

任意正多边形量子环自旋输运的普遍解^{*}

付 邦 邓文基[†]

(华南理工大学物理系, 广州 510641)

(2009 年 6 月 16 日收到; 2009 年 7 月 30 日收到修改稿)

在有关偶数正多边形量子环对称连接特殊情形的自旋输运特性的研究基础上, 进一步探讨了任意正多边形量子环的自旋输运性质. 不仅解析地求解了相关电子散射问题, 而且得到了 Landauer-Buttiker 电导的普遍公式, 并讨论了它的圆环极限和 Aharonov-Casher 相位问题. 结合数值计算, 研究了正多边形量子环的 Landauer-Buttiker 电导随多边形边数、引线连接方式、自旋轨道耦合强度以及电子波矢的周期变化特性和零点分布规律.

关键词: Rashba 自旋-轨道耦合, Aharonov-Casher 相位, 量子网络, 量子输运

PACC: 7320D, 7335, 7170C

1. 引 言

在结构反演对称性破缺的固体材料或器件中, 自旋-轨道耦合 (SOC) 将导致 Rashba 效应^[1-8]. 由于 Rashba 耦合强度敏感地依赖于外电场^[9,10], 人们期待可以利用 Rashba 效应实现对电子自旋的量子调控^[11]. 众所周知, 电线的走向并不影响经典电子线路的电导性质, 甚至在普通量子网络中也无须特别关注网线的曲直^[12], 但 SOC 却明显地依赖于电子的运动速度和方向, 即导线的弯曲形状. 可以想象, 若将圆形量子环扭曲为正多边形, 其自旋输运特性将由于 Rashba 效应而发生显著变化. 人们不仅从理论上研究了圆形^[13-21] 和正多边形量子环^[22-28] 的自旋输运特性, 而且还在实验室制备了不同的正多边形^[10] 和圆形量子环阵列^[29-31]. 有关理论研究和数值模拟^[32,33] 也能够较好地解释电导测量的实验结果^[29].

正多边形量子环及其阵列的自旋输运特性研究是一个典型的量子网络问题^[12,23,24,26]. 原则上, 人们可以列出任何复杂量子网络中电子波函数的联立方程组, 并采用数值方法计算求解^[23,24,26,32], 但是严格的解析结果却不多见. 虽然有些论文报道了有关正多边形量子环电导的解析表达式, 但事实上都包含了一些不严格的假设或近似^[22,26,27]. 我们在最

近的一篇文章中^[28] 严格地研究了存在 Rashba SOC 的正多边形量子环的自旋输运特性. 采用量子网络的典型方法^[12,23] 和 Landauer-Buttiker 电导公式^[34], 不仅严格求解了电子通过正多边形量子环的散射问题, 得到了电导的解析表达式, 而且还通过数值计算分析研究了量子环电导随入射电子能量 (或波矢) 和自旋轨道相互作用强度变化的复杂形式. 有关的解析结果还被推广到正多边形环的边数 N 趋近于无穷大的极限情形, 与直接采用圆环模型获得的结果完全一致.

受过去同类工作的影响^[23-27], 前一篇论文只局限于研究多边形的边数 N 为偶数的特殊情形, 并要求入射引线和出射引线连接在正多变形的对称节点上. 为此, 本文将有关研究推广到入射和出射引线非对称连接的普遍情形, 而且不必要求正多边形量子环的边数为偶数. 第 2 节建立了正多边形量子环自旋输运问题的网络模型, 并给出了描述电子散射过程的基本理论. 第 3 节求解了电子通过正多边形量子环非对称情形时的散射问题, 得到了透射振幅和反射振幅的解析表达式; 在此基础上还得出了非对称情形下正多边形量子环 Landauer-Buttiker 电导的普遍公式. 第 4 节为简短的结论.

2. 模型和基本公式

考虑如图 1 所示的正 N 边形量子环. N 段长度

* 华南理工大学中央高校基本科研业务费 (批准号: 2009ZM0299) 资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: phwjden@scut.edu.cn

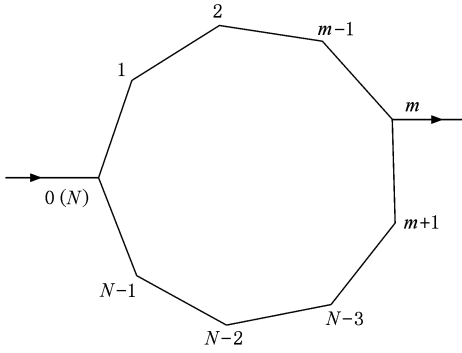


图1 正 N 边形量子环示意图 ($N=9, m=4$) 环上两个节点 0 和 m 分别通过引线左右电子库相连

相等同为 l 的量子线在 $x-y$ 平面内连接成正多边形量子网络. 量子线上存在 Rashba 形式的自旋轨道耦合相互作用, 左右外界电子库通过入射和出射引线分别连接到正多边形环上的节点 0 和 m 上. 在零偏压极限下, 该系统内存 在由左端电子库向右端电子库的电流. 与前一项研究的主要区别是我们不再限制多边形的边数, 也不要求入射和出射引线与多边形的连接点对称分布. 忽略子带杂交效应, 假定量子线是单通道的, 则描述电子在沿 $\hat{\gamma}$ 方向量子线上运动的 Hamilton 量可以写作^[22-27]

$$H = \frac{p_\gamma^2}{2m^*} - \frac{\hbar k_{so}}{m^*} p_\gamma (\hat{z} \times \hat{\gamma}) \cdot \sigma, \quad (1)$$

