

# 基于移位算子时域有限差分的色散薄层 节点修正算法\*

魏 兵<sup>†</sup> 董宇航 王 飞 李存志

(西安电子科技大学物理系, 西安 710071)

(2009 年 7 月 8 日收到; 2009 年 7 月 14 日收到修改稿)

提出了一种时域有限差分(FDTD)计算中色散介质薄层问题处理的新算法. 对于厚度小于一个元胞尺度的电小尺寸色散介质薄层问题, 采用将元胞内电位移矢量和磁感应强度加权平均的方法, 求得薄层所在元胞内修正点处的等效介质参数. 然后根据常见色散介质模型, 包括 Debye 模型、Lorenz 模型、Drude 模型等, 介电常数和磁导率可以表示为  $j\omega$  分式多项式的特点, 结合频域到时域的转换关系(即用  $\partial/\partial t$  代替  $j\omega$ ) 和移位算子方法得到了修正点处的时域本构关系, 进而获得时域递推计算式. 数值结果表明, 该方法具有通用、节省计算时间、节省内存和计算精度良好等优点.

**关键词:** 色散介质薄层, 节点修正, 移位算子, 时域有限差分

**PACC:** 4110H, 5170, 5210

## 1. 引 言

许多微波器件中都包含有电小尺寸的色散介质薄层, 用于隐身的吸波涂层往往也是电小尺寸的色散介质薄层, 因而包含色散介质薄层目标电磁问题的数值模拟引起了广泛的关注. 在电磁场数值算法中, 时域有限差分(finite difference time domain, 简记为 FDTD)方法因具有适用性强、便于处理非均匀介质的电磁问题、一次计算结合 Fourier 变换可以得到宽频段信息等特点而得到了广泛的应用<sup>[1-23]</sup>. FDTD 方法处理含薄层的目标电磁问题一般有三种途径: 1) 在薄层内用足够精细的网格离散, 这一方法需要消耗大量的计算机内存; 2) 应用阻抗边界条件(surface impedance boundary conditions, 简记为 SIBCs), 这一方法常用于处理理想导体(perfect electric conductor, 简记为 PEC)背景的介质或导体涂层问题, 但在处理色散介质薄层时十分复杂<sup>[12, 13]</sup>; 3) 对薄层处节点的迭代方程进行区域修正<sup>[14]</sup>. 从内存消耗和计算复杂性考虑第三种方法(即对薄层处的迭代方程进行区域修正)是较为可取的一种方法.

在时域宽带计算中色散介质薄层问题的处理远比非色散介质复杂, 目前公开发表的文献不多. 2003 年 Mikko 等<sup>[14]</sup>利用含色散介质薄层电、磁场节点修正的方法处理薄层问题. 该文针对 Lorenz 介质通过加权平均的方法得到元胞所在网格的等效参数, 然后将相对介电常数和相对磁导率展开, 同时引入一些相关的中间变量并且计算中需要用到极化强度、电流密度、磁化强度、磁流密度等众多物理参量. 推导过程繁琐复杂、方法通用性差(其他介质需要重新推导公式并编写相应的计算程序). Mikko 等的算法中忽略了金属基底介质薄层电色散特性, 且仅处理了一维的情形. 2005 年 Mikko<sup>[12]</sup>又利用阻抗边界条件的方法处理色散介质涂层问题. Giulio 等<sup>[15]</sup>2007 年用阻抗边界条件及格林函数法的方法处理了真空中色散介质薄层的反射、透射问题, 同样也仅给出一维的算例. 总的来说, 现有文献对色散介质薄层的 FDTD 计算问题进行了初步的研究, 还未见色散介质薄层的三维计算实例.

本文在文献[14]和[16]的基础之上提出了一种解决色散介质薄涂层问题的通用 FDTD 方法. 对于厚度小于一个元胞尺度的电小尺寸色散介质薄层问题, 采用将元胞内电位移矢量和磁感应强度加

\* 国家自然科学基金(批准号:60871071)和中国博士后科学基金(批准号:20070421109)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: bwei@xidian.edu.cn

权平均的方法,求得薄层所在元胞内修正点处的等效介质参数.然后根据常见色散介质模型(包括 Debye 模型、Lorentz 模型、Drude 模型等)的介电常数和磁导率可以表示为  $j\omega$  分式多项式的特点,结合频域到时域转换关系和移位算子(shift operator, 简记为 SO)方法得到了修正点处的时域本构关系,进而获得时域递推计算式.该方法同时能处理电色散和磁色散薄层问题,便于编制处理常见色散介质薄层问题的通用三维程序.

## 2. 节点修正算法的基本思想

在 FDTD 计算中,电磁场的空间采样均按照 Yee 元胞的方式进行(如图 1 所示).由于受稳定性条件的限制,FDTD 方法很多情况下网格不可能划分得过细.通常的 FDTD 方法无法处理介质薄层厚度小于空间离散网格的尺寸的情形(如图 1).在节

点修正算法中,FDTD 元胞被分为两种类型:一是正常元胞,其中电、磁场采样点的参数取该元胞的介质参数即可(如图 1 中左侧的深色长方体元胞);另一种为需要修正的元胞(如图 1 右侧的长方体元胞),这类元胞需要计算出节点处的等效介质参数以模拟薄层的贡献.

