

电子束空间极限电流的非线性理论研究*

刘 静[†] 舒 挺 李志强

(国防科技大学光电科学与工程学院, 长沙 410073)

(2009 年 3 月 1 日收到; 2009 年 7 月 9 日收到修改稿)

从电子束一维稳态传输的电势非线性 Poisson 方程出发, 推导了圆柱波导内实心束和环形束空间极限电流与电子入射电势的依赖关系, 给出了数值求解方法和解的特征, 分析比较了数值计算与现有解析公式及粒子模拟的结果. 考虑电子的横向运动, 对数值方法进行了二维修正, 计算结果与粒子模拟结果具有很好的一致性. 说明利用数值方法计算电子电势非线性微分方程能够得到更精确的电子束在圆柱波导内的空间极限电流; 另外, 对其他形状的波导, 尤其是难以得到解析式的情况, 根据实际几何结构设置边界条件, 数值方法可以方便地给出束流传输特性, 对设计新型结构的高功率微波器件提供理论指导.

关键词: 相对论电子束, 圆柱波导, 空间极限电流, 束流传输

PACC: 5225, 5265

1. 引 言

高功率微波器件的电子束空间极限电流是设计器件时需要考虑的重要参数, 国内外研究人员针对电子束在不同结构的波导内的空间极限电流开

展了广泛的理论研究^[1-13]. 早期的高功率微波器件主要利用圆柱波导传输电子束, Bogdankevich 等在电子束一维运动、电子束流密度为常数、电子束内电子数密度均匀的假设条件下, 推导出如下实心电子束和环形电子束在圆柱波导内传输时空间极限电流的解析式^[3,14]:

$$I_{\text{scl}}^{\text{s}} = \frac{mc^3}{e} \frac{(\gamma_0^{2/3} - 1)^{3/2}}{1 + 2\ln(R/r_{\text{out}})}, \quad (1)$$

$$I_{\text{scl}}^{\text{h}} = \frac{mc^3}{e} \frac{(\gamma_0^{2/3} - 1)^{3/2}}{1 - 2r_{\text{in}}^2 \ln(r_{\text{out}}/r_{\text{in}}) / (r_{\text{out}}^2 - r_{\text{in}}^2) + 2\ln(R/r_{\text{out}})}, \quad (2)$$

式中 $I_{\text{scl}}^{\text{s}}, I_{\text{scl}}^{\text{h}}$ 分别表示圆柱波导内实心束和环形束的空间极限电流, m, e 分别是电子质量和单位电荷, γ_0 是电子在漂移管入口处的相对论因子, R 是圆柱波导管的内半径, $r_{\text{in}}, r_{\text{out}}$ 分别是电子束的内外径. (1) 和 (2) 式是设计虚阴极振荡器时引用最为广泛的强流电子束空间极限电流表达式.

但是, 电子层流平衡的运动方程指出^[1], 电子束内靠近束外层的电子较内层电子具有更快的运动速度, 即电子速度在径向是非均匀分布的. 由电子束流密度为常数, 即 $j = en(r)v(r) = \text{const}$, 易知电子的数密度在径向也为非均匀分布. 这说明

Bogdankevich 等^[3] 的模型中电子束内电子数密度均匀的假设不合理. 此外, 由于电子束空间电荷效应, 电子在传输过程中会发生箍缩, 理论和实验均发现电子束内靠近轴线附近的电子密度 n_e 大, 而外层的 n_e 低, 即电子数密度径向分布不均匀^[15,16].

Genoni 等^[17] 针对电子数密度非均匀分布的情况, 提出了用迭代法求解圆柱波导内实心束的空间极限电流, 但是仅仅得到了束半径远远小于波导半径时的结果, 对束半径与波导半径可以比拟的情况, 由于第二级迭代出现复杂的超几何函数, 即便使用数值方法也很难求解.

* 国家高技术研究发展计划资助的课题.

