15] Hai W H, Duan Y W, Zhu X W, Luo X L, Shi L 1998 *J. Phys. A* **31** 2991
- [16] Hai W H, Duan Y W, Zhu X W, Shi L, Luo X L, He C S 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 2117 (in Chinese) [海文华、段宜武、朱熙文、施 磊、罗学立、何春山 1997 物理学报 **46** 2117]
- [17] Hai W H, Feng M, Zhu X W, Shi L, Gao K L, Fang X M 1999 *J. Phys. A* **32** 8265
- [18] Berman G P, James D F V, Hughes R J, Gulley M S, Holzscheiter M H, López G V 2000 *Phys. Rev. A* **61** 023403
- [19] Chacón R, Cirac J I 1995 *Phys. Rev. A* **51** 4900
- [20] Rabitz H, de Vivie-Riedle R, Motzkus M, Kompa K 2008 *Science* **288** 824
- [21] Kral P, Thanopoulos I, Shapiro M 2007 *Rev. Mod. Phys.* **79** 53
- [22] Scott A J, Holmes C A, Milburn G J 1999 *Phys. Rev. A* **61** 013401
- [23] Li F, Hai W H 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1309 (in Chinese) [李 飞、海文华 2004 物理学报 **53** 1309]
- [24] Chen W Q, Hai W H, Li H, Ma Z Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1305 (in Chinese) [陈文钦、海文华、李 辉、马志英 2007 物理学报 **56** 1305]
- [25] Chen W Q, Hai W H, Song J W 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1608 (in Chinese) [陈文钦、海文华、宋建文 2008 物理学报 **57** 1608]

- [26] Gardiner S A, Cirac J I, Zoller P 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 4790
- [27] Li F, Hai W H, Chong G S, Xie Q T 2004 *Commun. Theor. Phys.* **42** 599
- [28] Andr r R, Carvalho, Buchleitner A 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 204101
- [29] Lizuain I, Muga J G 2007 *Phys. Rev. A* **76** 033808
- [30] Leibfried D, Blatt R, Monroe C, Wineland D 2003 *Rev. Mod. Phys.* **75** 281
- [31] Gardiner S A, Jaksch D, Dum R, Cirac J I, Zoller P 2000 *Phys. Rev. A* **62** 023612
- [32] Hai W H, Feng M, Zhu X W, Shi L, Gao K L, Fang X M 2000 *Phys. Rev. A* **61** 052105
- [33] Hai W H, Zhu X W, Feng M, Shi L, Gao K L, Fang X M 2001 *J. Phys. A* **34** L79
- [34] Hai W H, Huang S X, Gao K L 2003 *J. Phys. B* **36** 3055
- [35] Hai W H, Lee C H, Chong G S 2004 *Phys. Rev. A* **70** 053621

Exact quantum motion of a single trapped ion interacting with standing laser pulses in Lamb-Dicke regime *

Yang Mei-Rong Hai Wen-Hua[†] Lu Geng-Biao Zhong Hong-Hua

(Department of Physics, Hunan Normal University, Changsha 410081, China)

(Received 16 May 2009; revised manuscript received 9 August 2009)

Abstract

We investigate the secular motion of a single Paul-trapped ion in the Lamb-Dicke regime, which interacts with a sequence of standing laser pulses. By using the ansatz method, we get an exact quantum solution of the system. Based on the wave-packet trains described by the exact solution, we find that: i) The center, height and width of the wave-packet trains depend on the strength of laser pulses, the deformation and spread of the wave-packet trains can be controlled by adjusting the strength of laser. ii) Energy expectation values of the ion show jumps at the instantaneous switching on of the laser pulses. In the time intervals when the laser pulses are switched off some narrow energy bands are generated. iii) When the strength of laser pulses reaches a critical value, the system changes its stability.

Keywords: trapped ion, laser pulse, Lamb-Dicke approximation, exact solution

PACC: 3280, 0365G

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10875039).

[†] Corresponding author. E-mail: whhai2005@yahoo.com.cn