可见,电、磁场修正点处等效介质参数的计算是节点修正方法的关键问题之一.对于非色散介质,得到修正点处的等效介质参数后直接代入修正点的递推计算公式即可.色散介质的参数随着频率而变化,得到的等效介质参数也随频率变化.而 FDTD 计算在时域进行,因而需要利用修正点处的频域本构关系得到时域递推计算公式.下面首先讨论不同情形下修正点处等效介质参数的获得方法,然后讨论如何从频域本构关系得到对应的时域本构关系,进而得到用于 FDTD 计算的时域递推公式.

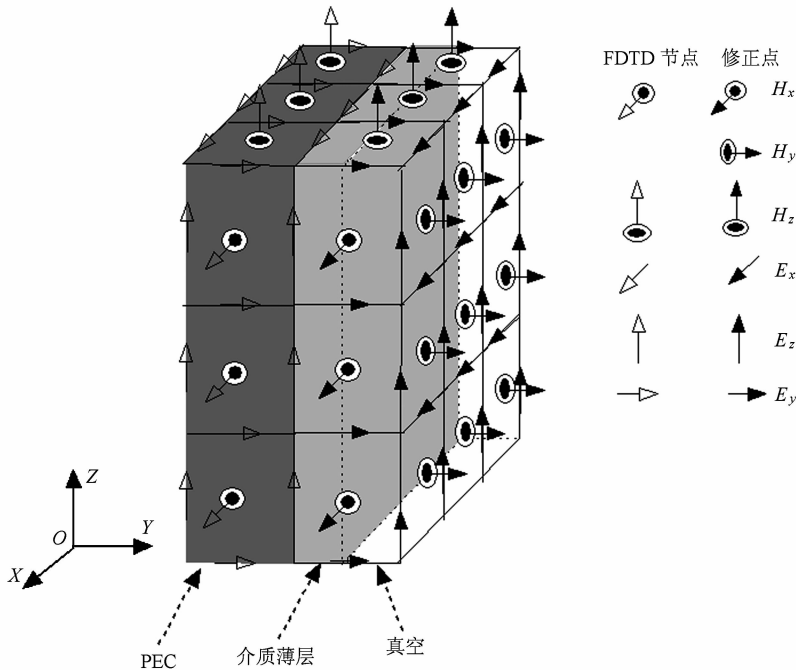


图 1 金属衬底色散介质薄层节点修正示意图

## 3. 修正点处的等效复介电常数和复磁导率

在 FDTD 计算中,电场节点的修正与等效复介电常数有关,而磁场节点的修正与等效复磁导率有关.下面分别给出电、磁场修正点处等效电磁参数

的计算方法.

### 3.1. 色散介质薄层处于真空中的情形

当色散介质薄层处于真空当中时,若薄层厚度不满一个 FDTD 元胞,则可以利用将电位移矢量或磁感应强度在一个元胞内求平均值的方法得到修正点处的等效介质参数.设薄层在一个元胞中所占

的体积比为  $\alpha$  (整个元胞的体积计为 1), 则其元胞中总电位移矢量和总磁感应强度可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \alpha \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega) \mathbf{E} + (1 - \alpha) \varepsilon_0 \mathbf{E}, \\ \mathbf{B} &= \alpha \mu_0 \mu_r(\omega) \mathbf{H} + (1 - \alpha) \mu_0 \mathbf{H}, \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $\varepsilon_0$  为真空介电常数,  $\varepsilon_r(\omega)$  和  $\mu_r(\omega)$  分别为表示色散介质薄层的相对介电常数和相对磁导率,  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{H}$  分别表示电场强度和磁场强度. (1) 式可写为

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \bar{\varepsilon}_r(\omega) \mathbf{E}, \\ \mathbf{B} &= \mu_0 \bar{\mu}_r(\omega) \mathbf{H}. \end{aligned} \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_r(\omega) &= \alpha[\varepsilon_r(\omega) - 1] + 1, \\ \bar{\mu}_r(\omega) &= \alpha[\mu_r(\omega) - 1] + 1, \end{aligned} \quad (3)$$

分别为电场和磁场修正点处的等效参数.

### 3.2. 理想导体基底上的色散介质薄层

对于理想导体基底上的色散介质薄层, 磁场采样点处的等效参数可以采用上述方法获得. 而电场采样点采用简单平均的方法求出等效介质参数进行节点修正的效果并不好<sup>[14]</sup>. 在此电场修正点处的等效介质参数分两种情形处理: 1) PEC 表面法向电场对应节点 (图 1 中的电场的  $y$  分量) 的等效介质参数依然采用 (1) 式中的方法平均得到; 2) PEC 表面切向电场对应节点 (图 1 中的电场的  $x, z$  分量) 的等效介质参数用如下方法得到.

