

彩色数字全息的非插值波面重建算法研究*

李俊昌[†] 樊则宾

(昆明理工大学理学院, 昆明 650093)

(2009 年 6 月 24 日收到; 2009 年 7 月 13 日收到修改稿)

彩色数字全息及多波长照明的数字全息检测研究中, 避免插值误差的可变放大率波面重建是一个重要的研究内容. 由于 Fresnel 衍射积分可以表示成 Fourier 变换及卷积两种形式, 对应地存在两种波面重建算法; 其一, 将重建距离分为两段的衍射“接力”算法; 其二, 用球面波为重建波的卷积算法. 文中对这两种算法进行理论分析及实验研究, 讨论让重建计算满足取样定理的条件. 结果表明, 卷积算法较容易满足取样定理, 能够获得较好的重建物光场.

关键词: 彩色数字全息, 波面重建, 衍射计算

PACC: 4230, 4230V

1. 引 言

随着计算机及电荷耦合器件 (CCD) 探测技术的进步, 用 CCD 代替传统全息感光板的数字全息检测正成为一个研究热点. 在该领域中, 彩色数字全息^[1]及记录飞秒级超快瞬态过程的脉冲数字全息技术^[2]是近年来获得较多关注的内容. 在彩色数字全息检测研究中, 为综合不同色光探测的信息, 如何按照同一放大率高质量地重建物光场是一个基本的研究内容, 并且 Fresnel 衍射积分是人们常用的重建计算工具. 研究 Fresnel 衍射积分可知, 积分可以表示成 Fourier 变换及卷积两种形式^[3], 它们均能使用快速 Fourier 变换 (FFT) 计算^[4]. 当使用 FFT 形式的衍射积分波面重建时, 计算结果的物理尺度是光波长、衍射距离及取样数的函数, 必须采用不同的插值方法来统一重建物光场的尺寸^[5]. 由于插值方法容易引入额外误差, 2004 年 Zhang 等^[6]提出一种不需要插值的可变放大率“DBFT” (the double Fresnel transform algorithm) 重建算法. 该方法将重建距离分为两段进行衍射的接力计算, 从而得到期望的物光场重建尺寸. 最近, 我们基于衍射的角谱理论, 用球面波为重建波, 提出了一种不需要插值的可变放大率波面重建方法^[7,8]. 该方法主要由一次 FFT 及一次快速 Fourier 逆变换 (IFFT) 完成, 以

下简称 DFFT 法. 由于 Fresnel 衍射积分是角谱衍射公式的傍轴近似表达式^[3], DFFT 法也可以使用 Fresnel 衍射积分的卷积算法实现.

由于满足取样定理的计算才是正确的计算, 为便于实际应用, 我们对 DBFT 及 DFFT 算法满足取样定理的条件进行了研究. 结果表明, DBFT 算法只在极特殊的情况下才能满足取样定理. 由于“频谱混叠”效应^[5], 在通常情况下 DBFT 算法重建物光场的质量不高. 反之, DFFT 算法较容易满足取样定理, 能够较好地重建物光场.

本文对上述两种可变放大率重建算法进行简要介绍, 讨论满足取样定理的条件, 给出相应的实验证明.

2. DBFT 重建算法及取样条件讨论

对数字全息检测系统建立直角坐标 $O-xyz$, 令 $z=0$ 平面对应 CCD 平面, $z=d$ 是某观测平面, 到达观测平面的物光复振幅 $U_d(x_d, y_d)$ 可由 Fresnel 衍射近似表出^[3]

$$U(x_d, y_d) = \frac{\exp(ikd)}{i\lambda d} \exp\left[\frac{ik}{2d}(x_d^2 + y_d^2)\right] \times \iint_{-\infty}^{\infty} \left\{ U(x, y) \exp\left[\frac{ik}{2d}(x^2 + y^2)\right] \right\} \times \exp\left[-i2\pi\left(\frac{x_d}{\lambda d}x + \frac{y_d}{\lambda d}y\right)\right] dx dy, \quad (1)$$

* 国家自然科学基金 (批准号: 60977007) 资助的课题.

[†] E-mail: jcli@vip.163.com

其中, $i = \sqrt{-1}$, $k = 2\pi/\lambda$, λ 为光波长.

