

复宗量 Laguerre-Gauss 光束在强非局域 非线性介质中的传输*

陈利霞 陆大全[†] 胡 巍 杨振军 曹伟文 郑 睿 郭 旗

(华南师范大学光子信息技术广东省高校重点实验室, 广州 510006)

(2009 年 6 月 4 日收到; 2009 年 7 月 13 日收到修改稿)

研究得到了偏离束腰入射的复宗量 Laguerre-Gauss 光束在强非局域非线性介质中传输的解析表达式, 并且得到了其二阶矩束宽的解析解. 通过例子研究了偏离束腰入射的复宗量 Laguerre-Gauss 光束在强非局域非线性介质中传输性质. 结果表明: 非 $(0, m)$ 模的复宗量 Laguerre-Gauss 光束的光束形状随着传输而发生改变, 并以 $\Delta z = \pi z_c$ 为周期做周期性演化. 而 $(0, m)$ 模复宗量 Laguerre-Gauss 光束在演化过程中则形状保持不变, 仅改变光束宽度; 不论功率多大, 在偏离束腰入射条件下总是表现为呼吸子; 只有当其为束腰入射, 并且入射功率等于临界功率时才能形成孤子.

关键词: 强非局域非线性, 复宗量 Laguerre-Gauss 光束, 二阶矩束宽, 空间光孤子

PACC: 4265S, 4270D

1. 引 言

光束在非线性介质中传输时, 若介质对光场的非线性响应不仅与该点的光场有关, 而且与空间其他点处的光场有关, 则称此介质为空间非局域非线性介质. 非线性响应的空间范围越大, 介质的非局域性就越强. 根据光束束宽与介质非线性响应函数特征长度的相对大小, 可将非线性介质分为局域、弱非局域、一般性非局域和强非局域四大类^[1]. 近年来, 光束在强非局域非线性介质中的传输得到了广泛的关注. 1997 年, Snyder 和 Mitchell^[2] 在强非局域条件下对非线性 Schrödinger 方程进行了线性化, 得到了著名的 Snyder-Mitchell 模型

$$2ik\partial_z\Phi + (\partial_{xx} + \partial_{yy})\Phi - k^2\gamma^2P_0r^2\Phi = 0, \quad (1)$$

其中 γ 为材料常数. Snyder-Mitchell 模型的提出, 极大地简化了强非局域非线性介质中的光传输问题, 进而掀起了研究空间光孤子的热潮^[3-19]. 最近十余年里, 在理论上已经得到了环型孤子^[4]、多极孤

子^[3]、旋转孤子^[5]等多种孤子解; 实验上, 在液晶和铅玻璃等强非局域介质中观察到了多种孤子结构及其相互作用^[6-10].

过去十余年对强非局域非线性介质中光束传输问题的研究, 基本都局限于孤子和呼吸子问题, 即传输过程中形状保持不变光束的传输问题. 对于孤子和呼吸子问题, 分离变量法^[10-15] 和变分法^[16-19] 是常用和行之有效的数学处理方法, 但不适用于处理形状变化的光束的传输问题. 因此很少涉及传输过程中形状变化的光束在强非局域非线性介质中传输的研究.

本文研究了一类形状随传输而改变的光束在强非局域非线性介质中的传输. 我们从光束在自由空间传输和在强非局域非线性介质中传输的对应关系出发, 得到了柱坐标下强非局域非线性介质中偏离束腰入射的复宗量 Laguerre-Gauss 光束解, 分析了偏离束腰入射的高阶模复宗量 Laguerre-Gauss 光束的形状以及束宽的演化, 得到了强非局域非线性介质中复宗量 Laguerre-Gauss 光束的传输规律.

* 国家自然科学基金 (批准号: 10804033, 10674050)、教育部高等学校博士学科点专项科研基金 (批准号: 20080574002) 和广东省高校创新团队项目 (批准号: 06CXTD005) 资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: ludq@senu.edu.cn

2. 强非局域非线性介质中的复宗量 Laguerre-Gauss 光束解

为了不失一般性,我们考虑从自由空间偏离束腰入射的复宗量 Laguerre-Gauss 光束在强非局域非线性介质中的演化. 设入射面在 $z = 0$ 处,复宗量 Laguerre-Gauss 光束的束腰位于 $z = z_s$ 处, $z_s > 0$ 表示复宗量 Laguerre-Gauss 光束从束腰前入射; $z_s = 0$ 表示复宗量 Laguerre-Gauss 光束从束腰位置入射; $z_s < 0$ 表示复宗量 Laguerre-Gauss 光束从束腰后入射.

在自由空间中,复宗量 Laguerre-Gauss 光束^[20,21]可表示为

$$\begin{aligned} \Psi_{nm}(r, \phi, z) = & A_{nm} (-1)^n n! \left(\frac{r}{w_0} \right)^m \\ & \times \left[\frac{z_R}{z_R - i(z - z_s)} \right]^{n+m+1} \\ & \times L_n^m \left[\frac{z_R}{z_R - i(z - z_s)} \frac{r^2}{w_0^2} \right] \\ & \times \exp \left[\frac{z_R}{z_R - i(z - z_s)} \frac{r^2}{w_0^2} + im\phi \right], \quad (2) \end{aligned}$$