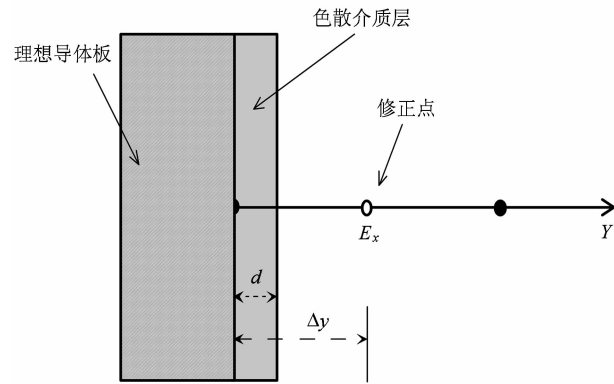


图 2 导体表面附近切向电场节点的修正

图 2 是图 1 的二维截面图. 设色散介质薄层厚度为  $d$ , 在  $y$  轴方向空间离散网格的尺寸为  $\Delta y$ ,  $y = 0$  是理想导体和色散介质的分界面. 显然,  $y = 0$  处的切向电场为零, 设理想导体表面附近的切向场 (图 1 中电场的  $x, z$  分量) 在  $0 < y < 2\Delta y$  区域内是线性分布的, 即 (以  $x$  分量为例)

$$E_x(y) = \frac{y}{\Delta y} E_x \Big|_1, \quad (4)$$

其中  $E_x(y)$  为理想导体附近的电场  $x$  分量.  $E_x \Big|_1$  是导体表面右侧一个网格处的电场强度的  $x$  分量. 下面讨论  $0 < d \leq \Delta y/2$  和  $\Delta y/2 < d < \Delta y$  两种情形下等效介质参数的选取.

1) 当  $0 < d \leq \Delta y/2$  时, 用金属表面附近电场修正点左、右各一个元胞 (共两个元胞, 如图 2 所示) 电位移矢量平均求得修正点处的等效介质参数.

$$\begin{aligned} D_x \Big|_1 &= \frac{1}{2\Delta y} \int_0^{2\Delta y} \varepsilon(\omega) \frac{y}{\Delta y} E_x \Big|_1 dy \\ &= \frac{1}{2\Delta y} \int_0^d \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega) \frac{y}{\Delta y} E_x \Big|_1 dy \\ &\quad + \frac{1}{2\Delta y} \int_d^{2\Delta y} \varepsilon_0 \frac{y}{\Delta y} E_x \Big|_1 dy \\ &= \varepsilon_0 \bar{\varepsilon}_r(\omega) E_x \Big|_1, \end{aligned} \quad (5)$$

其中等效复介电常数

$$\bar{\varepsilon}_r[d, \varepsilon_r(\omega)] = 1 + \frac{d^2}{4\Delta y^2} [\varepsilon_r(\omega) - 1], \quad (6)$$

式中  $\varepsilon_r(\omega)$  的含义同 (1) 式.

2) 当  $\Delta y/2 < d < \Delta y$  时, 用金属表面附近电场修正点处左、右边各半个元胞内电位移矢量的平均值的方法求得修正点处的等效介质参数.

$$\begin{aligned} D_x \Big|_1 &= \frac{1}{\Delta y} \int_{\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{3\Delta y}{2}} \varepsilon(\omega) \frac{y}{\Delta y} E_x \Big|_1 dy \\ &= \frac{1}{\Delta y} \int_{\frac{\Delta y}{2}}^d \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega) \frac{y}{\Delta y} E_x \Big|_1 dy \\ &\quad + \frac{1}{\Delta y} \int_y^{\frac{3\Delta y}{2}} \varepsilon_0 \frac{y}{\Delta y} E_x \Big|_1 dy \\ &= \varepsilon_0 \bar{\varepsilon}_r[d, \varepsilon_r(\omega)] E_x \Big|_1, \end{aligned} \quad (7)$$

其中等效相对等效复介电常数

$$\bar{\varepsilon}_r[d, \varepsilon_r(\omega)] = \frac{9 - \varepsilon_r(\omega)}{8} + \frac{d^2}{2\Delta y^2} [\varepsilon_r(\omega) - 1]. \quad (8)$$

## 4. 修正点处的时域迭代计算式

对于色散介质来说, 上面得到的频域等效介质参数是频率的函数. 此时, 本构关系在时域成为卷积关系, 这给用 FDTD 计算色散介质中波的散射和传播带来困难. FDTD 方法中色散介质的处理途径有递归卷积方法、 $z$  变换法、电流密度卷积法和辅助差分方程方法等. 这些方法往往要针对不同色散介质模型推导相应的递推公式, 算法的通用性较差.

下面采用移位算子时域有限差分 (SO-FDTD) 方法<sup>[16]</sup> 给出任意色散介质模型的时域递推计算公式.