其中 $p_\gamma = -i\hbar\partial/\partial\ell$ 是沿 $\hat{\gamma}$ 方向运动的电子的动量算符, m^* 是电子的有效质量 (为简单起见, 我们忽略了金属引线和半导体量子阱中电子有效质量的差别), σ 为泡利算符, \hat{z} 表示垂直于多边形环平面的 z 轴正方向的单位矢量, 而 k_{so} 描述 Rashba SOC 的强度 α , 并且 $k_{so} = m^* \alpha / \hbar^2$.

考虑能量为 E 的电子由左端引线射入正多边形量子环, 在左右两端引线上电子的波函数可分别设为

$$\begin{aligned} \psi_{\text{left}}(\ell) &= Ae^{ik_0\ell} + Be^{-ik_0\ell}, \\ \psi_{\text{right}}(\ell) &= Fe^{ik_0\ell}, \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $k_0 = \sqrt{2m^*E/\hbar}$, 表示入射电子的波数, A, B 和 F 分别是入射、反射和透射波函数的概率幅, ℓ 是外部连线上的坐标. 电子在直线量子线 ab 上任意点 l 处的波函数可由两端点的波函数 ψ_a 和 ψ_b 表示为^[23,28]

$$\begin{aligned} \psi_{ab}(\ell) &= \frac{e^{ik_{so}l(\hat{z} \times \hat{\gamma}_{ab}) \cdot \sigma}}{\text{sink}l} [\psi_a \text{sink}(l - \ell) \\ &+ e^{-ik_{so}l(\hat{z} \times \hat{\gamma}_{ab}) \cdot \sigma} \psi_b \text{sink}\ell], \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $k = \sqrt{k_0^2 + k_{so}^2}$, 此时 ℓ 描述电子在量子线上沿 $\hat{\gamma}_{ab}$ 方向由 a 到 b 的位置坐标, 且 $\ell_a = 0, \ell_b = l$. 采用文献^[28]类似的数学方法和分析技巧, 可以推导出波函数遵循的 Schrödinger 方程, 即关于 $N+2$ 个未知旋量波函数 $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_N$ 和 F, B 的如下 $N+2$ 个联立方程组

$$\psi_0 = A + B, \quad (4)$$

$$\psi_m = F, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} R_{0,N-1}\psi_{N-1} - 2\cos(kl)\psi_0 + R_{0,1}\psi_1 \\ = -\frac{ik_0 \text{sink}l}{k}(B - A), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} R_{m,m-1}\psi_{m-1} - 2\cos(kl)\psi_m + R_{m,m+1}\psi_{m+1} \\ = -\frac{ik_0 F \text{sink}l}{k}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} R_{n,n-1}\psi_{n-1} - 2\cos(kl)\psi_n + R_{n,n+1}\psi_{n+1} \\ = 0 \quad (n \neq 0, m) \end{aligned} \quad (8)$$

其中旋转算符定义为

$$R_{ab} = e^{-ik_{so}l(\hat{z} \times \hat{\gamma}_{ab}) \cdot \sigma}. \quad (9)$$

方程组(4)–(8)完备地描述电子由左端引线入射的相干散射问题, 入射波函数 A 是由实验给定的已知条件. 利用(8)式可以消除引线连接点以外的其他节点波函数, 以上方程组可进一步简化为关于入射波幅 A 、反射波幅 B 和透射波幅 F 的两个联立方程

$$\begin{aligned} \frac{ik}{k_0} [U_{m,0}D_{N,m} + D_{m,N}U_{0,m} - 2\cos(kNl)]F \\ = F \sin(kNl) + D_{m,N}(B - A) \sin(kml) \\ + U_{m,0}(B - A) \text{sink}(N - m)l, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{ik}{k_0} [D_{N,m}U_{m,0} + U_{0,m}D_{m,N} - 2\cos(kNl)](A + B) \\ = (B - A) \sin(kNl) + D_{N,m}F \sin(kml) \\ + U_{0,m}F \text{sink}(N - m)l, \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $U_{m,0} \equiv R_{m,m-1}R_{m-1,m-2} \cdots R_{1,0}$ 和 $D_{N,m} \equiv R_{N,N-1}R_{N-1,N-2} \cdots R_{m+1,m}$ 分别涉及量子环上臂和下臂的旋转算符的连乘, 并且 $U_{0,m} = U_{m,0}^{-1}, D_{m,N} = D_{N,m}^{-1}$.