当然,也可表述为另一种形式

$$\begin{aligned} \Psi_{nm}^{e,0}(r, \phi, z) = & A_{nm} (-1)^n n! \left(\frac{r}{w_0} \right)^m \\ & \times \left[\frac{z_R}{z_R - i(z - z_s)} \right]^{n+m+1} \\ & \times L_n^m \left[\frac{z_R}{z_R - i(z - z_s)} \frac{r^2}{w_0^2} \right] \\ & \times \exp \left[\frac{z_R}{z_R - i(z - z_s)} \frac{r^2}{w_0^2} \right] \\ & \times \begin{cases} \cos(m\phi) \\ \sin(m\phi) \end{cases}. \quad (3) \end{aligned}$$

在(2)式和(3)式中, A_{nm} 为与功率相关的归一化系数,由 $P_0 = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} |\Psi_{nm}(r, \phi, z)|^2 r dr d\phi$ 决定, $z_R = \frac{1}{2} k w_0^2$ 为 Rayleigh 距离, k 为波数, L_{nm} 代表 (n, m) 阶的 Laguerre 多项式. 实际上,任意同阶的(2)和(3)式的线性组合都可以称之为复宗量 Laguerre-Gauss 光束. 在本文中仅取(2)式所表示的复宗量 Laguerre-Gauss 光束作为研究对象,其他形式的相关规律可依此类推.

直接求解(1)式得到强非局域非线性介质中复宗量 Laguerre-Gauss 光束的解在数学处理上非常复

杂. 在这里基于之前的工作,用另一种办法来得到其解析解. 文献[22]从描述光束在自由空间的衍射方程和描述光束在强非局域非线性介质中传输的非线性 Schrödinger 方程出发,得到了光束在自由空间中传输和在强非局域非线性介质中传输的对应关系^[22]为

$$\Phi(r, z) = F_1 F_2 \times \Psi(F_1 r, F_3), \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} F_1(z) &= (-1)^\alpha \left[1 + \tan^2 \left(\frac{z}{z_c} \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \\ F_2(z) &= \exp \left\{ - \frac{ik F_1(z)^2 r^2}{2z_c \left[\tan \left(\frac{z}{z_c} \right) + 1/\tan \left(\frac{z}{z_c} \right) \right]} \right\}, \\ F_3(z) &= z_c \tan \left(\frac{z}{z_c} \right), \\ \alpha(z) &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{z}{z_c} - \arctan \left[\tan \left(\frac{z}{z_c} \right) \right] \right\}, \\ z_c &= (\gamma^2 P_0)^{-\frac{1}{2}}. \quad (5) \end{aligned}$$

Ψ 和 Φ 分别代表光束在自由空间和强非局域非线性介质中的场分布, z_c 并不是一个常数,是随着入射功率变化的. 将(2)和(5)式代入(4)式,可以得到偏离束腰入射的复宗量 Laguerre-Gauss 光束在强非局域非线性介质中场的演化:

$$\begin{aligned} \Phi_{nm}(r, \phi, z) = & A_{nm} (-1)^{n+\alpha(m+1)} n! G(z)^{n+m+1} \\ & \times \left[1 + \tan^2 \left(\frac{z}{z_c} \right) \right]^{n+m+1} \\ & \times \left(\frac{r}{w_0} \right)^m L_n^m \left[C(z) \frac{r^2}{w_0^2} \right] \\ & \times \exp \left[- C(z) \frac{r^2}{w_0^2} - ik F(z) r^2 + im\phi \right], \quad (6) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{z_R}{z_R - i \left[z_c \tan \left(\frac{z}{z_c} \right) - z_s \right]}, \\ C(z) &= \frac{z_R \left[1 + \tan^2 \left(\frac{z}{z_c} \right) \right]}{z_R - i \left[z_c \tan \left(\frac{z}{z_c} \right) - z_s \right]}, \\ F(z) &= \frac{1 + \tan^2 \left(\frac{z}{z_c} \right)}{2z_c \left[\tan \left(\frac{z}{z_c} \right) + 1/\tan \left(\frac{z}{z_c} \right) \right]}. \quad (7) \end{aligned}$$

下面基于(6)式,对复宗量 Laguerre-Gauss 光束

在强非局域非线性介质中的传输性质进行详细的研究.

3. 强非局域非线性介质中复宗量 Laguerre-Gauss 光束形状的演化

在自由空间中, (n, m) 模复宗量 Laguerre-Gauss 光束, 当 $n = 0, m = 0, 1, 2, \dots$ 时, $(0, m)$ 模复宗量 Laguerre-Gauss 光束在传输过程中形状保持不变; 而当 $n \neq 0, m = 0, 1, 2, \dots$ 时, (n, m) 模复宗量 Laguerre-Gauss 光束在传输过程中形状会发生变化. 可以预计, 在强非局域非线性介质中也有相应的演化规律. 为讨论方便, 将强非局域非线性介质中的复宗量 Laguerre-Gauss 光束分成两类, 通过例子分别进行讨论.

3.1. $n \neq 0$ 时, (n, m) 模复宗量 Laguerre-Gauss 光束在强非局域非线性介质中的演化

图 1 表示不同功率入射时, 强非局域非线性介质中 $(2, 0)$ 模复宗量 Laguerre-Gauss 光束正交于传输轴截面 x 方向上的强度分布, 其中光束中心点位于传输轴线上. 从图 1 可以看出, 光束形状的演化有如下规律.

1) $n \neq 0$ 时, 与其自由传输相类似, 复宗量 Laguerre-Gauss 光束在强非局域非线性介质中传输

时形状也是不断变化的. 但与自由传输不同的是, 在强非局域非线性介质中, 复宗量 Laguerre-Gauss 光束以 $\Delta z = \pi z_c$ 做周期性演化.

