

晶体摆动场辐射系统的全局分叉与混沌行为^{*}

罗诗裕¹⁾ 邵明珠¹⁾ 罗晓华^{2)†}

1)(东莞理工学院电子工程学院, 东莞 523106)

2)(重庆大学电气工程学院, 重庆 400044)

(2009 年 5 月 3 日收到; 2009 年 7 月 23 日收到修改稿)

引入正弦平方势, 在经典力学框架内和偶极近似下, 考虑到运动阻尼和非线性影响, 把粒子在晶体摆动场中的运动方程化为具有阻尼项和受迫项的广义摆方程. 利用 Jacob 椭圆函数和椭圆积分分析了无扰动系统的相平面特征, 并解析地给出了系统的解和粒子振动周期; 进一步利用 Melnikov 方法分析相平面上三类轨道的分叉性质和进入 Smale 马蹄意义下的混沌行为, 找到系统的全局分叉与系统进入混沌的临界条件. 结果表明, 系统的临界条件与它的物理参数有关, 只需适当调节这些参数就可以原则上避免、抑制分叉或混沌的出现.

关键词: 晶体摆动场辐射, Melnikov 方法, 分叉, 混沌

PACC: 6180M, 7550R

1. 引 言

如何获得短波长、大功率的自由电子激光器是自由电子激光的发展方向之一, 但要用传统的方法把自由电子激光推向更短的波长在技术上遇到了严重挑战. 20 世纪 70 年代, 前苏联科学家 Kumakhov 发现了沟道辐射^[1], 20 世纪 80 年代以来, 人们对沟道辐射进行了广泛而深入研究^[2-6], 并预言或提出了各种可能方案试图把沟道辐射改造为相干辐射. 值得注意的是, 20 世纪 90 年代末, 以 Korol 为代表的俄国科学家们提出了用声学方法使沟道平面周期弯曲^[7-11], 带电粒子在周期弯曲的晶体中运动时, 除了产生自发的沟道辐射外, 还将产生相干的摆动场辐射. 近年来, 这个研究小组一直在试图寻找这种新的光源. 他们将晶体摆动场辐射同自由电子激光进行了仔细分析和比较, 指出了它们之间的最大差别是, 自由电子激光器的粒子束和光子束均在真空中运动, 而晶体摆动场辐射和粒子束却在晶格场中运动. 于是, 晶体摆动场辐射面临的问题不管是理论上、技术上还是实验上将比自由电子激光要复杂得多(比如, 电子多重散射、晶格热振动和退道效应等), 近 30 年来科学家们一直在

尝试如何把沟道辐射改造为 X 激光或 γ 激光, 如何利用周期弯曲晶体来获得 X 激光或 γ 激光.

Korol 等在线性近似下, 对沟道辐射和摆动场辐射进行了分析, 指出利用周期弯曲晶体来获得短波长激光是完全可能和可行的, 并把注意力集中在实验的改进与技术的实现上. 至今, 虽然还没有能在实验室成功获得 X 激光或 γ 激光, 但在人们寻找新光源的探索中, 开辟了一个全新的方向.

在此基础上, 本文考虑了运动阻尼和非线性的影响, 引入正弦平方势, 在经典力学框架内和偶极近似下, 把粒子的运动方程化为具有阻尼项和受迫项的广义摆方程. 利用 Jacob 椭圆函数和椭圆积分分析了无扰动系统的相平面特征, 发现相平面上的轨道分为了异宿轨道、振动型周期轨道和旋转周期轨道三类; 进一步利用 Melnikov 方法分析了这三类轨道的分叉性质或进入 Smale 马蹄意义下的混沌行为, 找到了系统的全局分叉与系统进入混沌的临界条件. 结果表明, 系统分叉与进入混沌的临界条件均与它的物理参数有关, 只需适当或综合调节这些参数就可以原则上避免或抑制混沌, 从而保证系统稳定输出晶体摆动场辐射的可能性, 进而为寻找短波长激光(比如 X 激光或 γ 激光)提供进一步理论支撑.