常见三种线性、各向同性色散介质的模型的介电常数和磁导率的表达式如下<sup>[21]</sup>:

### 1) Debye 模型

$$\begin{aligned}\varepsilon(\omega) &= \varepsilon_\infty + \sum_{p=1}^p \frac{\varepsilon_{s,p} - \varepsilon_{\infty,p}}{1 + j\omega\tau_{e,p}} \\ &\equiv \varepsilon_\infty + \sum_{p=1}^p \frac{\Delta\varepsilon_p}{1 + j\omega\tau_{e,p}}, \\ \mu(\omega) &= \mu_\infty + \sum_{p=1}^p \frac{\mu_{s,p} - \mu_{\infty,p}}{1 + j\omega\tau_{m,p}} \\ &\equiv \mu_\infty + \sum_{p=1}^p \frac{\Delta\mu_p}{1 + j\omega\tau_{m,p}},\end{aligned}\quad (9)$$

其中  $\Delta\varepsilon_p = \varepsilon_{s,p} - \varepsilon_{\infty,p}$ ,  $\Delta\mu_p = \mu_{s,p} - \mu_{\infty,p}$ ,  $\varepsilon_{s,p}$ ,  $\mu_{s,p}$  分别为静态或零频时的相对介电常数和相对磁导率,  $\varepsilon_{\infty,p}$ ,  $\mu_{\infty,p}$  为无穷大频率时的相对介电常数和磁导率,  $\tau_{e,p}$ ,  $\tau_{m,p}$  分别为电极点和磁极点的弛豫时间.

### 2) Lorentz 模型

$$\begin{aligned}\varepsilon(\omega) &= \varepsilon_\infty + \sum_{p=1}^p \frac{\Delta\varepsilon_p \omega_{e,p}^2}{\omega_{e,p}^2 + 2j\omega\delta_{e,p} - \omega^2}, \\ \mu(\omega) &= \mu_\infty + \sum_{p=1}^p \frac{\Delta\mu_p \omega_{m,p}^2}{\omega_{m,p}^2 + 2j\omega\delta_{m,p} - \omega^2},\end{aligned}\quad (10)$$

其中  $\Delta\varepsilon_p$ ,  $\Delta\mu_p$  含义同上,  $\omega_{e,p}$ ,  $\omega_{m,p}$  为电极点频率与磁极点频率,  $\delta_{e,p}$ ,  $\delta_{m,p}$  为电阻尼系数与磁阻尼系数.

### 3) Drude 模型

$$\begin{aligned}\varepsilon(\omega) &= \varepsilon_\infty - \sum_{p=1}^p \frac{\omega_{e,p}^2}{\omega_{e,p}^2 - j\omega\gamma_{e,p}}, \\ \mu(\omega) &= \mu_\infty - \sum_{p=1}^p \frac{\omega_{m,p}^2}{\omega_{m,p}^2 - j\omega\gamma_{m,p}},\end{aligned}\quad (11)$$

其中  $\omega_{e,p}$ ,  $\omega_{m,p}$  为 Drude 电极点与磁极点频率,  $\gamma_{e,p}$ ,  $\gamma_{m,p}$  为电极点与磁极点弛豫时间的倒数.

文献[16]中已证明上述几种色散介质模型中的相对介电常数  $\varepsilon_r(\omega)$  相对磁导率  $\mu_r(\omega)$  均可以写成  $j\omega$  的有理分式函数形式. 同样不难证明(3), (6), (8)式的  $\bar{\varepsilon}_r(\omega)$ ,  $\bar{\mu}_r(\omega)$  也可写成  $j\omega$  的分式函数形式

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_r(\omega) &= \left[ \sum_{n=0}^N p_{nc}(j\omega)^n \right] / \left[ \sum_{n=0}^N q_{nc}(j\omega)^n \right], \\ \bar{\mu}_r(\omega) &= \left[ \sum_{n=0}^N p_{nm}(j\omega)^n \right] / \left[ \sum_{n=0}^N q_{nm}(j\omega)^n \right].\end{aligned}\quad (12)$$

此时,色散介质的频域本构关系可以表示为

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \left( \sum_{n=0}^N p_{nc}(j\omega)^n / \sum_{n=0}^N q_{nc}(j\omega)^n \right) \mathbf{E},$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \left( \sum_{n=0}^N p_{nm}(j\omega)^n / \sum_{n=0}^N q_{nm}(j\omega)^n \right) \mathbf{H}.\quad (13)$$

在这种情形下,可以利用移位算子法得到(13)式对应的时域本构关系,进一步可以获得时域递推关系式.(13)式可以改写为

$$\begin{aligned}\left[ \sum_{n=0}^N q_{nc}(\partial/\partial t)^n \right] \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \left[ \sum_{n=0}^N p_{nc}(\partial/\partial t)^n \right] \mathbf{E}, \\ \left[ \sum_{n=0}^N q_{nm}(\partial/\partial t)^n \right] \mathbf{B} &= \mu_0 \left[ \sum_{n=0}^N p_{nm}(\partial/\partial t)^n \right] \mathbf{H}.\end{aligned}\quad (14)$$

引进离散时域的移位算子  $z_t$ , 定义为

$$z_t f^n = f^{n+1},\quad (15)$$

亦即移位算子的作用相当于使离散时域数列的  $n$  时刻值移位到函数在  $n+1$  时刻的值. 可以证明,对时间偏导的移位算子形式为

$$(\partial/\partial t)^n \rightarrow \{(2/\Delta t)[(z_t - 1)/(z_t + 1)]\}^n.\quad (16)$$

将(16)式代入(14)式并整理得到离散时域的本构关系(为了简化,以下文中令  $h = 2/\Delta t$ ,  $\Delta t$  是计算中的时间离散间隔,以  $x$  分量为例).