[†] E-mail: ljofnuds@163.com

本文在 Bogdankevich 模型的基础上, 考虑电子数密度非均匀分布, 因此电子电势满足的 Poisson 方程为非线性偏微分方程. 利用数值方法进行求解, 得到更接近于实际的电子束空间极限电流, 并与电子数密度均匀条件下得到的解析计算结果进行比较. 其次, 考虑粒子模拟和实验研究中, 电子束在轴向有限磁场导引下, 电子具有横向运动的情况, 对数值计算进行二维修正, 并用粒子模拟对计算结果进行验证. 求解方法和编程计算结果从理论上为设计高功率微波器件提供更精确的电子束空间极限电流.

2. 理论模型

圆柱波导内环形电子束和实心电子束传输的理论分析模型分别如图 1 和图 2 所示. 在一维模型条件下, 波导为无限长, 外加轴向无限大导引磁场. 由于导引磁场约束电子沿轴向运动, 克服了空间电荷场导致的径向扩散, 因此认为电子近似为一维运动, 即忽略其径向和角向运动, 只考虑轴向速度分量 v_z .

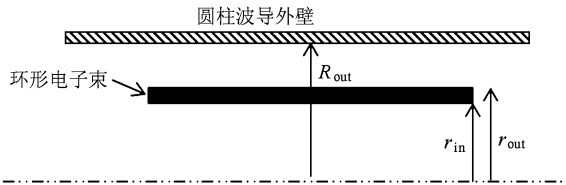


图 1 圆柱波导内环形电子束传输示意图

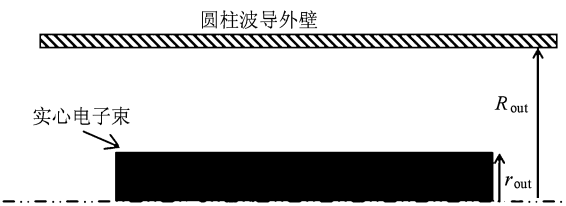


图 2 圆柱波导内实心电子束传输示意图

描述电子束运动的基本方程为

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = - \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (3)$$

$$-e\phi + (\gamma - 1)mc^2 = -e\phi_c, \quad (4)$$

$$v_z = c(1 - \gamma^{-2})^{1/2}$$

$$= c \left[1 - \left(\gamma_0 + \frac{e\phi}{mc^2} \right)^{-2} \right]^{1/2}, \quad (5)$$

$$I_b = \begin{cases} -n_e e v_z \pi (r_{out}^2 - r_{in}^2) & (\text{环形电子束}) \\ -n_e e v_z \pi r_{out}^2 & (\text{实心电子束}) \end{cases}. \quad (6)$$

将(4)、(5)和(6)式代入(3)式可得环形电子束内部电势分布的微分方程

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = - \frac{I_b}{\varepsilon_0 \pi (r_{out}^2 - r_{in}^2) c \left[1 - \left(\gamma_0 + \frac{e\phi}{mc^2} \right)^{-2} \right]^{1/2}}. \quad (7)$$

边界条件为

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r_{in}} = 0, \quad (8)$$

$$\phi(r_{out}) = r_{out} \ln \frac{r_{out}}{R_{out}} \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r_{out}}.$$

对(7)式, 若假设电子均匀分布, 即得到 Bogdankevich 的解析表达式, 如(2)式所示. 同理, 将(4)、(5)和(6b)式代入(3)式可得实心电子束内部电势分布的微分方程

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = - \frac{I_b}{\varepsilon_0 \pi c r_{out}^2 \left[1 - \left(\gamma_0 + \frac{e\phi}{mc^2} \right)^{-2} \right]^{1/2}}, \quad (9)$$

边界条件为

$$\phi(r \leq r_{in}) = \text{const}, \quad (10)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r_{in}} = 0,$$

$$\phi(r_{out}) = r_{out} \ln \frac{r_{out}}{R_{out}} \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r_{out}}.$$

(10)式在电子均匀分布的假设下^[3], 或者利用文献[17]的方法, 将微分方程化为积分方程, 然后用迭代法求解, 第一级迭代后, 即得到 Bogdankevich 的解析表达式, 即(1)式.