2) 在入射位置相同的情况下, 入射功率越大, 复宗量 Laguerre-Gauss 光束的压缩效应就越明显. 这是因为, 入射功率越大, 材料非线性效应所产生的非线性折射率梯度就越大, 光束自陷越明显.

3) 一个周期内, 入射功率不同, 对应图样出现的位置也不同. 在 $z/z_c = 0$ 到 $z/z_c = 0.5\pi$ 的传输过程中, 对于同一光束图样, 入射功率越小, 图样出现得越快, 入射功率越大, 图样出现得越慢; 而在 $z/z_c = 0.5\pi$ 到 $z/z_c = \pi$ 的传输过程中, 同一图样出现的快慢与之相反. 以 $P_0 = P_c$ 时强非局域非线性介质中的复宗量 Laguerre-Gauss 光束图样演化作为参考, 可以看到, 在 $z/z_c = 0$ 到 $z/z_c = 0.5\pi$ 的传输过程中, $P_0 = P_c$ 时, 图样出现的位置分别为 $z/z_c = 0.25\pi, 0.31\pi, 0.38\pi$; 而当 $P_0 < P_c$ 时, 与 $P_0 = P_c$ 对应的图样出现在 $z/z_c = 0.20\pi, 0.26\pi, 0.33\pi$ 的位置, 与 $P_0 = P_c$ 相比, 对应图样出现得较快; 而当 $P_0 > P_c$ 时, 与 $P_0 = P_c$ 对应的图样出现在 $z/z_c = 0.31\pi, 0.36\pi, 0.41\pi$ 的位置, 与 $P_0 = P_c$ 相比, 对应图样出现得较慢. 从 0.5π 到 π 的传输与从 0 到 0.5π 的传输图样出现的快慢恰好相反. 因为光束在强非局域非线性介质中从 0 到 0.5π 的传输相当于在自由空间从初始位置到无穷远处的传输; 而从 0.5π 到 π 的传输相当于光束在自由空间从无穷远处传回初始位置^[23].

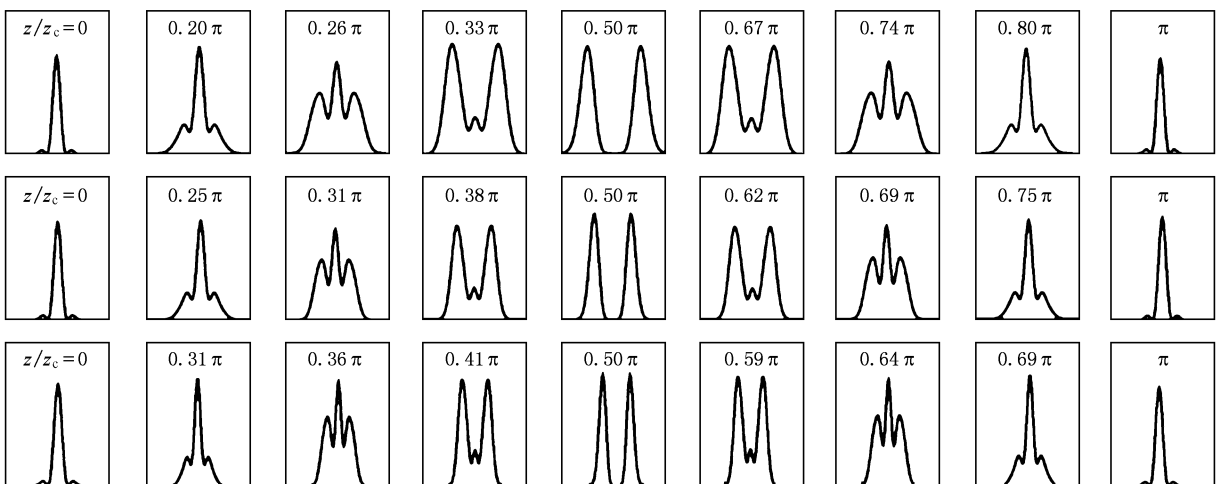


图 1 $n = 2, m = 0, z_s = 0$, 不同功率入射时, 强非局域非线性介质中复宗量 Laguerre-Gauss 光束正交于传输轴上的光强分布 $P_0 = 0.5P_c$. (上排); $P_0 = P_c$ (中排); $P_0 = 2P_c$ (下排); $z_c = 1/\sqrt{P_0\gamma}$, $P_c = 1/k^2\gamma^2u_0^4$

4) 无论入射功率多大, 在相同的位置 $\Delta z = 0.5\pi z_c$ 处, 光束形状是一样的, 都呈现双峰结构. 原

因是, 在强非局域非线性介质中, 复宗量 Laguerre-Gauss 光束从 0 传输到 0.5π 相当于初始场做了一

次 Fourier 变换^[23].

图 2 表示入射位置不同时, 一个周期内 (4, 2) 模复宗量 Laguerre-Gauss 光束在强非局域非线性介质中的传输演化. 从图中可以看到一个有趣的现

象: 对于非束腰入射 $z_s = \pm 0.5z_R$ 的情况, 从 $z_s = -0.5z_R$ 处入射的演化相当于从 $z_s = 0.5z_R$ 处入射的逆演化. 实际上, 对于其他入射位置对称的情况, 也有这样的规律.