$$\begin{aligned}\left[ \sum_{l=0}^N q_{lc} h^l (z_t + 1)^{N-l} (z_t - 1)^l \right] D_x^n &= \varepsilon_0 \left[ \sum_{l=0}^N p_{lc} h^l (z_t + 1)^{N-l} (z_t - 1)^l \right] E_x^n, \\ \left[ \sum_{l=0}^N q_{lm} h^l (z_t + 1)^{N-l} (z_t - 1)^l \right] B_x^n &= \mu_0 \left[ \sum_{l=0}^N p_{lm} h^l (z_t + 1)^{N-l} (z_t - 1)^l \right] H_x^n.\end{aligned}\quad (17)$$

(17)式是修正点处离散时域含移位算子的本构关系. 通常情形下,工程实际中  $N$  取 1, 或 2. 例如单极点 Debye 模型为  $N=1$  时的情形,而非磁等离子体、双极点 Debye 模型、单极点 Lorentz 模型和单极点 Drude 模型为  $N=2$  时的情形.

当  $N=2$  时,可得从  $\mathbf{D}$  到  $\mathbf{E}$  和从  $\mathbf{B}$  到  $\mathbf{H}$  的递推计算公式

$$\begin{aligned}E_x^{n+1} &= [a_{0e}(D_x^{n+1}/\varepsilon_0) + a_{1e}(D_x^n/\varepsilon_0) \\ &\quad + a_{2e}(D_x^{n-1}/\varepsilon_0) - b_{1e}E_x^n - b_{2e}E_x^{n-1}]/b_{0e}, \\ H_x^{n+1} &= [a_{0m}(B_x^{n+1}/\mu_0) + a_{1m}(B_x^n/\mu_0) \\ &\quad + a_{2m}(B_x^{n-1}/\mu_0) - b_{1m}H_x^n - b_{2m}H_x^{n-1}]/b_{0m}.\end{aligned}\quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned}a_{0e} &= q_{0e} + q_{1e}h + q_{2e}h^2, \\ a_{1e} &= 2q_{0e} - 2q_{2e}h^2, \\ a_{2e} &= q_{0e} - q_{1e}h + q_{2e}h^2, \\ b_{0e} &= p_{0e} + p_{1e}h + p_{2e}h^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{1e} &= 2p_{0e} - 2p_{2e}h^2, \\
 b_{2e} &= p_{0e} - p_{1e}h + p_{2e}h^2, \\
 a_{0m} &= q_{0m} + q_{1m}h + q_{2m}h^2, \\
 a_{1m} &= 2q_{0m} - 2q_{2m}h^2, \\
 a_{2m} &= q_{0m} - q_{1m}h + q_{2m}h^2, \\
 b_{0m} &= p_{0m} + p_{1m}h + p_{2m}h^2, \\
 b_{1m} &= 2p_{0m} - 2p_{2m}h^2, \\
 b_{2m} &= p_{0m} - p_{1m}h + p_{2m}h^2.
 \end{aligned} \tag{19}$$

对于  $N \geq 3$  的一般情况(17)式可写为

$$\begin{aligned}
 E_x^{n+1} &= \frac{1}{b_{0e}} \left[ \sum_{l=0}^N a_{le} (D_x^{n+1-l} / \varepsilon_0) - \sum_{l=1}^N b_{le} E_x^{n+1-l} \right], \\
 H_x^{n+1} &= \frac{1}{b_{0m}} \left[ \sum_{l=0}^N a_{lm} (B_x^{n+1-l} / \mu_0) - \sum_{l=1}^N b_{lm} H_x^{n+1-l} \right]. \tag{20}
 \end{aligned}$$

其中  $a_{le}, b_{le}$  可由  $q_{0e}, q_{1e}, \dots, q_{Ne}, p_{0e}, p_{1e}, \dots, p_{Ne}$  表示,  $a_{lm}, b_{lm}$  可由  $q_{0m}, q_{1m}, \dots, q_{Nm}, p_{0m}, p_{1m}, \dots, p_{Nm}$  表示.

当  $N=2$  时, 离散 Maxwell 旋度方程和时域本构关系可得三维情形下电位移矢量和电场强度的递推计算式如下(以  $x$  分量为例)

$$\begin{aligned}
 D_x \Big|_{i+1/2, j, k}^{n+1} &= D_x \Big|_{i+1/2, j, k}^n \\
 &+ \frac{\Delta t}{\Delta y} (H_z \Big|_{i+1/2, j+1/2, k}^{n+1/2} - H_z \Big|_{i+1/2, j-1/2, k}^{n+1/2}) \\
 &- \frac{\Delta t}{\Delta z} (H_y \Big|_{i+1/2, j, k+1/2}^{n+1/2} - H_y \Big|_{i+1/2, j, k-1/2}^{n+1/2}), \tag{21}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_x \Big|_{i+1/2, j, k}^{n+1} &= \frac{1}{b_0} \left[ (a_0 D_x \Big|_{i+1/2, j, k}^{n+1} + a_1 D_x \Big|_{i+1/2, j, k}^n \right. \\
 &+ a_2 D_x \Big|_{i+1/2, j, k}^{n-1}) / \varepsilon_0 \\
 &\left. - b_1 E_x \Big|_{i+1/2, j, k}^n - b_2 E_x \Big|_{i+1/2, j, k}^{n-1} \right], \tag{22}
 \end{aligned}$$

上式中竖线的右上标表示时间步, 右下标表示空间离散点. 磁感应强度和磁场强度的递推公式有类似的形式, 限于篇幅在此不再给出.