但是, 由(5)式易知, 电势的径向不均匀分布导致电子轴向速度径向不均匀, 而在束流恒定的情况下, 由(6)式可知, 电子密度 n_e 在径向也非均匀分布. 另外, 求解(9)式用迭代法进行第二步迭代时, 将出现复杂的超几何函数, 计算困难, 因此此法仅在一级迭代下有意义. 而一级迭代满足精度要求的条件是束半径远远小于波导内径, 对不满足上述条件的束分布, (1)式的误差也较大. 下一节将给出利用边界条件(8)和(10)式直接求解电势二阶非线性微分方程(7)和(9)式的数值方法, 从而得到空间极

限电流更精确的解.

3. 数值求解

以环形束的情况为例,说明数值求解的思路,实心电子束的情况类似,不再累述.

在圆柱坐标系下,(7)式可以进一步展开为

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = - \frac{I_b}{\varepsilon_0 \pi c (r_{\text{out}}^2 - r_{\text{in}}^2) \left[1 - \left(\gamma_0 + \frac{e\phi}{mc^2} \right)^{-2} \right]^{1/2}}. \quad (11)$$

当电子束结构参数 r_{in} , r_{out} 和输入能量 γ_0 确定,并设定电子束流 I_b , (11)式即为电势 ϕ 关于径向坐标分量 r 的二阶非线性微分方程. 利用打靶法确定出 $\phi(r \leq r_{\text{in}})$ 的常数,然后将此作为微分方程的边界条件,求解在不同束流下的电势分布 $\phi(I_b)$. 当电势极小值等于电子输入电势时,

$$\phi_{\min}(I_b) = \phi_c = \frac{(\gamma_0 - 1)mc^2}{e}. \quad (12)$$

根据能量守恒,电势极小值附近的电子速度为零,则此时的束流即为该输入电势 ϕ_c 所对应的空间电荷极限电流,从而可以求得电子束空间极限电流随电子输入电势 U 的变化关系.

4. 计算结果及分析

利用上节介绍的数值计算方法,求得内径 5.5 cm 圆柱波导内,环形电子束内外径分别为 2.5 和 3.5 cm 和实心电子束半径为 3.5 cm 时,电子束空间极限电流随 U 的变化,如图 3 和图 4 所示.

从图 3 和图 4 可以发现,在电子一维运动的假设条件下,对非线性微分方程进行数值计算得到的空间极限电流与电子束输入电势的依赖关系与解析表达式所反映的规律一致,但是数值计算的值略大于解析式求解的结果,而且随着 U 的增加,二者的差也逐渐增加. U 越大,意味着入射电子的运动速度大,因此由轴向速度和角向自磁场产生的径向箍缩力增大,从而增加了电子分布的不均匀性. 数值计算正是考虑了电子的实际分布,而解析表达式是在电子均匀分布的假设条件下推导得到的,所以二者在数值上存在差别而且随着 U 增加,差别增大.