区别于文献^[28]中相对繁琐的计算方法, 将(9)式定义的旋转算符改写为

$$R_{n+1,n} = e^{-i\vartheta_{n+1,n}\sigma_z/2} e^{-ik_{so}\sigma_x} e^{i\vartheta_{n+1,n}\sigma_z/2}, \quad (12)$$

其中 $\vartheta_{n+1,n}$ 是由节点 $n+1$ 指向 n 的有向线段与 x 轴正向的夹角, 并且 $\vartheta_{n,n+1} = \vartheta_{n+1,n} + \pi, R_{n,n+1} = R_{n+1,n}^{-1}$. 旋转算符的连乘 $U_{m,0}$ 和 $D_{N,m}$ 可以简化为

$$U_{m,0} = e^{-i\vartheta_{m,m-1}\sigma_z/2} [e^{-ik_{so}\sigma_x} e^{i\delta\sigma_z/2}]^m \times e^{i(\vartheta_{1,0}-\delta)\sigma_z/2}, \quad (13)$$

$$D_{N,m} = e^{-i\vartheta_{N,N-1}\sigma_z/2} [e^{-ik_{so}\sigma_x} e^{i\delta\sigma_z/2}]^{N-m} \times e^{i(\vartheta_{m+1,m}-\delta)\sigma_z/2}, \quad (14)$$

其中 $\delta = \vartheta_{n,n-1} - \vartheta_{n+1,n} = 2\pi/N$ 为如图 1 所示的正 N 边形的外角. 再利用

$$e^{-ik_{so}\sigma_x} e^{-i\delta\sigma_z/2} = \cos \frac{\delta}{2} \text{cos} k_{so} - i \left[\left(\sigma_x \cos \frac{\delta}{2} + \sigma_y \sin \frac{\delta}{2} \right) \text{sin} k_{so} - \sigma_z \sin \frac{\delta}{2} \text{cos} k_{so} \right], \quad (15)$$

计算可得

$$U_{m,0} = \cos m\phi \cos \frac{m\pi}{N} + \frac{\sin m\phi}{\sin \phi} \sin \frac{\delta}{2} \sin \frac{m\pi}{N} \text{cos} k_{so} + i \left(\cos m\phi \sin \frac{m\pi}{N} \frac{\sin m\phi}{\sin \phi} \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{m\pi}{N} \text{cos} k_{so} \right) \sigma_z + i \left(\sigma_y \sin \frac{m\pi}{N} - \sigma_x \cos \frac{m\pi}{N} \right) \frac{\sin m\phi}{\sin \phi} \text{sin} k_{so}, \quad (16)$$

$$D_{N,m} = \frac{\sin(N-m)\phi}{\sin \phi} \sin \frac{\delta}{2} \sin \frac{m\pi}{N} \text{cos} k_{so} - \cos(N-m)\phi \cos \frac{m\pi}{N} + i \left[\frac{\sin(N-m)\phi}{\sin \phi} \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{m\pi}{N} \text{cos} k_{so} + \cos(N-m)\phi \sin \frac{m\pi}{N} \right] \sigma_z + i \left[\sigma_x \cos \frac{m\pi}{N} - \sigma_y \sin \frac{m\pi}{N} \right] \times \frac{\sin(N-m)\phi}{\sin \phi} \text{sin} k_{so}, \quad (17)$$

其中参数 ϕ 由方程

$$\cos \phi = \cos \frac{k_{so}L}{N} \cos \frac{\pi}{N} \quad (18)$$

确定,且 $L = NL$. 代入(10)和(11)两式,可以得到反射波 B 和透射波 F 与入射波 A 的关系,即

$$B = A \{ \text{cos} k(N-2m)l - \text{cos} kNl + (2k/k_0)^2 (\text{cos} kNl + \text{cos} N\phi) \} / \{ \text{cos} k(N-2m)l - \text{cos} kNl - (2k/k_0)^2 (\text{cos} kNl + \text{cos} N\phi) + (4ik/k_0) \text{sin} kNl \}, \quad (19)$$

$$F = A \{ D_{m,N} \text{sin}(kml) + U_{m,0} \text{sin}(N-m)kl \} / \{ (k_0/4ik) [\text{cos} k(N-2m)l - \text{cos} kNl - (2k/k_0)^2 (\text{cos} kNl + \text{cos} N\phi)] + \text{sin} kNl \}. \quad (20)$$