## 5. 数值结果

**例 1** 等离子体 (Drude 模型) 薄层的反射系数. 设等离子体固有频率为  $2\pi \times 28.7 \times 10^9$  rad/s, 碰撞频率为  $2 \times 10^{10}$  Hz, FDTD 空间网格宽度为 1 mm. 等离子体薄板的反射系数随频率的变化情况如图 3 所示, 图中圆圈、三角和星形分别表示等离子体厚度为 0.9, 0.5 和 0.1 mm 的反射系数. 图中实线、

短线和点线分别表示等离子体厚度为 0.9, 0.5 和 0.1 mm 时用解析方法计算的反射系数. 由图可见两种结果符合得很好.

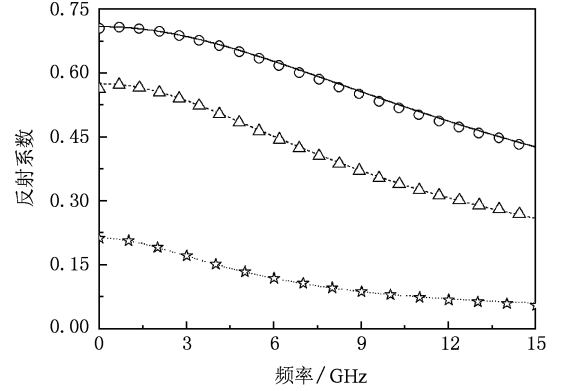


图 3 等离子体薄层的反射系数随频率的变化

**例 2** 金属衬底 Lorentz 介质薄层反射系数. 电磁参数均色散的 Lorentz 介质薄层, 其中磁导率  $\mu(\omega)$  的参数取  $\mu_\infty = 1, \beta_{m,1} = 4 \times 10^{20} (\text{rad/s})^2, \beta_{m,2} = 1.25 \times 10^{21} (\text{rad/s})^2, \omega_{0m,1} = 2 \times 10^{10} \text{ rad/s}, \omega_{0m,2} = 5 \times 10^{10} \text{ rad/s}, \gamma_{m,1} = \gamma_{m,2} = 1, \delta_{m,1} = 5 \times 10^9 \text{ rad/s}, \delta_{m,2} = 4 \times 10^9 \text{ rad/s}$ ; 介电常数  $\varepsilon(\omega)$  的参数为  $\varepsilon_\infty = 2, \beta_{e,1} = 9 \times 10^{20} (\text{rad/s})^2, \gamma_{e,1} = 1, \omega_{0e,1} = 3 \times 10^{10} \text{ rad/s}, \delta_{e,1} = 5 \times 10^8 \text{ rad/s}$ . FDTD 空间网格宽度为 1 mm, 金属衬底 Lorentz 介质薄层反射系数随频率的变化情况如图 4 所示. 图中圆圈、三角和星形分别表示色散介质薄层厚度为 0.1, 0.5 和 0.9 mm 时修正方法计算所得的反射系数. 图中实线、短线和点线分别表示薄层厚度为 0.1, 0.5 和 0.9 mm 时用表面阻抗边界条件方法计算的反射系数. 由图可见两种结果符合得很好.

**例 3** 金属方板涂覆 Lorentz 介质薄层时的后向雷达散射截面 (radar cross section, 简记为 RCS). 金属板边长为 100 mm, 厚度为 5 mm. 板的一侧涂敷有色散介质薄层 (厚度为  $d$ ), 电磁波垂直于金属板面入射 (照射有色散介质涂层的一侧). FDTD 计算中取立方体网格宽度为  $\delta = 5$  mm, 涂敷介质参数取  $\beta_m = 4 \times 10^{20} (\text{rad/s})^2, \omega_m = 2 \times 10^{10} \text{ rad/s}, \delta_m = 5 \times 10^9 \text{ rad/s}, \gamma_m = 1, \mu_\infty = 1, \beta_e = 9 \times 10^{20} (\text{rad/s})^2, \omega_e = 3 \times 10^{10} \text{ rad/s}, \delta_e = 5 \times 10^8 \text{ rad/s}, \gamma_{e,1} = 1, \varepsilon_\infty = 2$ . 图 5 是该金属板涂敷不同厚度介质薄层时的后向 RCS, 图中圆圈和三角分别表示涂层厚度为 2 和 4 mm 时节点修正法的计算结果. 作为比较图中还给