令 L 为 CCD 面阵宽度, N 为取样数, 当用一次 FFT 对(1)式计算时, 计算结果的物理宽度满足^[4,5]

$$L_d = \lambda dN/L. \quad (2)$$

如果期望得到物理宽度 L_v 的衍射场, 令 $d = d_1 + d_2$, 将距离 d 的衍射分解为经距离 d_1 衍射后再进行距离 d_2 的衍射“接力”计算. 这时, 两次计算得到的物理宽度分别满足

$$L_1 = \lambda Nd_1/L, \quad (3)$$

$$L_v = \lambda Nd_2/L_1, \quad (4)$$

于是得到

$$d_1 = \frac{dL}{L_v + L}. \quad (5)$$

由此可见, 选择不同的重建距离 d_1 和 d_2 , 就能让不同色光的重建物像有相同的尺寸. 这就是 DBFT 算法的基本原理.

然而, 对 Fresnel 衍射积分的一次 FFT 计算的取样研究指出^[4,5], 如果 $L_1 \geq \sqrt{\lambda d_1 N}$, (1)式积分号前方的相位因子的取样满足取样定理; 如果 $L_1 \leq \sqrt{\lambda d_1 N}$, (1)式的积分计算满足取样定理; 如果期望整个表达式的计算满足取样定理, 必须满足 $L_1 = \sqrt{\lambda d_1 N}$. 因此, 只在极特殊的情况下, 第一次衍射计算才能得到满足取样定理的衍射场. 由于第二次衍射计算的正确性取决于第一次计算结果的正确取样, 不满足取样定理的 FFT 计算将产生“频谱混叠”. 因此, 理论上 DBFT 方法通常只能得到具有“频谱混叠”的物光场. 稍后将通过波面重建实例验证这个结论.

3. 球面波为重建波的 DFFT 重建研究

3.1. 重建方法简介

令到达 CCD 的物光复振幅为 $U(x, y)$, $w(x, y)$ 是 CCD 的窗口函数; 参考光是与光轴有微小夹角的平面波为

$$R(x, y) = A_r(x, y) \exp[ik(ax + by)],$$

CCD 探测到的数字全息图为

$$I_H(x, y) = [|U(x, y)|^2 + |R(x, y)|^2 + R^*(x, y)U(x, y) + R(x, y)U^*(x, y)] w(x, y). \quad (6)$$

设重建波为半径 r 的单位振幅球面波

$R_r(x, y) = \exp\left[\frac{ik}{2r}(x^2 + y^2)\right]$, f_x, f_y 为频域坐标, 经重建波照射后的数字全息图频谱可以引入 FFT 符号 $F\{\cdot\}$ 表示为

$$F\{R_r(x, y)I_H(x, y)\} = G_0(f_x, f_y) + G_+(f_x, f_y) + G_-(f_x, f_y). \quad (7)$$

(7)式右边依次为零级衍射光频谱、共轭物光频谱及物光频谱, 其表达式分别为

$$G_0(f_x, f_y) = F\{ [|U(x, y)|^2 + |R(x, y)|^2] w(x, y) R_r(x, y) \}, \quad (7a)$$

$$G_+(f_x, f_y) = F\{ R(x, y)U^*(x, y)w(x, y)R_r(x, y) \}. \quad (7b)$$

$$G_-(f_x, f_y) = F\{ R^*(x, y)U(x, y)w(x, y)R_r(x, y) \}. \quad (7c)$$

适当设计参考光, 可以从(7)式所表述的频谱图中利用选通滤波窗分离出共轭物光频谱^[3], 重建物光场可以用衍射的 Fresnel 近似表示为^[7,8]

$$U_i(x, y) = F^{-1}\left\{ P(f_x, f_y)G_+\left(f_x + \frac{a}{\lambda}, f_y + \frac{b}{\lambda}\right) \times \exp\left\{ikd_i\left[1 - \frac{\lambda^2}{2}(f_x^2 + f_y^2)\right]\right\}\right\}, \quad (8)$$

式中, $F^{-1}\{\cdot\}$ 是 IFFT 符号, $P(f_x, f_y)$ 是选通滤波窗, d_i 为重建距离. 令 d_0 为记录全息图时物平面到 CCD 的距离, 重建场的横向放大率为 M , 相关参数满足以下两式^[5,7]

$$r = \frac{Md_0}{M-1}, \quad d_i = Md_0. \quad (9)$$

应用研究中, 根据需要进行选择放大率 M 后, 利用(9)式求出重建波面半径 r 及重建距离 d_i , 便能利用(8)式进行波面重建. 这就是 Fresnel 衍射近似下的 DFFT 重建算法. 由于 G_- 和 G_+ 等价地包含物光的信息, 也可以选择 G_- 写出等价的重建表达式.