另外,图 3 和图 4 还给出了 2.5-D 粒子模拟得到的空间极限电流与 U 的依赖关系^[18]. 可以发现,

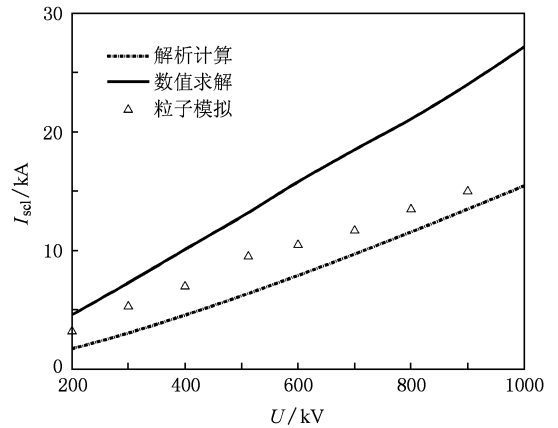


图 3 圆柱波导内环形电子束空间极限电流

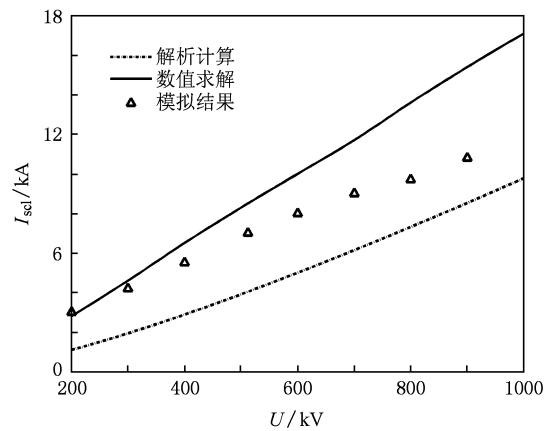


图 4 圆柱波导内实心电子束空间极限电流

在 U 较低的情况下,粒子模拟与数值计算的结果很接近,而随着 U 的增加,两者之间差距明显. 这主要是因为粒子模拟考虑了电子的横向运动,而对空间极限电流有影响的主要是电子的轴向运动,因而与仅考虑电子轴向运动的数值计算结果存在差别. 当 U 较小时,电子束流也较小,因而束内电子空间电荷效应相对较弱,电子速度的径向分量较小,故数值计算和模拟结果非常接近;而随着 U 增加,电子径向运动增强,仅考虑电子轴向运动的数值方法与模拟结果差别增大.

图 5 和图 6 所示为 $U = -512$ kV,束流以接近或小于空间极限电流的大小传输时,由数值计算得到的电子密度 n_e 分布. 容易看出:电子束内的电子分布不均匀,实心束内电子主要集中于轴线附近,环形束内电子则主要集中在电子束内径处,且随着束流增大接近空间极限电流时,电子分布的不均匀性显著增大. 因此 Bogdankevich 等的理论模型中假

设电子均匀分布, 仅仅在束流远小于空间极限电流时近似成立, 而当束流接近空间极限电流时, 必须考虑电子分布的非均匀性, 即需要用数值方法求解非线性微分方程才能给出空间极限电流的正确结果.