由此可见,相对于入射电子波,反射波的电子自旋态不变,而透射波电子自旋方向将由于 SOC 而进动. 详细计算还可得到处于任意自旋态 A 的入射电子的反射率和透射率公式

$$R = \frac{B^\dagger B}{A^\dagger A} = [\text{cos} k(N-2m)l - \text{cos} kNl + (2k/k_0)^2 (\text{cos} N\phi + \text{cos} kNl)]^2 / \{ [\text{cos} k(N-2m)l - \text{cos} kNl - (2k/k_0)^2 (\text{cos} N\phi + \text{cos} kNl)]^2 + (4k/k_0)^2 \text{sin}^2 kNl \}, \quad (21)$$

$$T = \frac{F^\dagger F}{A^\dagger A} = [\text{sin}^2 k(N-m)l + \text{sin}^2 kml - 2 \text{sin} k(N-m)l \text{sin} kml \text{cos} N\phi] / \{ (k_0/4k)^2 [\text{cos} k(N-2m)l - \text{cos} kNl - (2k/k_0)^2 (\text{cos} N\phi + \text{cos} kNl)]^2 + \text{sin}^2 kNl \}, \quad (22)$$

不难验证它们仍然满足概率流守恒的要求 $R + T = 1$.

根据 Landauer-Buttiker 公式^[28,34] 计算可得任意正多边形环电导的解析表达式,即

$$G/G_0 = [\text{sin}^2(N-m)kl + \text{sin}^2 mkl - 2 \text{sin}(N-m)kl \text{sin} mkl \text{cos} N\phi] / \{ (k_0/4k)^2 [\text{cos}(N-2m)kl - \text{cos} kNl - (2k/k_0)^2 (\text{cos} kNl + \text{cos} N\phi)]^2 + \text{sin}^2 kNl \} \quad (23)$$

其中电导常数 $G_0 = 2e^2/h$. 如果正多边形边数 N 为偶数,记为 $2N$,入射引线与出射引线分别连接在对称的节点上,分别记为 0 和 $m = N$,电导公式(23)立即简化为文献[28]中得到的(36)式.

3. 数值分析

在第 2 节的基础上,我们可以对电子通过量子环的相干输运过程做更细致地分析.(23)式可以整理为

$$G/G_0 = [1 - (\text{cos} \Phi + \text{cos} \Phi_{AC}) \text{cos} \Delta + \text{cos} \Phi \text{cos} \Phi_{AC}] / \{ (k_0/4k)^2 [\text{cos} \Delta - \text{cos} \Phi - (2k/k_0)^2 (\text{cos} \Phi + \text{cos} \Phi_{AC})]^2 + \text{sin}^2 \Phi \}, \quad (24)$$

其中 $\Phi = kNl$ 标记电子绕量子环一周的传播相位, $\Delta = k(2m - N)l$ 标记电子波由入射节点分别通过上

下臂传播到出射节点的相位差, $\Phi_{AC} = N\phi$ 称为 Aharonov-Casher (A-C) 相位^[35]. 若以边数 N 趋于无穷大的正多边形逼近圆环, 则 $\delta = \frac{2\pi}{N} \rightarrow 0, k_{so}L/N \rightarrow 0, \phi \rightarrow 0$, 并且 A-C 相位取确定值 $\Phi_{AC}^* = \sqrt{\pi^2 + (k_{so}L)^2}$, 可以简单地重新得到圆形量子环电导的各种解析表达式^[13-21].

在实际问题中, 例如 InAlAs/InGaAs 异质结^[28,29], k_{so} 取值在 $1.31-5.87 \mu\text{m}^{-1}$ 之间, 入射电子的 Fermi 波长约为 $\lambda_F \approx 31.4 \text{ nm}$, 因而 $k_0 \approx 0.2 \text{ nm}^{-1}$, $k_0/k_{so} \approx 17-76$, 即 $k_{so}/k_0 \ll 1, k \approx k_0$. (24) 式还可以简化为许多不同的常见近似表达式^[22-27], 即

$$G/G_0 \approx \frac{1 - \cos\Phi \cos\Delta + (\cos\Phi - \cos\Delta) \cos\Phi_{AC}}{[(\cos\Delta - 5\cos\Phi)/4 - \cos\Phi_{AC}]^2 + \sin^2\Phi}, \quad (25)$$

如果不存在 SOC, 则 $\Phi_{AC} = \pi$, (25) 式进一步简化为电子通过简单介观环的相干输运电导公式^[28].

根据 (24) 或 (25) 式, 多边形量子环的电导主要依赖于电子波函数的传播相位 Φ , 传播相位差 Δ 和 AC 相位 Φ_{AC} 三个独立因素. 对于给定周长 L 的量子环, 传播相位 Φ 主要受控于入射电子的能量; 在固定入射节点的前提下, 选择不同的出射节点 m 可以方便地改变传播相位差 Δ ; 而 AC 相位 Φ_{AC} 不仅依赖于自旋轨道耦合强度 k_{so} , 还依赖于正多边形的边数 N , 但不依赖于量子环上下臂的长度差, 即与入射引线和出射引线连接量子环节点的位置无关.