3.2. DFFT 算法的取样条件研究

研究(8)式可知, $G_+\left(f_x + \frac{a}{\lambda}, f_y + \frac{b}{\lambda}\right)$ 与传递函数 $\exp\left\{ikd_i\left[1 - \frac{\lambda^2}{2}(f_x^2 + f_y^2)\right]\right\}$ 之积并不改变 $G_+\left(f_x + \frac{a}{\lambda}, f_y + \frac{b}{\lambda}\right)$ 的频谱宽度. 因此, 只要对 $G_+\left(f_x + \frac{a}{\lambda}, f_y + \frac{b}{\lambda}\right)$ 的取样满足取样定理, (8)式的离散逆 FFT 将满足取样定理. 考察(7b)式中相关各量容易发现, 重建球面波复振幅的空间变化率通

常大于其余各项的空间变化率,如果球面波相位因子 $\exp\left[\frac{ik}{2r}(x^2 + y^2)\right]$ 在 CCD 窗口函数 $w(x, y)$ 所确定范围内的取样满足取样定理, $G_+\left(f_x + \frac{a}{\lambda}, f_y + \frac{b}{\lambda}\right)$ 的离散计算便满足取样定理.

由于 $\exp\left[\frac{ik}{2r}(x^2 + y^2)\right]$ 在 $w(x, y)$ 的边界处具有最大的空间变化率,若满足取样定理,在 $w(x, y)$ 边界区域相位每变化 2π 至少应有两个取样点^[4,5]. 令 CCD 面阵宽度为 L , 则有

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{k}{2r}(x^2 + y^2) \right|_{x=L/2, y=L/2} \left| \frac{L}{N} \right| \leq \pi, \quad (10)$$

求解得

$$N \geq \frac{L^2}{r\lambda}. \quad (11)$$

至此,我们得到了 DFFT 重建时应满足的取样条件.

4. 实验证明

基于 Mach-Zehnder 干涉仪的基本结构,我们在波长为 532 及 632 nm 两种激光照明下进行了实验. 实验中 CCD 面阵像素数为 1024×1360 , 像素宽度 $4.65 \mu\text{m}$, 物体是一个高度约 45 mm 的彩色瓷人头部, 物体到 CCD 的距离 $d_0 = 1320 \text{ mm}$. 实际计算中,我们采用 1024×1024 像素的数字全息图进行波

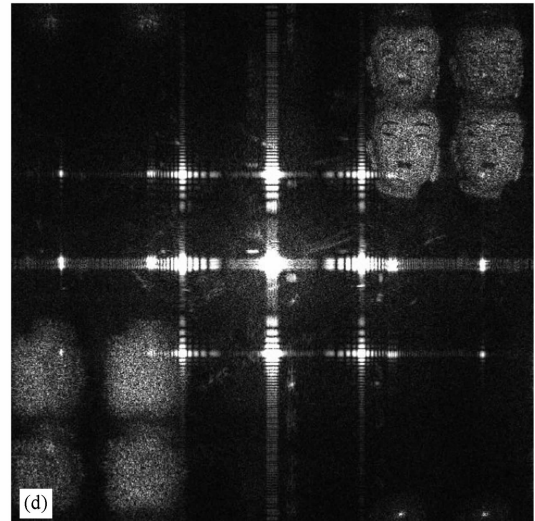
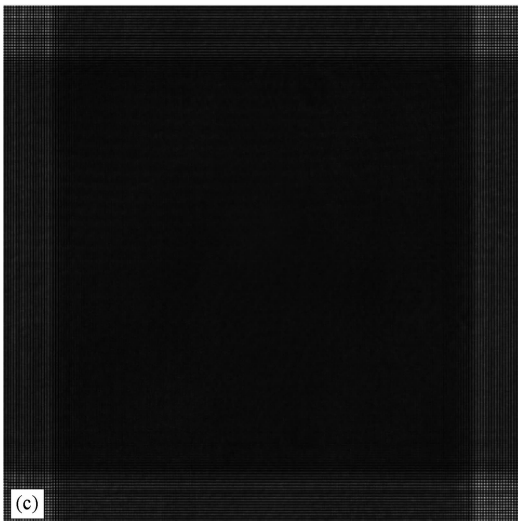
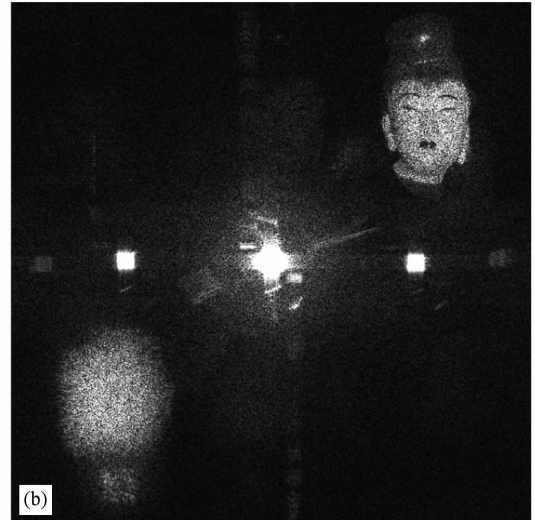
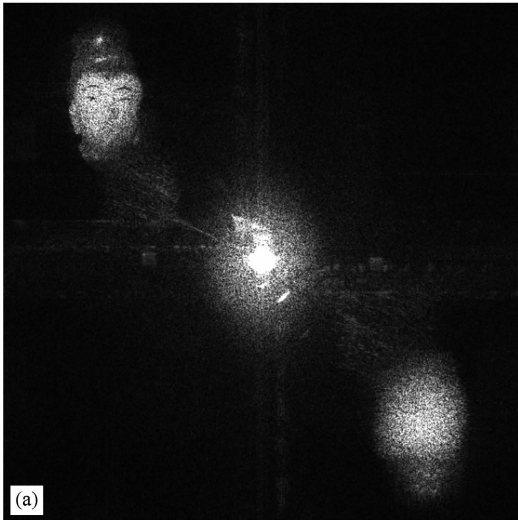