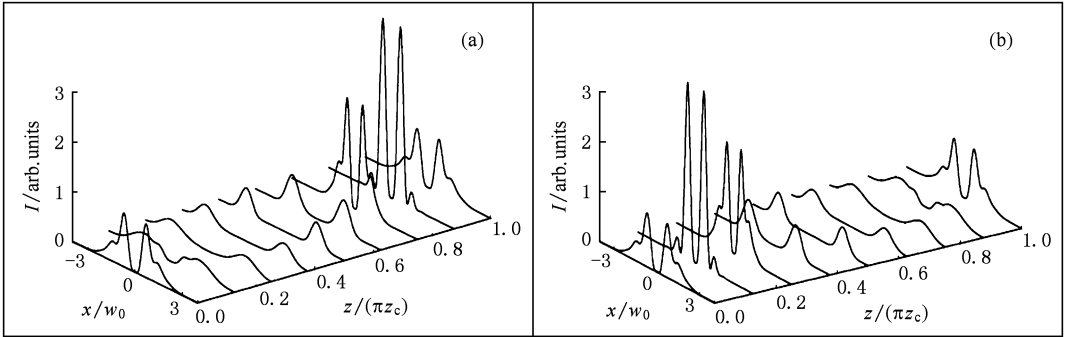


图 2 $n = 4, m = 2, P_0 = P_c$ 时, 强非局域非线性介质中偏离束腰入射的复宗量 Laguerre-Gauss 光束沿传输轴方向的演化 (a) $z_s = -0.5z_R$, (b) $z_s = 0.5z_R$

3.2. $n = 0$ 时, (n, m) 模复宗量 Laguerre-Gauss 光束在强非局域非线性介质中的演化

当 $n = 0$ 时, 由方程 (6) 表征的强非局域非线性介质中传输的偏离束腰入射的复宗量 Laguerre-Gauss 光束退化为强非局域非线性介质中传输的 $(0, m)$ 模标准 Laguerre-Gauss 呼吸子:

$$\begin{aligned} \Phi_{0m}(r, \phi, z) &= A_{0m} \frac{w_0}{w(z)} \left[\frac{(-1)^{\alpha(m+1)} r}{w(z)} \right]^m \\ &\times \exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z)}\right) \\ &\times \exp\left[\frac{ikr^2}{2R} - i\psi(z) + im\phi\right], \end{aligned} \quad (8)$$

其中

$$w(z) = \frac{w_0 \left\{ 1 + \left[\frac{z_c}{z_R} \tan\left(\frac{z}{z_c}\right) - \frac{z_s}{z_R} \right]^2 \right\}^{1/2}}{\left[1 + \tan^2\left(\frac{z}{z_c}\right) \right]^{1/2}}, \quad (9)$$

$$R(z) = \frac{1}{1 + \tan^2\left(\frac{z}{z_c}\right)} \frac{1}{\left[z_c \tan\left(\frac{z}{z_c}\right) - z_s \right] \left\{ 1 + 1 / \left[\frac{z_c}{z_R} \tan\left(\frac{z}{z_c}\right) - \frac{z_s}{z_R} \right]^2 \right\}} - \frac{1}{z_c \tan\left(\frac{z}{z_c}\right) \left[1 + 1 / \tan^2\left(\frac{z}{z_c}\right) \right]}, \quad (10)$$

$$\psi(z) = (m + 1) \left\{ \alpha\pi + \arctan\left[\frac{z_c}{z_R} \tan\left(\frac{z}{z_c}\right) - \frac{z_s}{z_R} \right] \right\}. \quad (11)$$

由 (8) 式知, 对于非束腰入射, 无论是束腰前入射还是束腰后入射, 也不管功率是多大, $(0, m)$ 模复宗量 Laguerre-Gauss 光束在强非局域非线性介质中都表现为呼吸子, 并且周期为 $\Delta z = \pi z_c$, 如图 3 所示. 而当 $(0, m)$ 模复宗量 Laguerre-Gauss 光束从束腰位置入射至强非局域非线性介质中, 并且 $P_0 = P_c$ 时, 方程 (8) 进一步简化为 $(0, m)$ 模标准 Laguerre-Gauss 光束孤子解^[4]:

$$\begin{aligned} \Phi_{0m}(r, \phi, z) &= A_{0m} (-1)^{\alpha(m+1)} \left(\frac{r}{w_0}\right)^m \exp\left\{-\frac{r^2}{w_0^2}\right. \\ &\left. + i\left[m\phi + (m + 1) \frac{z}{z_c}\right]\right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

由图 (4) 可以看出, 当 $n = 0, P_0 = P_c$ 时, 束腰入射的各阶复宗量 Laguerre-Gauss 光束在传输过程中均保持不变, 形成孤子. 不同的是, 随着阶次 m 的增大, 光束中心暗区也随之增大.