对于给定的正多边形量子环结构, 主要是通过调节门电压改变 A-C 相位以实现自旋输运特性的调控. 注意到 A-C 相位最终只是通过 $\cos\Phi_{AC}$ 影响电导, 可以根据 (18) 式直接计算得到

$$\Phi_{AC} = N \arccos \left(\cos \frac{k_{so}L}{N} \cos \frac{\pi}{N} \right). \quad (26)$$

图 2(a) 显示了在给定的自旋-轨道耦合强度 $k_{so}L$ 情形下, 参量 $\eta = 1 - \Phi_{AC}/\Phi_{AC}^*$ 随多边形边数 N 的变化方式. 显然边数不必太大, 即 $N \geq 10$ 时, 正多边形的 A-C 相位 Φ_{AC} 与圆环的 A-C 相位 Φ_{AC}^* 已无显著差别. 以 $N=3, 4, 7, 100$ 为例, 图 2(b) 显示了正多边形量子环的 A-C 相位 Φ_{AC} 对自旋-轨道耦合强度 $k_{so}L$ 的依赖关系. 根据 (26) 式, Φ_{AC} 随 $k_{so}L/N$ 变化的曲线将以 2π 为周期, 并且在 $[0, 2\pi]$ 周期内关于 $k_{so}L/N = \pi$ 对称. 我们还可以确定图中一些关键点的数据, 例如 $k_{so}L/N = 0$, 则 $\Phi_{AC} = \pi$; $k_{so}L/N = \pi/2$, 则 $\Phi_{AC} = N\pi/2$; $k_{so}L/N = \pi$, 则 $\Phi_{AC} = (N-1)$

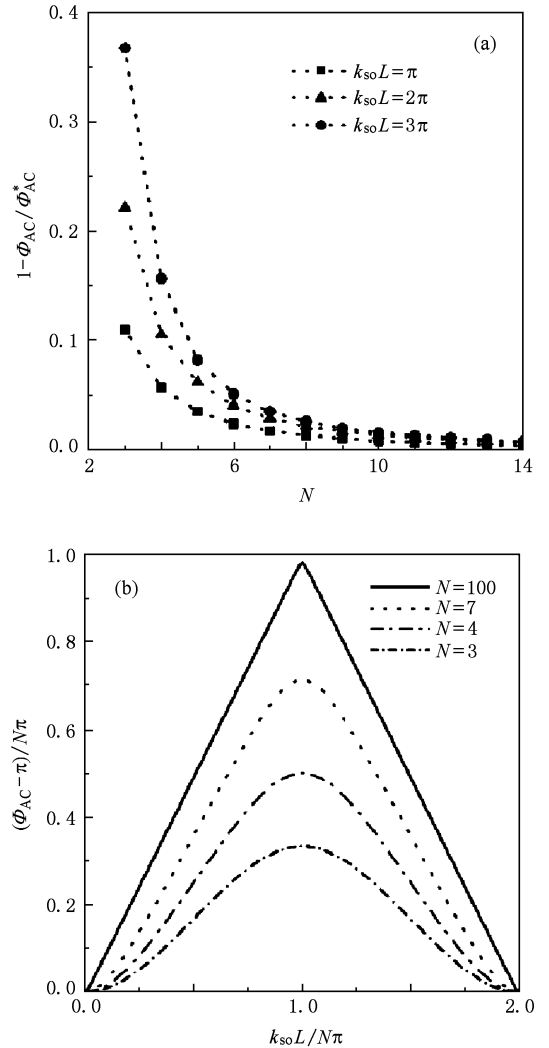


图 2 A-C 相位 Φ_{AC} 随多边形边数 N 和自旋轨道耦合强度 k_{so} 的变化 (a) 以参量 $\eta = 1 - \Phi_{AC}/\Phi_{AC}^*$ 描写正 N 边形的 A-C 相位与圆环 A-C 相位 $\Phi_{AC}^* = \sqrt{\pi^2 + (k_{so}L)^2}$ 的相对偏差, 其中三条曲线对应的 SOC 分别选为 $k_{so}L = \pi, 2\pi, 3\pi$; (b) 电子通过正多边形的 A-C 相位 $\Phi_{AC} = N\phi$ 随 $k_{so}L/N$ 的变化, 多边形的边数选为 $N = 3, 4, 7, 100$

π . 所以在 $k_{so}L/N$ 由 0 到 π 的变化过程中, Φ_{AC} 由 π 单调递增至 $(N-1)\pi$, 变化区间大小为 $(N-2)\pi$. 多边形边数 N 的奇偶性将显著地影响电导公式中 $\cos\Phi_{AC}$ 项随 $k_{so}L/N$ 变化的周期性. 若 N 为奇数, 周期为 2π , 若 N 为偶数, 周期减半为 π .