图1 SFFT算法与DBFT算法重建图像的比较(1024×1024 pixels) (a) $\lambda = 633 \text{ nm}$, S-FFT($179.69 \text{ mm} \times 179.69 \text{ mm}$), (b) $\lambda = 532 \text{ nm}$, S-FFT($151.07 \text{ mm} \times 151.07 \text{ mm}$), (c) 中间衍射强度图像($3.90 \text{ mm} \times 3.90 \text{ mm}$), (d) $\lambda = 532 \text{ nm}$, DBFT($179.69 \text{ mm} \times 179.69 \text{ mm}$)

面重建.

为能够较好地分离出数字全息图频谱中物光或共轭物光的频谱,我们通过实验让 G_0 , G_+ 和 G_- 沿频谱面对角线排列,并尽可能地减小零级衍射干扰^[5].

按照一次 FFT 重建物光场的方法(简称 S-FFT 法)^[5],图 1(a) 及图 1(b) 给出直接对 CCD 探测的数字全息图进行距离 d_0 的衍射计算得到的两种色光重建图像.可以看出,对于同一物体,两图像尺寸不一致.根据 1024 取样点求得 CCD 面阵宽度 $L = 4.76$ mm.按照(2)式, $\lambda = 633$ nm 的红光重建平面的宽度是 179.69 mm,而 $\lambda = 532$ nm 的绿光重建平面宽度是 151.07 mm.因此,在绿光重建平面上物体有较大的相对尺寸.

为考察 DBFT 方法的可行性,令 $L_r = 179.69$ mm 为绿色光重建平面的预期宽度,以便与

红色光一次 FFT 重建的宽度一致.由(5)式求得 $d_1 = 34.07$ mm,即 $d_2 = d_0 - d_1 = 1285.93$ mm.图 1(c) 是经第一次衍射计算得到的衍射场强度图像,图 1(d) 是再经距离 d_2 衍射计算获得的重建图像.可以看出, DBFT 法的确能够得到与图 1(a) 尺寸相匹配的物像,然而,由于 $\sqrt{\lambda d_1 N} = 4.31$ mm $\neq L$,存在频谱混叠效应,重建图像上有强烈的重影干扰.

选择重建放大率 $M = 0.08$,即让重建像的高度约 3.6 mm,这样重建物体的像将能较好地容纳于 $L = 4.76$ mm 为宽度的重建平面内.根据(9)式求得 $r = -114.8$ mm 及 $d_i = 105.6$ mm.容易验证,两种色光均满足(11)式规定的取样条件.图 2(a) 及图 2(b) 分别给出两种色光照明下利用 DFFT 算法重建的结果.不难看出,无论对于红光或绿光,能够得到尺寸相同的重建像.这为合成真彩色图像或综合多种色光检测的信息提供了方便.