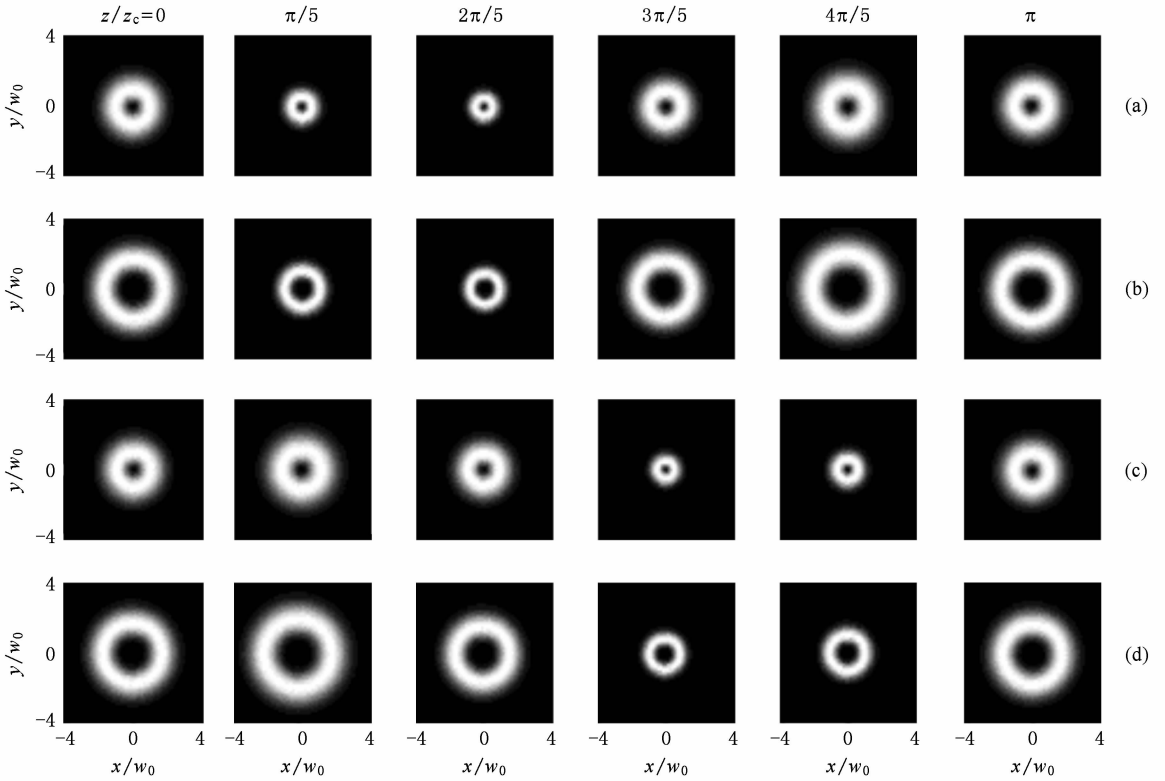


图3 $n=0, P_0 = P_c$, 不同位置入射的复宗量 Laguerre-Gauss 光束在强非局域非线性介质中的演化 (a) $m=1, z_s = z_R$; (b) $m=3, z_s = z_R$; (c) $m=1, z_s = -z_R$; (d) $m=3, z_s = -z_R$

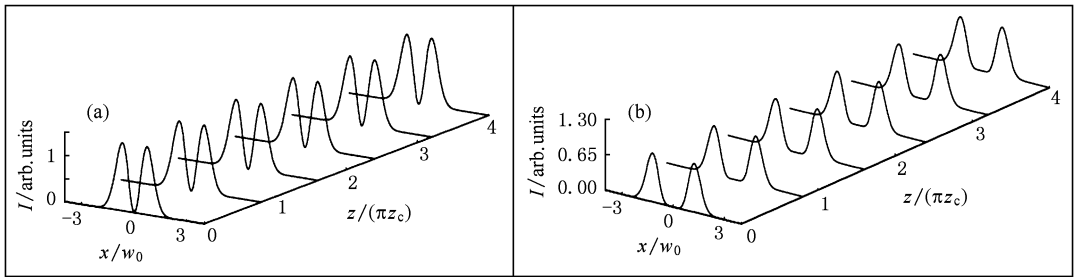


图4 $n=0, P_0 = P_c, z_s = 0$ 束腰入射的复宗量 Laguerre-Gauss 光束在强非局域非线性介质中沿传输轴方向的演化 (a) $m=1$, (b) $m=3$

4. 偏离束腰入射的复宗量 Laguerre-Gauss 光束束宽的演化

研究光束在介质中的传输, 束宽是一个重要的参数. 对于传输过程中形状不变的 $(0, m)$ 模复宗量 Laguerre-Gauss 光束, 无论是束腰入射还是非束腰入射, 都可以根据方程(9)得到二阶矩束宽:

$$W_{0m}^2(z) = \frac{(m+1)w_0^2 \left(1 + \left[\frac{z_c}{z_R} \tan\left(\frac{z}{z_c}\right) - \frac{z_s}{z_R} \right]^2 \right)}{1 + \tan^2\left(\frac{z}{z_c}\right)}. \quad (13)$$

而对于非 $(0, m)$ 模的复宗量 Laguerre-Gauss 光束, 因为传输过程中光束形状会发生改变, 很难直接通过方程(6)得到束宽演化的解析表达式. 因为在强非局域条件下, 传输方程可简化为线性化 Snyder-Mitchell 模型^[2], 因此我们可以将传输过程

看做是一个线性的光学系统,再借鉴 ABCD 光学系统的光束宽度演化规律来研究非(0, m)模的复宗量 Laguerre-Gauss 光束在强非局域非线性介质中的束宽演化.