正多边形的电导 G 还通过传播相位 Φ 和传播相位差 Δ 随入射电子能量或波矢 k 变化. 由于 $\Phi = kL, \Delta = (2m - N)kL/N$, 电导 G 随 kL 变化的最小周期应该是 $2\pi P_{N,m}$, 此处 $P_{N,m}$ 表示整数 N 除去它和 $2m - N$ 的最大公约数后所得的整数. 例如, 若 $m = 0$, 则 $P_{N,0} = 1$, 表明在出射与入射引线连接于同一节

点上的方式下任意正多边形量子环的电导随 kL 的变化周期都是 2π ;若偶数正多边形作对称连接,则 $P_{2m,m} = 1$,电导随 kL 的变化周期也是 2π ;若取 $N = 7, m = 4$,则 $P_{7,4} = 7$,电导随 kL 的变化周期为 14π .若取 $N = 10, m = 3$,则 $P_{10,3} = 5$,电导随 kL 的变化周期为 10π .图 3 显示了在给定 $\Phi_{AC} = \pi/4$ 的前提下,不同的正 N 边形采用不同的连接方式 m 时,电导 G 随 $kL/P_{N,m}$ 变化的最小周期均为 2π .

至此,我们根据电导公式(24)或(25)分析了正多边形电导随正多边形边数 N ,引线连接方式 m ,电子波矢 k 以及自旋-轨道耦合强度 k_{so} 等各种因素的变化方式.我们发现不同量子环的电导振荡曲线可以统一在 G 随 $kL/P_{N,m}$ 和 $k_{so}L/N$ 变化的等高线图中.图 4 给出了一些有代表性的结果.根据前面图 2 关于 A-C 相位随 $k_{so}L/N$ 变化最小周期的讨论,我们将图形按正多边形奇偶性分列左右.奇数边量子环电导图列于左侧(a, c, e),最小周期为 2π ;偶数边量子环电导图列于右侧(b, d, f),最小周期为 π .

根据普遍的电导公式(23)还可以证明,当且仅当正多边形边数为偶数且入射和出射引线对称连接,即 $N = 2m$ 的特殊情形下,存在由 $\cos\Phi_{AC} = 1$ 完全确定的普遍电导零点,如图 4(d)所示.利用(26)

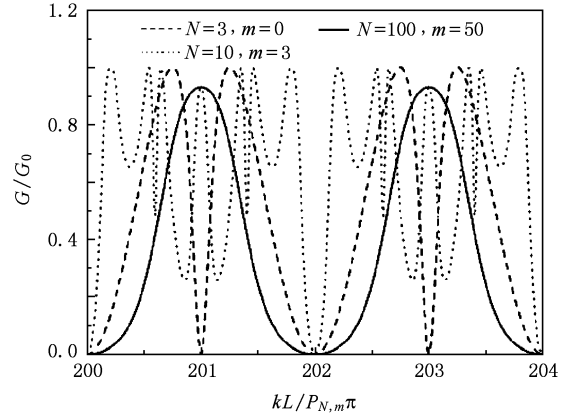


图 3 正 N 边形电导 G 随 $kL/P_{N,m}$ 的变化 引线连接多边形的方式 $[N, m]$ 分别选为 $[3, 0]$, $[100, 50]$ 和 $[10, 3]$, A-C 相位统一取为 $\Phi_{AC} = \pi/4$

式,这些电导零点对应的自旋-轨道耦合强度由下式给定,即

$$\cos(k_{so}L/N) = \frac{\cos(2n\pi/N)}{\cos(\pi/N)}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots, \infty). \quad (27)$$