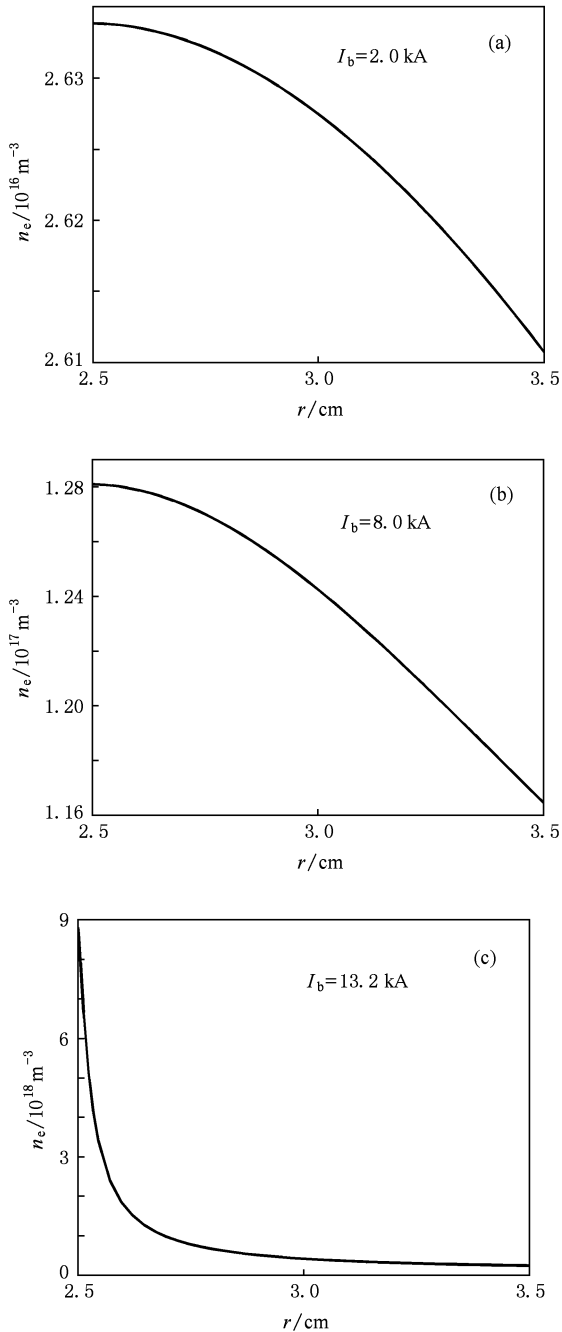


图5 圆柱波导内环形电子束电子密度 n_e 分布 (a) 束流为 2 kA, (b) 束流为 8 kA, (c) 束流为 13.2 kA

图7和图8所示为 $U = -512$ kV, 束流以接近空间极限电流的大小传输时, 由数值计算得到的电子束内部电势和速度的径向分布, 其中 β_z 为电子的

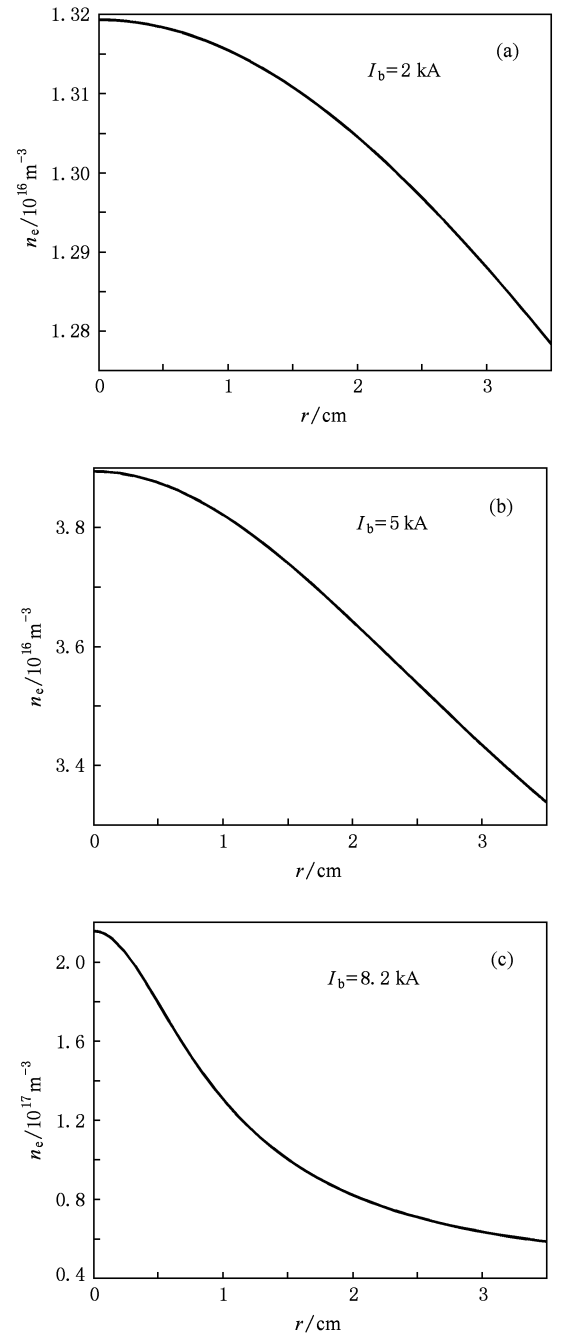


图6 圆柱波导内实心电子束电子密度分布 (a) 束流为 2 kA, (b) 束流为 5 kA, (c) 束流为 8.2 kA

速度在 z 方向分布密度.

从图7和图8中容易看出: 在圆柱波导内传输的电子束内部, 电势随着半径的减小而递减, 即实心束内, 电子越靠近中心轴附近, 势能越大, 而速度越低; 环形束内, 电子越靠近内径, 势能越大, 而速度越低. 所以在电子束传输时, 外层电子的运动速度比内层电子快. 电子速度的非均匀分布是造成虚阴极振荡器束波功率转换效率低的原因之一. 在阳