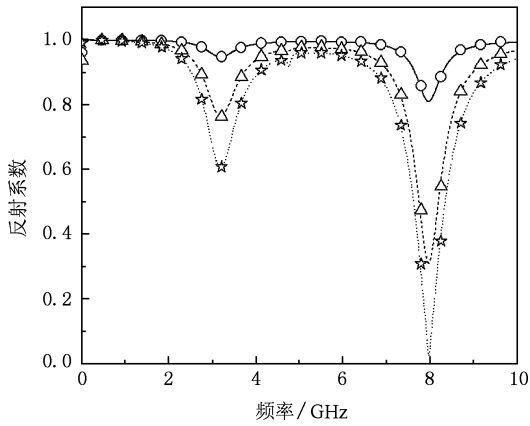


图4 金属衬底 Lorentz 介质薄层反射系数

出了将 FDTD 网格变小(本例中变为 1 mm),使薄层厚度大于元胞空间尺度时的计算结果(在此视为准确结果).图 5 中实线和虚线分别表示色散介质薄层为 2 和 4 mm 时的计算结果,其中 FDTD 网格为 1 mm.由图可见,两种方法的计算结果一致.需要注意的是,在本例中修正算法所需内存仅为精细网格算法的 1/125. FDTD 计算中空间离散网格数目越大完成计算所需时间步越多.由此可见,本文的修正算法在内存消耗和计算时间步上的节省均十分明显.

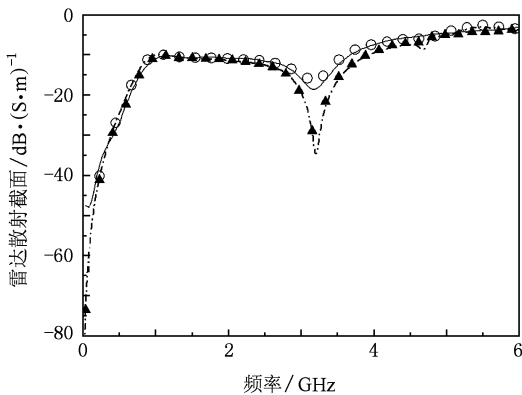


图5 金属方板涂覆 Lorentz 介质薄层时的后向 RCS

**例 4** 色散介质(Debye 模型)薄板的雷达散射截面.正方形色散介质薄板处于真空中,薄板尺寸为  $0.5 \text{ m} \times 0.5 \text{ m} \times d$  ( $d$  为薄板厚度).非磁性介质,  $\mu_r = 1.0, \sigma_m = 0$ , 其复数相对介电常数如(9)式,  $\varepsilon_s = 1.16, \varepsilon_\infty = 1.01, \sigma = 2.95 \times 10^{-4} \text{ S/m}, \tau_0 = 4.497 \times 10^{-10} \text{ s}$ . FDTD 网格为  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 5 \text{ cm}$ , 时间步长  $\Delta t = \Delta z/2c$ , 电磁波垂直于板面入射,

后向接收.图 6(a)和(b)分别为薄层厚度为 4 和 2 cm 时的后向 RCS.图 6 中圆圈是本文方法的计算结果,实线是采用细网格(网格 1 cm,图中用实线表示)时的结果.由图可见,这种情形下两种方法的结果依然相符合.同样采用修正算法可以节约内存消耗和计算时间.

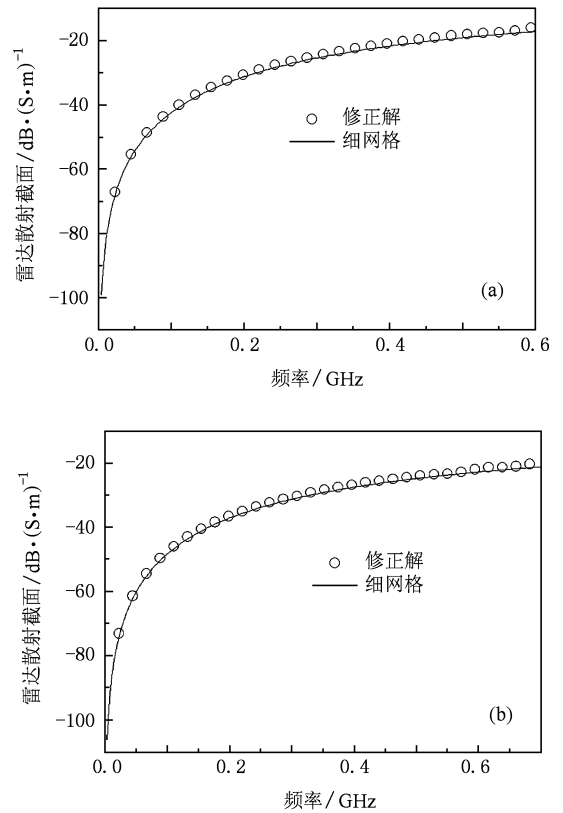


图6 Debye 介质薄板的后向雷达散射截面 (a)薄层厚度 4 cm,(b)薄层厚度 2 cm

## 6. 结 论

本文给出了一种色散介质薄层所在元胞参数加权平均和基于 SO-FDTD 的色散薄层节点修正算法.该算法可以同时处理电色散和磁色散的情形,并且只需一个计算程序就可以处理含三种常见色散介质薄层目标的电磁问题.数值结果表明,本文方法是一种具有良好计算精度和通用性,节省内存和计算时间的算法.本文的理论为含任意色散介质薄层电磁问题的三维 FDTD 计算分析打下了良好的基础.