最后需要强调指出的是,量子网络的基本方程(4)一(8)各式并不直接适应于出射引线和入射引

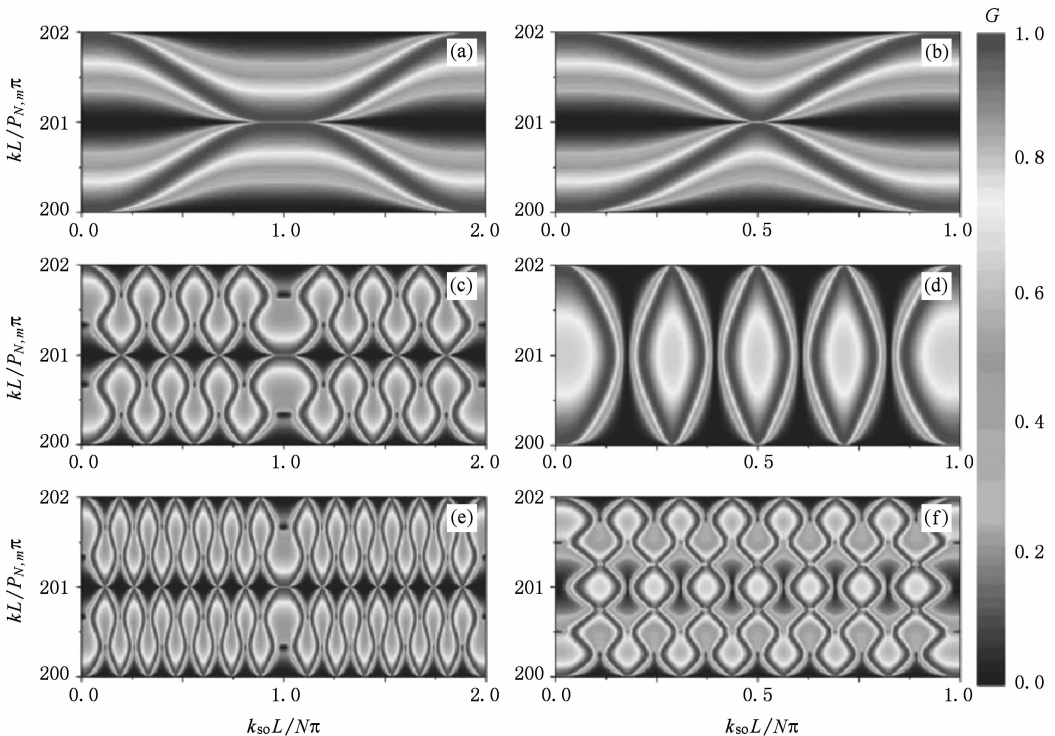


图 4 不同连接方式下多边形电导 G 随波矢 kL 和自旋轨道耦合强度 $k_{so}L$ 变化的等高线图 (a) $N = 3, m = 0$, 且 $P_{3,0} = 1$; (b) $N = 4, m = 0$, 且 $P_{4,0} = 1$; (c) $N = 9, m = 3$, 且 $P_{9,3} = 3$; (d) $N = 10, m = 5$, 且 $P_{10,5} = 1$; (e) $N = 15, m = 5$, 且 $P_{15,3} = 3$; (f) $N = 16, m = 6$, 且 $P_{16,6} = 4$

线连接到同一节点,即 $m = 0$ 的特殊连接方式. 但是经过详细计算以后仍然得到

$$G/G_0 \approx \frac{\sin^2 \Phi}{(\cos \Phi + \cos \Phi_{AC})^2 + \sin^2 \Phi}, \quad (28)$$

它也可以作为 $\Delta = 0$ 的特例由一般电导公式(25)直接得到. 众所周知,如果不考虑量子效应,这样连接的经典电路实际上是短路的,附着在直导线上的环形电路不影响系统的导电性质,然而量子干涉和自旋进动给出了丰富的电导模式. 具有确定波矢的电子,其传播相位 $\Phi = kL$ 只依赖于量子环的周长,正多边形的边数 N 只能通过(26)式决定的 A-C 相位 Φ_{AC} 影响系统的 Landauer-Buttiker 电导. 显然, $\Phi = kL = n\pi$ (其中 n 为正整数)总是给出任意正多边形与 $k_{so}L/N$ 无关的电导零点.

4. 结 论

本文系统地研究了存在 Rashba 自旋-轨道相互

作用的任意正多边形量子环在任意引线连接方式下的自旋输运特性,推广了过去关于偶数边正多边形对称连接特殊情形下量子环自旋输运特性的研究成果,为进一步的实验研究提供了一系列可检测的物理现象和物理效应. 运用量子网络的典型方法和 Landauer-Buttiker 公式,我们严格求解了电子通过正多边形量子环的散射问题,并得到了电导的解析表达式. 我们特别分析了 Landauer 电导随自旋-轨道耦合强度 k_{so} 和电子波矢 k 的周期变化特性和电导零点分布. 研究发现电导直接依赖 A-C 相位、传播相位和传播相位差,各种正 N 边形不同连接方式下电导随耦合强度和电子波矢的变化具有普适性,可以统一地分析为随 $kL/P_{N,m}$ 和 $k_{so}L/N$ 的变化规律. 对于正多边形环边数趋近于无穷大 ($N \rightarrow \infty$) 时的极限情形,再一次证明了有关正多边形的散射问题和电导公式与直接采用圆形量子环模型得到的相应结果完全一致.