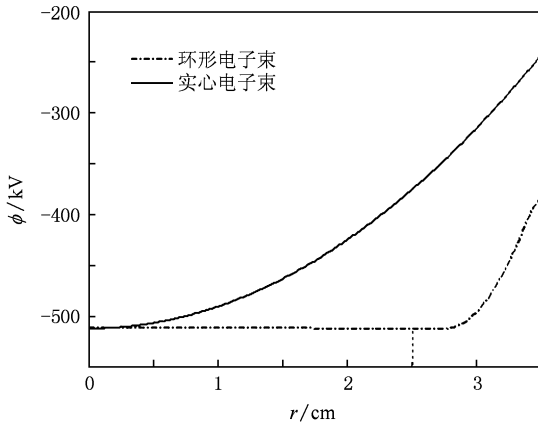


图 7 电子束内部电势分布的数值计算结果

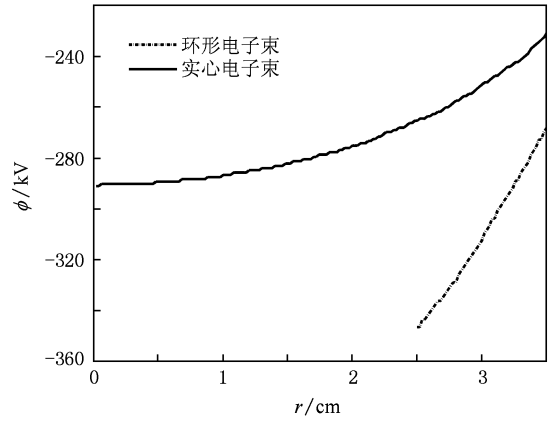


图 9 电子束内部电势分布的粒子模拟结果

改写为

$$\begin{aligned} v_z^2 + v_\perp^2 &= c^2(1 - \gamma^{-2}) \\ &= c^2 \left[1 - \left(\gamma_0 + \frac{e\phi}{mc^2} \right)^{-2} \right], \end{aligned} \quad (13)$$

同时引入径向动量守恒

$$v_\perp \left(1 - \frac{v_z^2 + v_\perp^2}{c^2} \right)^{-1/2} = v_\perp \gamma_0. \quad (14)$$

由(13), (14)和(3)式用上节所介绍的数值方法, 同理可以得到实心束和环形束在圆柱波导内修正后的空间电荷极限电流. 图 10 和图 11 所示为电子横向运动分别满足 $\beta_{//} = \frac{v_{//}}{c} = 0, 0.2, 0.4$ 时圆柱波导内环形电子束和实心电子束空间极限电流与 U 的关系, 其中 $\beta_{//} = 0$ 即对应修正前的情况.

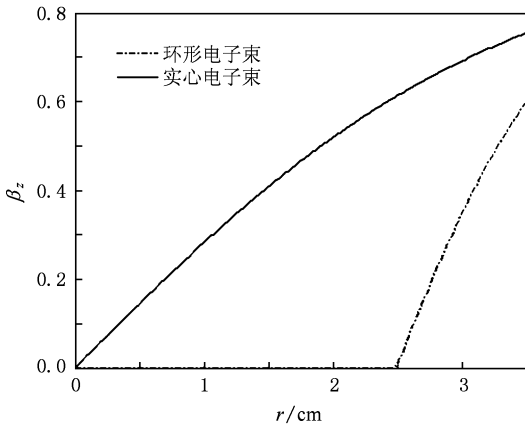


图 8 束电子的速度分布的数值计算结果

极下游引入调制环的虚阴极振荡器就是利用了调制环改变电子束外径附近场分布, 以减小电子速度的非均匀性, 从而加强束波相互作用强度, 提高效率^[19,20].

图 9 所示为在相同结构参数和电参数下, 2.5-D 粒子模拟得到的电子束内部电势的分布. 从图中容易发现: 实心电子束轴线附近电势 -290 kV, 环形束内径处电势 -350 kV, 均大于 $U = -512$ kV, 即由于空间电荷效应电子发生反射时, 轴向速度为零, 一部分输入电势确实的转化为电子横向运动的动能. 而图 5 表明电子发生反射时, 动能为零, 电势能即等于电子输入电势能. 这也说明了粒子模拟和数值计算空间极限电流的差别主要是来自于电子一维运动的假设.