^{*} 广东省自然科学基金(批准号: 8151170003000010)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: bgluoshy@dgut.edu.cn

2. 粒子运动方程与无扰动系统的相平面特征

2.1. 粒子运动方程

假设已经用声振动方法获得了周期弯曲系统. 在偶极近似下,粒子的横向运动可以用经典方法来描述,且可具体表示为^[12]

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + 2m\mu_0 \frac{dx}{dt} + \frac{d}{dx}V(x) = pv\kappa(z), \quad (1)$$

其中 $V(x)$ 是粒子-晶体相互作用势, p 是粒子动量, v 是粒子速度,在超相对论情况下有 $v \approx c, z = ct$ 是束流运动方向; μ_0 是阻尼系数, $m = m_0\gamma, m_0$ 是粒子静止质量, γ 是相对论因子. 而

$$\kappa(z) = \kappa_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda_u} z \quad (2)$$

是弯晶曲率, $\kappa_0 = \Omega_u^2 a, \Omega_u = \frac{2\pi}{\lambda_u}$ 是摆动场频率, λ_u 是周期摆动场波长,而 a 是摆动场振幅.

引入正弦平方势^[13-18],并假设阻尼项和受迫项是小量,则由(2)式,可将(1)式可进一步表示为

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + 2\mu\varepsilon \frac{d\xi}{d\tau} + \sin\xi = \varepsilon f \cos\omega\tau, \quad (3)$$

其中 ε 是小参数,表示伴随它的项为 $O(\varepsilon)$ 量级,且

$$\begin{aligned} \xi &= 2\pi x/d, \\ \delta &= \frac{2\pi^2 K\beta}{md^2}, \\ \tau &= \delta^{1/2} t, \\ \mu &= \mu_0/\delta^{1/2}, \\ \omega &= \Omega_u/\delta^{1/2}, \\ f &= \frac{2\pi p v \kappa_0}{m\delta d}, \end{aligned} \quad (4)$$

d 是晶面间距, $K\beta = V_0$ 是势阱深度,对于一般晶体取值为 10—100 eV,对于硅为 27 eV. (3) 式描述的是一个典型的动力学系统. 下面,利用 Melnikov 方法分析这个系统在 Smale 马蹄变换意义上的混沌性质和全局分叉行为. 首先分析无扰动系统的情形.

2.2. 无扰动系统的相平面特征

对于无扰动系统有 $\varepsilon = 0$, 方程(3)化为

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \zeta, \\ \dot{\zeta} &= -\sin\xi, \end{aligned} \quad (6)$$

$\xi_s = 0$ 和 $\xi_u = \pm\pi$ 分别是系统的平衡点和非平衡点. 积分一次可得系统的 Hamilton 量

$$h = \frac{\zeta^2}{2} + (1 - \cos\xi), \quad (7)$$

根据 h 的大小,相平面上的轨道可分为三类.

2.2.1. 异宿轨道

$h = 2$ 的轨道是异宿轨道,它把相平面分为内外两个区域(如图 1 所示). 这两条轨道可表示为

$$\begin{aligned} \xi^s &= \pm 2\arcsin(th\tau), \\ \zeta^s &= \pm 2\operatorname{sech}(\tau), \end{aligned} \quad (8)$$

其中 \pm 号分别表示上、下相平面的两条异宿轨道,上标 s 表示这条轨道是异宿轨道,相应的周期用 T^s 表示,当粒子沿这条轨道运动时,周期 T^s 为无穷.

2.2.2. 振动型周期轨道

当 $0 < h < 2$ 时,轨道是周期的,描写的是粒子围绕中心平面(平衡位置)的周期运动,相应的解可表示为

$$\begin{aligned} \xi^o &= 2\arcsin(\kappa\operatorname{sn}\tau), \\ \zeta^o &= 2\kappa\operatorname{cn}(\tau), \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $\kappa = h/2, \kappa \in (0, 1)$, $\operatorname{sn}\tau$ 和 $\operatorname{cn}\tau$ 是 Jacob 椭圆函数,上标 o 表示这条轨道是振动型周期轨道,粒子沿这条轨道的运动周期为

$$T^o = 4K(\kappa), \quad (10)$$

$K(\kappa)$ 是第一类椭圆积分. 当 h 单调增加时,粒子的运动周期 T^o 从 $2\pi \rightarrow \infty$.