- [1] Bao J S, Liu X, Qian Z P, Xiang Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 5537 (in Chinese) [鲍峻松、刘 贤、钱祖平、项 阳 2008 物理学报 **57** 5537]
- [2] Zhang Y Q, Ge D B 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4574 (in Chinese) [张玉强、葛德彪 2009 物理学报 **58** 4574]
- [3] Fu J H, Liu X L, Men F Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4070 (in Chinese) [傅佳辉、刘心蕾、孟繁义 2008 物理学报 **57** 4070]
- [4] Fen G Y, Yang H, Zhang D Y, Zhou S H, Zhu Q H 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 5506 (in Chinese) [冯国英、杨 浩、张大勇、周寿桓、朱启华 2008 物理学报 **57** 5506]
- [5] Ding S J, Ge D B, Shen N 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 943 (in Chinese) [丁世敬、葛德彪、申 宁 2010 物理学报 **59** 943]
- [6] Liu H L, Zhang T Y, Zhu S L, Fan W H 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3658 (in Chinese) [刘海亮、张同意、朱少岚、范文慧 2009 物理学报 **58** 3658]
- [7] Chen Z Q, Hu X W, Lan C Z, Liu M H 2009 *Chin. Phys. B* **18** 2412
- [8] Liu D G, Liu S G, Zhou J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6924 (in Chinese) [刘大刚、刘盛纲、周 俊 2007 物理学报 **56** 6924]
- [9] Yang L X, Ge D B, Wei B 2007 *Prog. Electromag. Res.* **76** 275
- [10] Wang M Y, Xu J, Wu J 2008 *Prog. Electromag. Res.* **81** 253
- [11] Yang L X, Ge D B, Wei B 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 4509 (in Chinese) [杨利霞、葛德彪、魏 兵 2007 **56** 4509]
- [12] Mikko K K 2005 *IEEE Trans. Antenn. Propag.* **53** 1174
- [13] Mikko K K 2004 *IEEE Trans. Electromag. Compat.* **46** 222
- [14] Mikko K K 2003 *IEEE Trans. Microwave Theor. Tech. Soc.* **51** 1774
- [15] Giulio A, Antonio O 2007 *IEEE Microwave Wireless Compon. Lett.* **17** 631
- [16] Wei B, Ge D B, Wang F 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6290 (in Chinese) [魏 兵、葛德彪、王 飞 2008 物理学报 **57** 6290]
- [17] Maloney J G, Smith G S 1992 *IEEE Trans. Antenn. Propag.* **40** 323
- [18] James G M, Smith G S 1993 *IEEE Trans. Antenn. Propag.* **41** 690
- [19] Panayiotis A T 1991 *IEEE Trans. Antenn. Propag.* **39** 1338
- [20] Ge D B, Yan Y B 2005 *Finitie-Difference Time-Domain Method for Electromagnetic Waves* (2nd Ed.) (Xi'an: Xidian University Press) (in Chinese) [葛德彪、闫玉波 2005 电磁波时域有限差分方法 (第二版) (西安: 西安电子科技大学出版社)]
- [21] Taflove A 2005 *Advances in Computational Electromagnetics: The FDTD Method* (2nd Ed.) (Norwood: Artech House)
- [22] Wei B, Li X Y, Wang F, Ge D B 2008 *Acta Phys. Sin.* **58** 6174 (in Chinese) [魏 兵、李小勇、王 飞、葛德彪 2008 物理学报 **58** 6174]
- [23] Wang F, Ge D B, Wei B 2008 *Acta Phys. Sin.* **58** 6356 (in Chinese) [王 飞、葛德彪、魏 兵 2008 物理学报 **58** 6356]

# A modificatory algorithm for electrically thin dispersive layers based on shift operator finite-difference time-domain method\*

Wei Bing<sup>†</sup> Dong Yu-Hang Wang Fei Li Cun-Zhi

(Department of Physics, Xi'an University, Xi'an 710071, China)

(Received 8 July 2009; revised manuscript received 14 July 2009)

## Abstract

A novel technique for treating electrically thin dispersive layer with the finite difference time domain (FDTD) method is introduced. The proposed model is based on modifying the node update equations to account for the layer, where the electric and magnetic flux densities are locally averaged in the FDTD grid. Then, based on the characteristics that the complex permittivity and complex permeability of three kinds of general dispersive media model, i. e. Debye model, Lorentz model, and Drude model, may be described by rational polynomial fraction in  $j\omega$ , the shift operator method is then applied to obtain the recursive formulation for  $\mathbf{D}$  and  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  and  $\mathbf{H}$  available for FDTD computation is obtained. The model is validated with several numerical examples. The computed results illustrate the generality, memory and time step economy and the precision of presented scheme.

**Keywords:** thin dispersive layer, modifying of the node, shift operator, finite difference time domain

**PACC:** 4110H, 5170, 5210

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60871071) and the China Postdoctoral Science Foundation (Grant No. 20070421109).

<sup>†</sup> E-mail: bwei@xidian.edu.cn