- [1] Winkler R 2003 *Spin-orbit Coupling Effects in Two-dimensional Electron and Hole Systems* (Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag) p69
- [2] Grundler D 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 6074
- [3] Sato Y, Kita T, Gozu S, Yamada S 2001 *J. Appl. Phys.* **89** 8017
- [4] Qiu Z J, Gui Y S, Shu X Z, Dai N, Guo S L, Chu J H 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1186 (in Chinese) [仇志军、桂永胜、疏小舟、戴宁、郭少令、褚君浩 2004 物理学报 **53** 1186]
- [5] Song H Z, Zhang P, Duan S Q, Zhao X G 2006 *Chin. Phys.* **15** 3019
- [6] Zhu B, Gui Y S, Qiu Z J, Zhou W Z, Yao W, Guo S L, Chu J H, Zhang F J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 786 (in Chinese) [朱博、桂永胜、仇志军、周文政、姚炜、郭少令、褚君浩、张福甲 2006 物理学报 **55** 786]
- [7] Zhou W Z, Lin T, Shang L Y, Huang Z M, Cui L J, Li D L, Gao H L, Zeng Y P, Guo S L, Gui Y S, Chu J H 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 4099 (in Chinese) [周文政、林铁、商丽燕、黄志明、崔利杰、李东临、高宏玲、曾一平、郭少令、桂永胜、褚君浩 2007 物理学报 **56** 4099]
- [8] Xu T N, Wu H Z, Sui C H 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7865 (in Chinese) [徐天宁、吴惠楠、隋成华 2008 物理学报 **57** 7865]
- [9] Nitta J, Akazaki T, Takayanagi H, Enoki T 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 1335
- [10] Koga T, Sekine Y, Nitta J 2006 *Phys. Rev. B* **74** 041302R
- [11] Zutic I, Fabian J, Sarma S D 2004 *Rev. Mod. Phys.* **76** 323
- [12] Xia J B 1992 *Phys. Rev. B* **45** 3593
- [13] Nitta J, Meijer F E, Takayanagi H 1999 *Appl. Phys. Lett.* **75** 695
- [14] Frustaglia D, Richter K 2004 *Phys. Rev. B* **69** 235310
- [15] Molnar B, Peeters F M, Vasilopoulos P 2004 *Phys. Rev. B* **69** 155335
- [16] Foldi P, Molnar B, Benedict M G, Peeters F M 2005 *Phys. Rev. B* **71** 033309
- [17] Citro R, Romeo F 2007 *Phys. Rev. B* **75** 073306
- [18] Zhang X H, Xiong S J 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 5
- [19] Wang J M, Wang R, Liang J Q 2007 *Chin. Phys.* **16** 2075
- [20] Dong Y K, Li Y X 2008 *J. Appl. Phys.* **103** 113716
- [21] Du J, Li C G, Qin F 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3448 (in Chinese) [杜坚、李春光、秦芳 2009 物理学报 **58** 3448]
- [22] Koga T, Nitta J, van Veenhuizen M J 2004 *Phys. Rev. B* **70** 161302R
- [23] Bercioux D, Governale M, Cataudella V, Ramaglia V M 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 056802
- [24] Bercioux D, Governale M, Cataudella V, Ramaglia V M 2005 *Phys. Rev. B* **72** 075305
- [25] Bercioux D, Frustaglia D, Governale M 2005 *Phys. Rev. B* **72** 113310
- [26] Van Veenhuizen M J, Koga T, Nitta J 2006 *Phys. Rev. B* **73** 235315
- [27] Ramaglia V M, Cataudella V, Filippis G D, Perroni C A 2006 *Phys. Rev. B* **73** 155328
- [28] Li P, Deng W J 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2713 (In Chinese) [李鹏、邓文基 2009 物理学报 **58** 2713]

- [29] Bergsten T, Kobayashi T, Sekine Y, Nitta J 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 196803
- [30] König M, Tschetschetkin A, Hankiewicz E M, Sinova J, Hock V, Daumer V, Schäfer M, Becker C R, Buhmann H, Molenkamp L W 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 076804
- [31] Grbic B, Leturcq R, Ihn T, Ensslin K, Reuter D, Wieck A D 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 176803
- [32] Zhu Z Y, Wang Y, Xia K, Xie X C, Ma Z S 2007 *Phys. Rev. B* **76** 125311
- [33] Kalman O, Foldi P, Benedict M G, Peeters F M 2008 *Phys. Rev. B* **78** 125306
- [34] Datta S 1997 *Electronic Transport in Mesoscopic Systems* (Cambridge: Cambridge University Press) p57
- [35] Aharonov Y, Casher A, Cimmino A, Opat G I 1984 *Phys. Rev. Lett.* **53** 319

General solutions to spin transportation of electrons through equilateral polygon quantum rings with Rashba spin-orbit interaction *

Fu Bang Deng Wen-Ji[†]

(Department of Physics, South China University of Technology, Guangzhou 510641, China)

(Received 16 June 2009; revised manuscript received 30 July 2009)

Abstract

Based on the previous work (Li P, Deng W J 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 02713), the quantum transportation of electron through arbitrary equilateral polygons quantum rings with Rashba spin-orbit interaction is studied. With the typical method of quantum network and the Landauer-Büttiker formalism, we analytically solve the scattering problem of electron through equilateral polygonal quantum ring, and obtain the relevant formula for spin transportation conductance. The characteristics of the conductance varying with the wave-vector of electron, the strength of spin-orbit interaction, the number of polygon edges, and the ways of leads connecting to quantum rings are discussed. In the limit of infinite number of edges of polygon, we prove that the formula is consistent with the results obtained directly from the circular model of quantum rings.

Keywords: Rashba spin-orbit interaction, Aharonov-Casher phase, quantum network, quantum transportation

PACC: 7320D, 7335, 7170C

* Project supported by the Fundamental Research Funds for the Central Universities of South China University of Technology, China (Grant No. 2009ZM0299).

[†] Corresponding author. E-mail: phwjden@scut.edu.cn