光束在 ABCD 光学系统中的传输可以用 Collins 公式^[24]来描述. 当 Collins 公式中的变换矩阵为 $A_1 = 1, B_1 = L, C_1 = 0, D_1 = 1$ 时, Collins 公式简化为 Fresnel 衍射积分公式,用于处理近轴标量光束在自由空间中的传输问题. 当变换矩阵变为^[24,25]

$$\begin{aligned} A_2 &= \cos\tau z, \\ B_2 &= \frac{1}{\tau} \sin\tau z, \\ C_2 &= -\tau \sin\tau z, \\ D_2 &= \cos\tau z, \\ \tau &= \sqrt{P_0} \gamma. \end{aligned} \tag{14}$$

Collins 公式则演化为分数 Fourier 变换. 因为光束在强非局域非线性介质中的传输可以看作是自诱导的分数 Fourier 变换^[23], 因此强非局域非线性介质也可以看作是一个 ABCD 光学系统, 其矩阵元分别对应(14)式中的 A_2, B_2, C_2, D_2 .

偏离束腰入射的复宗量 Laguerre-Gauss 光束在强非局域非线性介质中的传输可以看做是光束从束腰位置开始, 先后经过两个 ABCD 光学系统, 如图 5 所示.

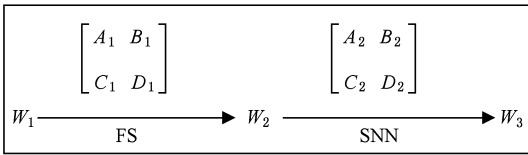


图 5 偏离束腰入射的复宗量 Laguerre-Gauss 光束在强非局域非线性介质中传输的等价传输系统 FS 代表自由空间; SNN 代表强非局域非线性介质; W_1 为束腰面 1 处的二阶矩束宽; W_2 为强非局域非线性介质入射面 2 处的二阶矩束宽; W_3 为偏离束腰入射的复宗量 Laguerre-Gauss 光束在强非局域非线性介质中传输时的二阶矩束宽

ABCD 光学系统中束宽的演化可表示为^[26]

$$W_2^2 = A^2 W_1^2 + 2ABV_1 + B^2 U_1, \tag{15}$$

其中

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{P_0} \left(\frac{\lambda}{\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right|^2 dx, \\ V_1 &= \frac{4}{P_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x \left| \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \right|^2 \psi^2(x) dx. \end{aligned} \tag{16}$$

$u(x), \psi(x), \varphi(x)$ 分别代表光束的初始场分布、振

幅和相位, W_1 表示初始二阶矩束宽, 对于束腰入射有 $V_1 = 0$.

先求束腰处的二阶矩束宽. 复宗量 Laguerre-Gauss 光束在束腰面 1 处的场分布为

$$\begin{aligned} \Psi_{nm}(r, \phi, 0) &= A_{nm} (-1)^n n! \left(\frac{r}{w_0} \right)^m L_n^m \left(\frac{r^2}{w_0^2} \right) \\ &\times \exp \left(-\frac{r^2}{w_0^2} + im\phi \right). \end{aligned} \tag{17}$$

利用 Laguerre 多项式的变换公式:

$$L_n^m(\rho) = \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{n+m}{n-p} \frac{\rho^p}{p!},$$

将方程(17)化为

$$\begin{aligned} \Psi_{nm}(r, \phi, 0) &= A_{nm} (-1)^n n! \left(\frac{r}{w_0} \right)^m \\ &\times \exp \left(-\frac{r^2}{w_0^2} + im\phi \right) \\ &\times \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^p}{w_0^{2p} p!} \binom{n+m}{n-p} r^{2p}, \end{aligned} \tag{18}$$

光强为

$$\begin{aligned} I &= |\Psi_{nm}(r, \phi, 0)|^2 \\ &= A_{nm}^2 (n!)^2 \left(\frac{r}{w_0} \right)^{2m} \exp \left(-\frac{2r^2}{w_0^2} \right) \\ &\times \left\{ \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^p}{w_0^{2p} p!} \binom{n+m}{n-p} r^{2p} \right\}^2. \end{aligned} \tag{19}$$

令 $a_p = (-1)^p \binom{n+m}{n-p} / w_0^{2p} p!$, 并利用公式

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)^n &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad c_0 = a_0^n, \\ c_m &= \frac{1}{m a_0} \sum_{k=1}^m (kn - m + k) a_k c_{m-k} \\ &\quad (m \geq 1, n \in N), \end{aligned}$$

得到功率:

$$\begin{aligned} P_0 &= A_{nm}^2 (n!)^2 w_0 \sum_{p=0}^n c_p 2^{-(m+p+\frac{3}{2})} \\ &\times w_0^{2p} \Gamma \left(m + p + \frac{3}{2} \right), \end{aligned}$$

其中 $\Gamma(x)$ 为 Gamma 函数. 则束腰面 1 处的二阶矩束宽 W_1^2 为

$$W_1^2 = \frac{2w_0^2 \sum_{p=0}^n c_p 2^{-p} w_0^{2p} \Gamma \left(m + p + \frac{3}{2} \right)}{\sum_{p=0}^n c_p 2^{-p} w_0^{2p} \Gamma \left(m + p + \frac{1}{2} \right)}, \tag{20}$$

其中利用了积分公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^m \exp(-\beta x^n) dx = \frac{\Gamma(\gamma)}{n\beta^\gamma} \left(\gamma = \frac{m+1}{n} \right).$$

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k},$$

将(18)式代入方程(16), 并利用公式

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

可以得到复宗量 Laguerre-Gauss 光束在束腰面 1 处的 U_1 :

$$U_1 = \frac{2w_0^2 \sum_{p=0}^n w_0^{2p} 2^{-p} \left[c_p \Gamma\left(m+p+\frac{3}{2}\right) - 2d_p \Gamma\left(m+p+\frac{1}{2}\right) + e_p \Gamma\left(m+p-\frac{1}{2}\right) \right]}{z_R^2 \sum_{p=0}^n w_0^{2p} 2^{-p} c_p \Gamma\left(m+p+\frac{1}{2}\right)}, \quad (21)$$