进一步考虑电子具有径向速度分量时, 即轴向导引磁场为有限值, 这更接近于实际情况. 则(3)式

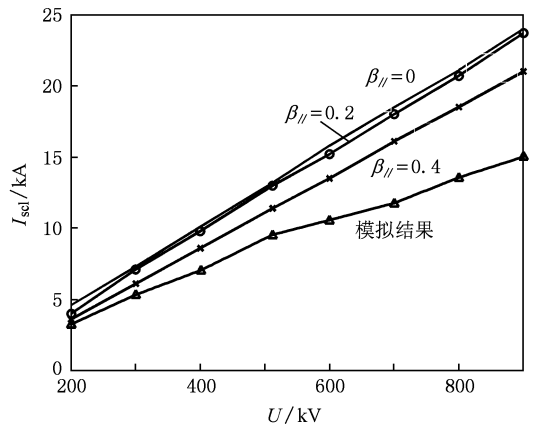


图 10 圆柱波导内环形电子束空间极限电流

从图 10 和图 11 中容易发现, 当考虑电子横向运动后, 修正后的数值计算更接近于粒子模拟结

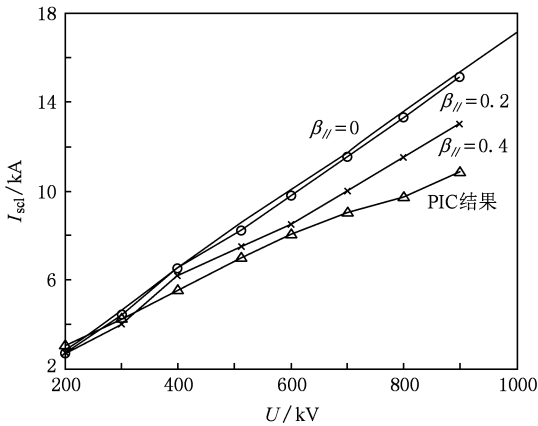


图 11 圆柱波导内实心电子束空间极限电流

果,而且随着横向分量的增加,即 β_{\parallel} 增大,接近程度更高.说明将数值求解方法推广到电子三维运动的情况是合理的.另外,需要注意的是:数值计算的方法相对于解析式的计算精度有明显提高,但是计算时,横向运动分量被假设为已知常数,而实际情况中横向运动受电子束所处的电磁场结构和自身电参数的影响,且在运动中是不断变化的,所以数值计算的方法也存在着一定误差.只是在设计高功率微波器件时,根据电磁场结构和束流参数,设置合理的横向运动参数,将能够提高理论研究的精度,从而更好地指导器件设计.

5. 结 论

尽管圆柱波导内电子束空间极限电流的解析表达式较数值计算方法更为直观,但是电势非线性 Poisson 方程自洽地考虑了电子数密度的实际分布,即实心束在圆柱波导内传输时,电子主要集中在轴线附近,而环形束的电子则主要集中在束内径处;靠近外径的电子运动速度快,而内部电子运动速度慢.而 Bogdankevich 等关于电子束空间极限电流的解析计算模型是建立在束内电子均匀分布的假设之上,因此数值方法比解析式计算更加精确.

其次,现有解析公式是在电子一维运动的假设下推导得到的,而实际的高功率微波器件中轴向导引磁场强度有限,电子存在横向运动分量.数值方法可以针对电子的横向运动进行修正.计算发现,利用修正后的数值方法得到的结果与粒子模拟趋于一致.

本文仅以电子束在圆柱波导内传输为例,介绍了利用数值方法求解非线性微分方程从而得到电子束的空间极限电流.对新型结构的高功率微波器件,如同轴波导内环形电子束激励,根据几何结构适当改变电子电势的边界条件,数值方法可以较精确地求得同轴波导内环形束的空间极限电流,而对其他更为复杂的波导结构,尤其是无法进行解析推导的情况,数值方法能够为器件设计提供理论指导.