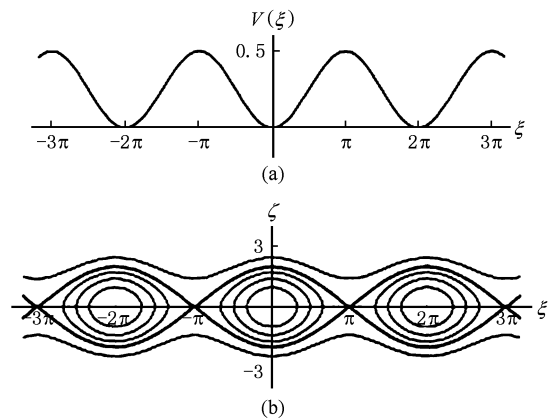


图 1 $\varepsilon = 0$ 时系统的有效势和它的相平面特征 从内到外依次 $h = 0.5, 1, 1.5, 2, 3$

2.2.3. 旋转型周期轨道

当 $h > 2$ 时,轨道也是周期的,描写的是粒子围绕不稳定平衡位置的周期运动,且可表示为

$$\xi^r = \pm 2\arcsin\left(\operatorname{sn} \frac{\tau}{\kappa}\right), \quad (11)$$

$$\zeta^r = \pm \frac{2}{\kappa} \operatorname{dn} \frac{\tau}{\kappa}, \quad (12)$$

其中 $\operatorname{dn}\tau$ 为 Jacob 椭圆函数, 上标 r 表示这条轨道是旋转型周期轨道, 振动周期由

$$T^r = 2\kappa K(\kappa) \quad (13)$$

给出, 当 h 单调减少时, 周期 T^r 由 $0 \rightarrow \infty$.

下面用 Melnikov 方法分别构造这三类轨道的 Melnikov 函数, 并讨论系统的全局分叉与混沌行为.

3. 异宿轨道的 Melnikov 函数与 Smale 马蹄混沌的物理意义

3.1. 异宿轨道的 Melnikov 函数

对于两条异宿轨道可构造如下形式的 Melnikov 函数

$$\begin{aligned} M_{\pm}^s(\tau_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta_{\pm}^s(\tau) [-2\mu\zeta_{\pm}^s(\tau) \\ &\quad + f\sin\omega(\tau + \tau_0)] d\tau \\ &= \pm \frac{2f\pi}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)} [2\mu/\delta_{\pm}^s + \sin\omega\tau_0], \quad (14) \end{aligned}$$

其中 ζ_{\pm}^s 由(8)式给出, 而

$$\begin{aligned} \delta_{\pm}^s &= \pm \frac{\pi c_0}{4}, \\ c_0 &= f \left(\operatorname{ch} \frac{\pi}{2}\omega \right)^{-1}, \quad (15) \end{aligned}$$

在参数 (f, μ) 平面上, 如果满足条件

$$\mu \leq |\delta_{\pm}^s|/2, \quad (16)$$

则对于充分小的 ε , 系统(3)的 Poincare 映射在两个不动点的稳定流形和不稳定流形将横向交截, 即 Poincare 映射具有 Smale 马蹄变换意义下的混沌行为^[19-21].

对于本文关心的异宿圈系统, 相平面的一个共同特点是 $\varepsilon = 0$ 时, 相平面上的轨道分布是中心对称的, 因此, 两条异宿轨道仅差一个符号, 这就导致了横截异宿点的阈值为同一个值, 即在这个阈值条件下, 可确保系统产生横截异宿点, 而系统必定存在 Smale 马蹄意义下的混沌.

3.2. Smale 马蹄混沌的物理意义

将(15)式代入(16)式, 可将 Smale 马蹄变换意义下混沌条件用系统参数表示为

$$\left| \frac{8\mu/\pi}{f} \right| < \operatorname{sech}(\pi\omega/2), \quad (17)$$

将(4)和(5)式代入(17)式还可用系统的原始参数进一步表示为

$$\left| \frac{4\mu_0 \sqrt{2mK\beta}}{pv\kappa_0} \right| < \pi \operatorname{sech}\left(\frac{d \sqrt{m/2K\beta}\Omega_u}{2}\right), \quad (18)$$

从条件(18)式可以看出:

1) 如果晶体不弯曲 ($\kappa_0 = 0$, 对应于直沟道), 不等式左端为无穷, 条件(18)式永远不满足, 系统不存在 Smale 马蹄变换意义下的混沌, 状态是稳定的. 换句话说, 对于直沟道, 即使是引入正弦平方势, 系统也不会出现混沌现象.