将计算得到的束腰面 1 处对应的二阶矩束宽 W_1^2 , $U_1, V_1 = 0$ 以及自由空间传输对应的 ABCD 矩阵 $A_1 = 1, B_1 = -z_s, C_1 = 0, D_1 = 1$ 代入方程(15), 可以得到强非局域非线性介质的入射面 2 处的二阶矩束宽 W_2^2 为

$$W_2^2 = W_1^2 + z_s^2 U_1, \quad (22)$$

V_2, U_2 分别为^[26]

$$V_2 = A_1 C_1 W_1^2 + (A_1 D_1 + B_1 C_1) V_1 + B_1 D_1 U_1 = -z_s U_1, \quad (23)$$

$$U_2 = C_1^2 W_1^2 + 2D_1 C_1 V_1 + D_1^2 U_1 = U_1. \quad (24)$$

将方程(20)–(24)以及方程(14)再次代入方程(15), 可以得到偏离束腰入射的非(0, m)模复宗量 Laguerre-Gauss 光束在强非局域非线性介质中传输时的二阶矩束宽 W_3^2 为

$$W_3^2 = A_2^2 W_2^2 + 2A_2 B_2 V_2 + B_2^2 U_2 = \cos^2 \tau z \frac{\sum_{p=0}^n c_p 2^{1-p} w_0^{2(p+1)} \Gamma\left(m+p+\frac{3}{2}\right)}{\sum_{p=0}^n c_p 2^{-p} w_0^{2p} \Gamma\left(m+p+\frac{1}{2}\right)} + \left(-z_s \cos \tau z + \frac{\sin \tau z}{\tau}\right)^2 \times \frac{\sum_{p=0}^n 2^{1-p} w_0^{2(p+1)} \left[c_p \Gamma\left(m+p+\frac{3}{2}\right) - 2d_p \Gamma\left(m+p+\frac{1}{2}\right) + e_p \Gamma\left(m+p-\frac{1}{2}\right) \right]}{z_R^2 \sum_{p=0}^n c_p 2^{-p} w_0^{2p} \Gamma\left(m+p+\frac{1}{2}\right)}. \quad (25)$$

我们看到, 正如(0, m)模复宗量 Laguerre-Gauss 光束一样, 非(0, m)模复宗量 Laguerre-Gauss 光束在强非

局域非线性介质中传输时的二阶矩束宽也与阶数(n, m)有关。

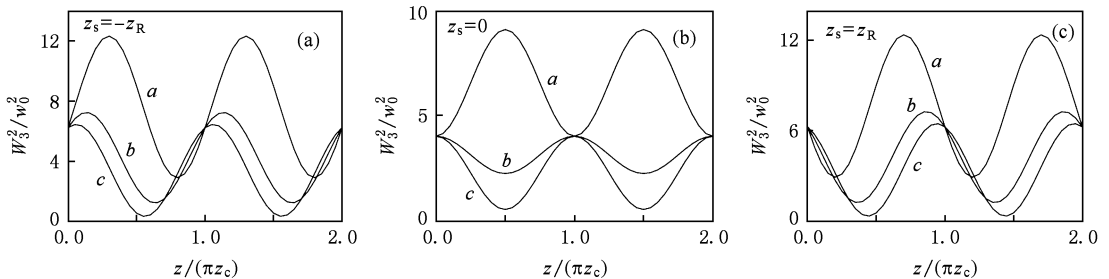


图 6 不同位置入射时, (1, 1) 模复宗量 Laguerre-Gauss 光束在强非局域非线性介质中传输时二阶矩束宽与传输距离的关系 (a) $z_s = -z_R$, (b) $z_s = 0$, (c) $z_s = z_R$. 曲线 a $P_0 = 0.25 P_c$, 曲线 b $P_0 = P_c$, 曲线 c $P_0 = 4 P_c$.

图 6 演示了 (1, 1) 模复宗量 Laguerre-Gauss 光束在强非局域非线性介质中的二阶矩束宽演化. 从

图 6 可以看出,与光束形状的演化相同,二阶矩束宽也是以 $\Delta z = \pi z_c$ 为周期做周期性变化. 当入射位置相同时, $(1,1)$ 模复宗量 Laguerre-Gauss 光束随着入射功率的增大,二阶矩束宽越来越小. 当 $z_s < 0$ (表示光束是从束腰后面入射) 时,无论功率多大,复宗量 Laguerre-Gauss 光束总是先展宽再压缩(图 6(a)); 而当 $z_s > 0$ (表示光束是从束腰前面入射) 时,则总是先压缩到最小然后再展宽(图 6(c)).

5. 结 论

本文得到了柱坐标下偏离束腰入射的复宗量

Laguerre-Gauss 光束在强非局域非线性介质中的场分布解析解. 并得到了偏离束腰入射的复宗量 Laguerre-Gauss 光束在强非局域非线性介质中二阶矩束宽演化的解析表达式. 结合例子,讨论了高阶复宗量 Laguerre-Gauss 光束在强非局域非线性介质中的传输性质. 研究表明:非 $(0, m)$ 模的复宗量 Laguerre-Gauss 光束的光束形状随着传输而发生改变,并以 $\Delta z = \pi z_c$ 为周期做周期性演化. 而 $(0, m)$ 模复宗量 Laguerre-Gauss 光束在演化过程中则形状保持不变,仅改变光束宽度;不论功率多大,在偏离束腰入射条件下总是表现为呼吸子;只有当其作为束腰入射,并且入射功率等于临界功率时才能形成孤子.