- [1] Miller R M 1982 *An Introduction to the Physics of Intense Charge Particle Beams* (New York: Plenum) p91
- [2] Breizman B, Ryutov D D 1974 *Nucl. Fusion* **14** 873
- [3] Bogdankevich L S, Rukhadze A A 1971 *Sov. Phys. Usp.* **14** 163
- [4] Zeng Z Z, Liu G Z, Shao H 2002 *Plasma Sci. Technol.* **4** 1093
- [5] Sotnikov G V, Yatsenko T Y 2002 *Tech. Phys.* **47** 535
- [6] Song S Y, Qiu X, Wang W D, Lin Q W, Sun C W 2005 *High Power Part. Beams* **17** 441 (in Chinese) [宋盛义、仇旭、王文斗、林其文、孙承伟 2005 强激光与粒子束 **17** 441]
- [7] Belomytsev S Y 2003 *Tech. Phys. Lett.* **29** 666
- [8] Li J Q, Mo Y L 2007 *Chin. Phys.* **16** 2716
- [9] Li Y D, He F, Liu C L 2005 *High Power Laser Part. Beams* **17** 913 (in Chinese) [李永东、何锋、刘纯亮 2005 强激光与粒子束 **17** 913]
- [10] Liu G Z, Shao H 2003 *Chin. Phys.* **12** 204
- [11] Shao H, Liu G Z, Song Z M, Huang W H, Hu Y M, Ning H 2001 *High Power Laser Part. Beams* **13** 631 (in Chinese) [邵浩、刘国治、宋志敏、黄文华、胡咏梅、宁辉 2001 强激

光与粒子束 **13** 631]

- [12] Xiao R Z, Liu G Z, Chen C H 2008 *Chin. Phys. B* **17** 3807
- [13] Fan Y W, Zhong H H, Li Z Q, Shu T, Yang H W, Yang J H 2008 *Chin. Phys. B* **17** 1804
- [14] Sloan M L, Thompson J R 1977 *Austin Research Associates Report I-ARA-77-U-54*
- [15] Chen Y, Mankowski J, Walter J, Kristiansen M 2007 *IEEE Trans. Dielectr. Electr. Insul.* **14** 1037
- [16] Mattias E, Tomas H, Anders L, Cecilia M, Sten N 2008 *IEEE Trans. Plasma Sci.* **36** 638
- [17] Genoni T C, Proctor W A 1978 *IEEE International Conference on Plasma Science* 18—22 Sept 1978 Montreal p94
- [18] Tarakanov V P 2004 *User's Manual for Code KARAT* (Virginia: Berkeley Research Associate)
- [19] Li Z Q, Shu T, Zhong H H, Fan Y W, Yang J H, Xu L R, Zhao Y S 2009 *High Power Laser Part. Beams* **21** 421 (in Chinese) [李志强、舒挺、钟辉煌、樊玉伟、杨建华、许流荣、赵延宋 2009 强激光与粒子束 **21** 421]

[20] Luo X, Liao C, Meng F B, Zhang Y J, Wang X D 2007 *High Power Laser Part. Beams* **19** 92 (in Chinese) [罗 雄、

廖 成、孟凡宝、张云俭、王晓东 2007 *强激光与粒子束* **19** 92]

Nonlinear analysis on electron beam current in cylindrical waveguide^{*}

Liu Jing[†] Shu Ting Li Zhi-Qiang

(*College of Optoelectric Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China*)

(Received 1 March 2009; revised manuscript received 9 July 2009)

Abstract

The space-charge-limited currents of both solid electron beam and annular electron beam in cylindrical waveguide are derived from the nonlinear Poisson equation for potential in the region of electron beams. Corrections for the transverse motion of electrons are made to the solution, which bring more consistent with the results from PIC simulations. Though numerical computation, it is showed that electrons located along the axis and by outer radius of solid and annular electron beams respectively and electrons standing near to the outside of the beam has larger axial velocity than these inside. This approach is available for analyzing the characteristics of electron beam transporting in high power microwave generator with other configuration waveguide.

Keywords: relativistic electron beam, cylindrical waveguide, space-charge-limited current, electron beam transportation

PACC: 5225, 5265

^{*} Project supported by the National High Technology Research and Development Program of China.

[†] E-mail: ljofnuds@163.com