2) 系统弯曲越厉害 (κ_0 越小) 条件越不容易满足. 当它达到

$$(pv\kappa_0)_c = \left| \frac{4\mu_0 \sqrt{2mK\beta}}{\pi \operatorname{sech}\left(\frac{d \sqrt{m/(2K\beta)}\Omega_u}{2}\right)} \right| \quad (19)$$

时, 系统处于临界状态, 当 $pv\kappa_0 < (pv\kappa_0)_c$ 系统是稳定的, 当 $pv\kappa_0 > (pv\kappa_0)_c$ 时, 条件(17)式满足, 系统存在 Smale 马蹄意义上的混沌.

3) 当系统阻尼系数 ($2\mu_0$) 越小时, 条件越容易满足; 换句话说, 仅当阻尼足够强时才可能抑制混沌的发生. 其临界值可表示为

$$(2\mu_0)_c = \left| \frac{\pi pv\kappa_0 \operatorname{sech}(d \sqrt{m/(2K\beta)}\Omega_u/2)}{2 \sqrt{2mK\beta}} \right|, \quad (20)$$

也就是说, 当阻尼系数满足条件 $2\mu_0 > (2\mu_0)_c$ 时, 系统是稳定的.

4. 振动型周期轨道的分叉现象

4.1. 振动型周期轨道的 Melnikov 函数

对于任意的互质正整数 m, n , 存在惟一的一个 $\kappa_{m/n}^0 \in (0, 1)$, 使得 $T^0(\kappa_{m/n}^0) = 4K(\kappa_{m/n}^0) = \frac{m}{n}T =$

$\frac{2\pi m}{n\omega}$, 构造这条轨道的 Melnikov 函数, 可得

$$\begin{aligned} M_{m/n}^0(\tau_0) &= \int_0^{mT} \zeta^0(\tau, \kappa) [-2\mu\zeta^0(\tau, \kappa) \\ &\quad + f\sin\omega(\tau + \tau_0)] d\tau \\ &= \begin{cases} \text{与 } \tau_0 \text{ 无关的常数} \\ \text{(当 } n \neq 1 \text{ 或 } m \text{ 为偶数时)} \\ -\frac{4f\pi}{\operatorname{ch}(\omega K'(\kappa))} \left[\frac{2\mu}{\delta_m^0} - \sin\omega\tau_0 \right], \quad (21) \\ \text{(当 } n = 1, \text{ 且 } m \text{ 为奇数时)} \end{cases} \end{aligned}$$

其中 ζ^o 由(9)式给出,且 $K'(\kappa) = K(\kappa')$, κ' 是椭圆函数的补模, $E(\kappa)$ 是第二类全椭圆积分,而

$$\delta_m^o = \frac{f}{\text{ch}(\omega K'(\kappa)) \left\{ \frac{4}{\pi} (E(\kappa) - (1 - \kappa^2)K(\kappa)) \right\}} \quad (\kappa = \kappa_m^o), \quad (22)$$

在参数 (f, μ) 平面上,如果条件

$$\mu \leq |\delta_m^o/2| \quad (23)$$

满足,则对于充分小的 ε ,在无扰动系统(6)的振荡型周期解附近,扰动系统也存在同样类型的周期解.由(21)式可以看出, Melnikov 函数的零点方程为

$$\frac{2\mu}{\delta_m^o} - \sin\omega\tau_0 = 0 \quad (24)$$

可见,当 $\tau_0 \in [0, T]$ 时, Melnikov 函数有两个简单零点,这就保证了在这个区间上总有一点可以使 $M_m^o(\tau_0)$ 的导数为负,换句话说,系统(3)总存在一组稳定的周期为 mT 的振荡型次谐波.