- [1] Krolikowski W, Bang O, Rasmussen J J, Wylle J 2001 *Phys. Rev. E* **64** 016612
- [2] Snyder A W, Mitchell D J 1997 *Science* **276** 1538
- [3] Yaroslav V, Kartashov, Lluís Torner 2006 *Opt. Lett.* **31** 1483
- [4] Deng D M, Guo Q 2008 *J. Opt. A* **10** 035101
- [5] Wang Y Q, Guo Q 2008 *Chin. Phys. B* **17** 7
- [6] Peccianti M, Rossi A D, Assanto G 2002 *Appl. Phys. Lett.* **77** 7
- [7] Conti C, Peccianti M, Assanto G 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 113902
- [8] Hu W, Ouyang S G, Yang P B, Guo Q, Lan S 2008 *Phys. Rev. A* **03** 3842
- [9] Rotschild C, Alfassi B, Cohen O, Segev M 2006 *Nat. Phys.* **2** 769
- [10] Guo Q, Xu C B 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3025 (in Chinese) [郭旗、许超彬 2004 物理学报 **53** 3025]
- [11] Xie Y Q, Guo Q 2004 *Opt. Quantum Electron.* **36** 1335
- [12] Xu C B, Guo Q 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5194 (in Chinese) [许超彬、郭旗 2005 物理学报 **54** 5194]
- [13] Deng D M, Zhao X, Guo Q 2007 *J. Opt. Soc. Am. B* **24** 2537
- [14] Wang X H, Guo Q 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3183 (in Chinese) [王彤华、郭旗 2005 物理学报 **54** 3183]
- [15] Zhang X P, Guo Q 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3178 (in Chinese) [张霞萍、郭旗 2005 物理学报 **54** 3178]
- [16] Huang Y, Guo Q 2005 *High Power Laser Part. Beams* **17** 655 (in Chinese) [黄毅、郭旗 2005 强激光与粒子束 **17** 655]
- [17] Dai J H, Guo Q 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 5001 (in Chinese) [戴继慧、郭旗 2008 物理学报 **57** 5001]
- [18] Bai D F, Guo Q, Hu W 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 5684 (in Chinese) [白东峰、郭旗、胡巍 2008 物理学报 **57** 5684]
- [19] Dai J H, Guo Q 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1752 (in Chinese) [戴继慧、郭旗 2009 物理学报 **58** 1752]
- [20] Takenaka T, Yokota M, Fukumitsu O 1985 *J. Opt. Soc. Am. A* **2** 826
- [21] Duan K L, Lü B D 2007 *Opt. Laser Technol.* **39** 110
- [22] Lu D Q, Hu W, Guo Q 2009 *Eu. Phys. Lett.* **86** 44004
- [23] Lu D Q, Hu W, Zheng Y J, Liang Y B, Cao L G, Lan S, Guo Q 2008 *Phys. Rev. A* **78** 043815
- [24] Lü B D 2003 *Laser Optics* (Beijing: Higher Education Press) pp10—13, 109—111 (in Chinese) [吕百达 2003 激光光学(北京:高等教育出版社)第 10—13, 109—111 页]
- [25] Zhang K Q, Li D J 2001 *Electromagnetic Theory for Microwaves and Optoelectronics* (Beijing: Publishing House of Electronics Industry) p595—596 (in Chinese) [张克潜、李德杰 2001 微波与光电子学中的电磁理论(北京:电子工业出版社)第 595—596 页]
- [26] Belanger P A 1991 *Opt. Lett.* **16** 196

Propagation of complex argument Laguerre-Gaussian beams in strongly nonlocal nonlinear media *

Chen Li-Xia Lu Da-Quan[†] Hu Wei Yang Zhen-Jun Cao Wei-Wen Zheng Rui Guo Qi

(Key Laboratory of Photonic Information Technology Guangdong Province, South China

Normal University, Guangzhou 510006, China)

(Received 4 June 2009; revised manuscript received 13 July 2009)

Abstract

In this paper, we obtain the analytical solution of the off-waist inputted complex argument Laguerre-Gaussian beams and their mean squared beam width in nonlocal nonlinear media. The propagation of the complex argument Laguerre-Gaussian beams in the nonlocal nonlinear media is investigated in detail. The examples show that the pattern shape of a (n, m) mode complex argument Laguerre-Gaussian beam varies periodically with the period $\Delta z = \pi z_c$ in strongly nonlocal nonlinear media if $n \neq 0$. But if $n = 0$, its pattern shape remains unvaried and the beam width varies periodically during propagation. Under the off-waist incident condition, the propagation of the $(0, m)$ mode complex argument Laguerre-Gaussian beam behaves as a breather during propagation, no matter what the power of the incident beam is. Only when the beam is input at the waist and the input power equals the critical power would the breather be reduced to a soliton.

Keywords: strongly non-locality nonlinearity, complex argument Laguerre-Gaussian beam, mean squared beam width, spatial soliton

PACC: 4265S, 4270D

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10804033, 10674050), the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 20080574002), and the Program for Innovative Team of the Higher Education in Guangdong Province, China (Grant No. 06CXTD005).

[†] Corresponding author. E-mail: ludq@senu.edu.cn