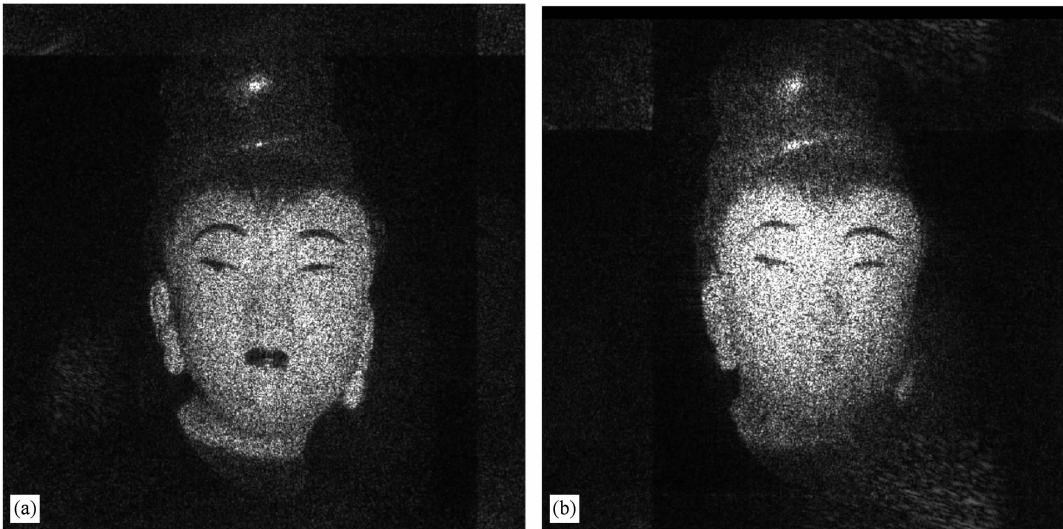


图 2 放大率 $M = 0.08$ 的 DFFT 算法重建的两种色光的物光场强度图像 1024×1024 pixels (4.76 mm \times 4.76 mm). (a) $\lambda = 532$ nm, (b) $\lambda = 632.8$ nm

5. 结 论

本文基于取样定理,对数字全息研究领域中能避免插值误差的两种可变放大率波面重建算法进

行了理论研究,指出通过衍射“接力”的 DBFT 算法存在的问题,导出了球面波卷积重建计算算法 DFFT 满足取样定理的条件,并且,通过实验证明了所得的结论.研究结果为真彩色数字全息及多波长照明的数字全息检测研究提供了有益的参考.

[1] Zhao J L, Jiang H H, Di J L 2008 *Opt. Express* **16** 2514

[2] Wang X L, Zhang N, Zhao Y B, Li Z L, Zhai H C, Zhu X N

2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 354 (in Chinese) [王晓雷、张楠、赵友博、李智磊、翟宏琛、朱晓农 2008 物理学报 **57** 354]

- [3] Goodman J W 2006 *An Introduction to Fourier Optics* (3rd Ed.) (Roberts and Company Publishers. Inc.) 衡、李俊昌 2009 全息干涉计量——原理和方法 (北京: 科学出版社) 第 525, 630 页]
- [4] David M, Javier G, Carlos F, Luis M B, Francisco M 1999 *Opt. Commun.* **164** 233 [6] Zhang F, Yamaguchi I 2004 *Opt. Lett.* **29** 1668
- [5] Xiong B H, Li J C 2009 *Holography Interferometry — Principles and Methods* (Beijing: Science Press) P630 [熊秉 [7] Li J C, Patrice T, Peng Z J, Pascal P 2009 *Opt. Lett.* **34** 572
- [8] Pascal P, Patrice T, Denis M, Peng J C, Li J C 2009 *Opt. Express* **17** 9145

Algorithm of the non-interpolation wave-front reconstruction of the color digital holography *

Li Jun-Chang[†] Fan Ze-Bin

(School of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, China)

(Received 24 June 2009; revised manuscript received 13 July 2009)

Abstract

In the research of the color digital holography and digital holography measurement with multi-wavelength illumination, how to avoid the interpolation error in the wave-front reconstruction with variable magnification is an important subject to be studied. Since the Fresnel diffraction integral can be expressed as Fourier transformation as well as convolution form, there are two reconstruction approaches, one is the relay algorithm which divides the reconstruction distance into two parts, the other is the convolution algorithm which uses the spherical wave as reconstruction wave. In this paper, the two algorithms are theoretically analyzed and experimentally studied, and the condition satisfying the sampling theorem for the reconstruction calculation is discussed. The results show that the convolution approach satisfies the sampling theorem more readily, while higher quality reconstructed object wave field can be obtained with the convolution approach.

Keywords: color digital holography, wave-front reconstruction, diffraction calculation

PACC: 4230, 4230V

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60977007).

[†] E-mail: jeli@vip.163.com