4.2. 振荡型周期轨道分叉的物理意义

将(4)和(5)式代入(23)式,并注意到实验的合理性,可将次谐波分叉的条件用原始参数表示为

$$\frac{\mu_0}{pv\kappa_0} < \left| \frac{\text{sech}[d \sqrt{m/(2K\beta)}\Omega_u]}{\sqrt{2mK\beta} \left[\frac{4}{\pi} E(\kappa) - (1 - \kappa^2)K(\kappa) \right]} \right| \quad (\kappa = \kappa_m^o), \quad (25)$$

注意到不等式条件(25)满足时,系统出现次谐波分叉,而分叉就意味着不稳定,适当调节系统参数,可以避免这种情况出现.从条件(25)可以看出:

1) 如果晶体不弯曲 ($\kappa_0 = 0$, 对应于直沟道), 不等式左端为无穷, 条件(25)永远不满足, 系统不存在分叉, 状态是数学稳定的. 换句话说, 对于直沟道, 引入正弦平方势系统不会出现分叉现象.

2) 系统弯曲越厉害 (κ_0 越小) 条件越不容易满足. 当它达到

$$(pv\kappa_0)_c$$

$$= \left| \frac{\mu_0 \sqrt{2mK\beta} \left[\frac{4}{\pi} E(\kappa) - (1 - \kappa^2)K(\kappa) \right]}{\text{sech}\left(\frac{d \sqrt{m/(2K\beta)}\Omega_u}{2}\right)} \right| \quad (26)$$

时,系统处于临界状态,当 $pv\kappa_0 < (pv\kappa_0)_c$ 系统是稳定的;当 $pv\kappa_0 > (pv\kappa_0)_c$ 时,条件(25)满足,系统不稳定.

3) 当系统阻尼系数 $(2\mu_0)$ 越小时,条件越容易

满足;换句话说,仅当阻尼足够强时才可能抑制分叉的发生.其临界值可表示为

$$(2\mu_0)_c = \left| \frac{pv\kappa_0 \text{sech}(d \sqrt{m/2K\beta}\Omega_u/2)}{2 \sqrt{2mK\beta} \left[\frac{4}{\pi} E(\kappa) - (1 - \kappa^2)K(\kappa) \right]} \right|, \quad (27)$$

也就是说,当阻尼系数满足条件 $2\mu_0 > (2\mu_0)_c$ 时,系统是稳定的.

5. 旋转型周期轨道的分叉现象

5.1. 旋转型周期轨道的 Melnikov 函数

对于任意一组互质正整数 m, n , 存在唯一的一个 $\kappa_{m/n}^r \in (0, 1)$, 使得 $T^r(\kappa_{m/n}^r) = 2\kappa_{m/n}^r K(\kappa_{m/n}^r) = \frac{m}{n}T = \frac{2\pi m}{n\omega}$, 构造这条轨道的 Melnikov 函数, 可得

$$M_r^{m/n}(\tau_0) = \int_0^{mT} \zeta_+^r(\tau, \kappa) [-2\mu\zeta_+^r(\tau, \kappa) + f\sin\omega(\tau + \tau_0)] d\tau = \begin{cases} \text{与 } \tau_0 \text{ 无关的常数} & (\text{当 } n \neq 1) \\ \frac{2f\pi}{\text{ch}(\kappa\omega K'(\kappa))} \left[\frac{2\mu}{\delta_m^r} + \sin\omega\tau_0 \right] & (\text{当 } n = 1) \end{cases}, \quad (28)$$

其中 ζ_+^r 由(11, 12)式给出, 其中

$$\delta_m^r = -\frac{\pi c_m}{4}, \quad c_m = \frac{f}{\text{ch}(\kappa\omega K'(\kappa))}, \quad b_m = \frac{4}{\pi}, \quad \kappa = \kappa_m^r, \quad (29)$$

而 κ 满足 $2\kappa K(\kappa) = \frac{2\pi m}{\omega}$, m 为正整数. 在参数 (f, μ) 平面上, 如果满足条件

$$\mu \leq |\delta_m^r/2|, \quad (30)$$

则对于充分小的 ε , 在无扰动系统(6)的旋转型周期解附近, 扰动系统存在同样类型的周期解. 由(28)式可以看出, Melnikov 函数的零点方程为

$$\frac{2\mu}{\delta_m^r} + \sin\omega\tau_0 = 0, \quad (31)$$

可见, 当 $\tau_0 \in [0, T]$ 时, Melnikov 函数有两个简单零点, 这就保证了在这个区间上总有一点可以使 $M_r^m(\tau_0)$ 的导数为负, 换句话说, 系统(3)总存在一

组稳定的周期为 mT 的旋转型次谐波.

5.2. 旋转型周期轨道分叉的物理意义

将(4)和(5)式代入(30)式,可将次谐波分叉的条件用原始参数表示为

$$\left| \frac{-2\mu_0}{p\nu\kappa_0} \right| < \frac{\pi \operatorname{sech}[d \sqrt{m/(2K\beta)} \Omega_u/2]}{\sqrt{2mK\beta}} \quad (\kappa = \kappa_m^\circ), \quad (32)$$

注意到不等式条件(32)满足时,系统出现次谐波分叉,而分叉就意味着不稳定,适当调节系统参数,可以避免这种情况出现.从条件(32)可以看出:

1) 如果晶体不弯曲($\kappa_0 = 0$, 对应于直沟道), 不等式(32)左端为无穷, 条件(32)永远不满足, 系统不存在分叉, 状态是数学稳定的. 换句话说, 对于直沟道, 引入正弦平方势系统不会出现分叉现象.

2) 系统弯曲越厉害(κ_0 越小) 条件越不容易满足. 当它达到

$$(p\nu\kappa_0)_c = \left| \frac{2\mu_0 \sqrt{2mK\beta}}{\pi \operatorname{sech}(d \sqrt{m/(2mK\beta)} \Omega_u/2)} \right| \quad (33)$$

时, 系统处于临界状态, 当 $p\nu\kappa_0 < (p\nu\kappa_0)_c$ 系统是稳定的, 当 $p\nu\kappa_0 > (p\nu\kappa_0)_c$ 时, 条件(32)满足, 系统不稳定.

3) 当系统阻尼系数($2\mu_0$) 越小时, 条件越容易满足; 换句话说, 仅当阻尼足够强时才可能抑制分叉的发生. 其临界值可表示为

$$(2\mu_0)_c = \frac{\pi p\nu\kappa_0 \operatorname{sech}(d \sqrt{m/(2K\beta)}/2)}{\sqrt{2mK\beta}}, \quad (34)$$

也就是说, 当阻尼系数满足条件 $2\mu_0 > (2\mu_0)_c$ 时, 系统是稳定的.

注意到, 旋转型周期轨道描写的是系统围绕不

平衡点做周期运动的情形, 其特点是随着时间 t 增加, 坐标 ξ 也增加, 当时间 t 趋于无穷时, 坐标 ξ 也趋于无穷, 这正是 Poincare 定义的数学不稳定. 在我们关心的情况下, 旋转型周期轨道描写的是粒子跨越势垒在沟道之间的运动行为, 确切地说, 做旋转周期运动的带电粒子, 在 x 方向不断跨越沟道势垒运动的同时, 在 z 方向也以 $v \approx c$ 的速度运动. 在晶体中做这种运动的粒子称为准沟道粒子, 准沟道粒子同样向外辐射能量, 这种辐射称为准沟道辐射. 这种辐射对晶体摆动场辐射是否有影响, 影响有多大, 我们将另文讨论.

6. 结 论

在线性近似下, 有人对沟道辐射和摆动场辐射进行了分析, 明确指出利用周期弯曲晶体来获得短波长激光是完全可能的、也是完全可行的, 并把注意力集中在实验的改进与技术的实现上. 本文进一步考虑了运动阻尼和非线性的影响. 引入正弦平方势, 在经典力学框架内和偶极近似下, 把粒子的运动方程化为具有阻尼项和受迫项的广义摆方程. 利用 Jacob 椭圆函数和椭圆积分分析了无扰动系统的相平面特征, 发现相平面上的轨道分为异宿轨道、周期轨道和旋转周期轨道三类; 进一步利用 Melnikov 方法分析了这三类轨道的分叉性质或进入 Smale 马蹄意义下的混沌行为, 找到了系统的全局分叉与系统进入混沌的临界条件. 结果表明, 系统分叉与进入混沌的临界条件同具体的物理参数有关, 只需适当(或综合)调节这些参数就可以原则上避免或抑制分叉或混沌的发生, 从而保证系统的稳定性, 保证系统能够稳定输出晶体摆动场辐射的可能性, 为寻找 X 激光或 γ 激光提供进一步理论分析.

[1] Kumakhov M A 1976 *Phys. Lett. A* **57** 17

[2] Shao M Z, Luo S Y 1986 *Chin. Laser* **13** 607 (in Chinese) [邵明珠、罗诗裕 1986 中国激光 **13** 607]

[3] Korol A, Solovoyov A V, Greiner W 1998 *J. Phys. G* **24** L45

[4] Korol A, Solovoyov A V, Greiner W 1999 *Int. J. Mod. Phys. E* **8** 49

[5] Gevorging L A, Hovsepyan L A 2007 *J. Contemp. Phys.* **42** 87

[6] Luo S Y, Shao M Z 2005 *High Energ. Phys. Nucl. Phys.* **29** 193 (in Chinese) [罗诗裕、邵明珠 2005 高能物理与核物理 **29** 193]

[7] Korol A V, Solovoyov A V, Greiner W 2008 *Nucl. Inst. Method. Phys. Res. B* **266** 1173

[8] Wiedemann H 2006 *Advance Radiation Sources and Application* (Netherlands: Springer) p165

[9] Tabrizi M, Korol A V, Solovoyov A V 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 164801

[10] Korol A V, Solovoyov A V, Greiner W 2004 *Int. J. Mod. Phys. E* **13** 867

[11] Wiedemann H 2006 *Advance Radiation Sources and Application* (Netherlands: Springer) p191

- [12] Luo S Y, Shao M Z 2009 *Chin. Laser* **36** 1378 (in Chinese) [罗诗裕、邵明珠 2009 中国激光 **36** 1378]
- [13] Luo S Y, Shao M Z 2003 *Chin. J. Semiconductors* **24** 485 (in Chinese) [罗诗裕、邵明珠 2003 半导体学报 **24** 485]
- [14] Luo S Y, Shao M Z 1984 *Chin. Phys.* **4** 670
- [15] Luo S Y, Shao M Z 2005 *Chin. J. Semiconductors* **26** 294 (in Chinese) [罗诗裕、邵明珠 2005 半导体学报 **26** 294]
- [16] Luo S Y, Shao M Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1324 (in Chinese) [罗诗裕、邵明珠 2006 物理学报 **55** 1324]
- [17] Deng C L, Shao M Z, Luo S Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1721 (in Chinese) [邓成良、邵明珠、罗诗裕 2006 物理学报 **55** 1721]
- [18] Shao M Z, Luo S Y 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4092 (in Chinese) [邵明珠、罗诗裕 2005 物理学报 **54** 4092]
- [19] Luo S Y, Shao M Z 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1157 (in Chinese) [罗诗裕、邵明珠 2004 物理学报 **53** 1157]
- [20] Luo S Y, Shao M Z 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1940 (in Chinese) [罗诗裕、邵明珠 2004 物理学报 **53** 1940]
- [21] Shao M Z, Luo S Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3407 (in Chinese) [邵明珠、罗诗裕 2007 物理学报 **56** 3407]

The global bifurcation and chaotic behaviours for the crystalline undulator radiation*

Luo Shi-Yu¹⁾ Shao Ming-Zhu¹⁾ Luo Xiao-Hua^{2)†}

1) (College of Electronic Engineering, Dongguan University of Technology, Dongguan 523106, China)

2) (College of Electric Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

(Received 5 May 2009; revised manuscript received 23 July 2009)

Abstract

Introducing sine-squared potential, the particle motion equation in the crystalline undulator field is reduced to the generalized pendulum equation with a damping and a force terms in the classical mechanics frame in the dipole approximation. The properties of the phase plane are analysed for a non-perturbed system by means of Jacobian elliptic function and the elliptic integral, and the solution of the equation and the period of the particle motion for this system are expressed exactly. The global bifurcation and a chaotic behaviour with the Smale horseshoe for the 3 kinds of orbits in a phase plane are analysed by Melnikov method. The critical condition of the system entering into a bifurcation or a chaos is found. The result shows that critical condition is related to the parameters of the system, by suitably regulating the parameters of the system, the bifurcation or the chaos can be avoided or controlled in principle.

Keywords: crystalline undulator radiation, Melnikov method, bifurcation, chaos

PACC: 6180M, 7550R

* Project supported by the Natural Science Foundation of Guangdong Province, China (Grant No. 8151170003000010).

† Corresponding author. E-mail: bgluoshy@dgut.edu.cn