第 59 卷 第 5 期 2010 年 5 月
1000-3290/2010/59(05)/2915-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 59, No. 5, May, 2010

一类扰动 Burgers 方程的孤子同伦映射解*

石兰芳[1)2)†] 周先春[3)]

1)(南京信息工程大学数理学院, 南京 210044)

2)(河海大学理学院,南京 210098)

3)(南京信息工程大学电信学院,南京 210044)

(2009 年 7 月 30 日收到;2009 年 8 月 11 日收到修改稿)

研究一类扰动非线性 Burgers 方程求解问题,利用同伦映射方法和理论,得到原方程孤子的任意次精度的近似解.

关键词: 非线性,孤子,同伦映射,近似解

PACC: 0200, 0340

1. 引 言

孤子广泛应用于化学、生物学、应用数学、流体物理学、固体物理学、基本粒子物理学、等离子体物理学、凝聚态物理学、神经网络、散射光波、大气物理等自然科学许多领域[1—14],并对一些过去难以解释的现象作了说明. 如有人找到了旋转大气波的孤子解用来解释木星的红斑和其他特征. 近年来,国际学术界研究了多种求孤子精确解的新方法,例如双曲正切函数法[15],齐次平衡法[16],辅助函数法[17],Jacobi 椭圆函数展开法[18],扩展的双曲正切函数法[19],修正的双曲正切函数法[20]等.

然而由于绝大多数非线性问题的方程没有精确解,人们不得不发展多种近似求解非线性方程的方法[21—34],包括摄动法、变分迭代法、同伦映射法等等. 其中同伦映射法[35,36]是一种有效的新方法. 其要点是利用扰动理论的渐近展开式将非线性微分方程转化为易求解的方程来求解.

本文在前人的基础上讨论一类在物理学和力学中经常出现的扰动发展方程,利用简单有效的同伦映射方法得到了相应方程的孤子解的近似展开式.

2. 扰动 Burgers 方程和同伦映射

考虑如下一类扰动 Burgers 方程:

$$u_t + uu_x + pu_{xx} = f(t,x,u), \tag{1}$$

其中 p 为常数, 而 f 为扰动项, 它是关于其变量在对应的区域内充分光滑的函数, 方程(1)在等离子体物理, 固体物理, 原子物理, 流体力学等物理学中具有广泛的应用.

在方程(1)中,当 $f=0$ 时,就是标准的 Burgers 方程[37]

$$u_t + uu_x + pu_{xx} = 0. \tag{2}$$

由文献[38],方程(2)有如下类孤子精确解:

$$\bar{u}(t,x) = \frac{c}{k} + 2pk\tanh(kx - ct + l), \tag{3}$$

其中 k,c,l 为任意常数,他们可由 Burgers 方程扰动的具体条件来确定.

由于方程(1)还具有非零扰动项 $f(t,x,u)$, 它一般不能求得显式解析精确解. 为此, 我们需要构造其近似解.

为了得到方程(1)的近似解析解,引入如下的同伦映射 $H(u,s): R\times I \to R$[35,36]

$$H(u,s) = L(u) - L(v) + s[L(v) + uu_x - f(t,x,u)], \tag{4}$$

其中 $R=(-\infty,+\infty)$, $I=[0,1]$, v 为方程(1)的初始近似函数, 它将在下面式子确定, 而线性算子

---

* 国家自然科学基金(批准号: 40876010)和国家重大公益性技术前期预研基金(批准号:GYHY200806029)资助的课题.

† E-mail:shilf108@163.com

L 为

$$L(u)=u_t+pu_{xx}.$$

显然，由关系式(4)，$H(u,1)=0$ 与方程(1)相同. 故方程(1)的解 $u(t,x)$ 就是 $H(u,s)=0$ 的解当 $s\to 1$ 的情形.

3. 孤子解的近似式

令

$$u=\sum_{i=0}^{\infty}u_i(t,x)s^i. \tag{5}$$

将(5)式代入式 $H(u,s)=0$，比较方程 $H(u,s)=0$ 关于 s 的同次幂的系数. 由 s 的零次幂的系数得

$$L(u_0)=L(v). \tag{6}$$

取 v 为方程(2)的孤子精确解 $\bar{u}$，于是由(3)，(6)式得到

$$u_0(t,x)=\frac{c}{k}+2pk\tanh(kx-ct+l). \tag{7}$$

在 $H(u,s)=0$ 中，取关于 s 的一次幂的系数得

$$L(u_1)=-L(v)-u_0u_{xx}+f(t,x,u_0). \tag{8}$$

式中 u_0 由(7)式表示，由(2)，(3)，(7)式，(8)式可简化为

$$L(u_1)=f(t,x,u_0). \tag{9}$$

由(7)，(9)式并利用 Fourier 变换，在初始条件 $u_1|_{t=0}=0$ 时，可得

$$u_1(t,x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau,\xi,u_0)\times[\exp(p\lambda^2(t-\tau)+\mathrm{i}\lambda(x-\xi))]\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau. \tag{10}$$

由(4)式，比较 $H(u,s)=0$ 的 s 的二次幂的系数得

$$L(u_2)=-(u_0u_{1x}+u_1u_{0x})+F(u_0,u_1), \tag{11}$$

其中 u_0,u_1 分别由(7)，(11)式表示. 而

$$F(u_0,u_1)=\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(f(t,x,\sum_{i=0}^{\infty}u_is^i)\right)\right]_{s=0}.$$

同样，不难得到方程(11) 在初始条件 $u_2|_{t=0}=0$ 时的解为

$$u_2(t,x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[-(u_0u_{1\xi}+u_1u_{0\xi})u_1+F(u_0,u_1)][\exp(p\lambda^2(t-\tau)+\mathrm{i}\lambda(x-\xi))]\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau. \tag{12}$$

于是由(5)，(7)，(10)，(12)式，扰动发展方程(1)类孤子解的二次近似解 u_{hom} 为

$$\begin{aligned}u_{\mathrm{hom}}(t,x)=&\frac{c}{k}+2pk\tanh(kx-ct+l)\\&+\frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[f(\tau,\xi,u_0)-(u_0u_{1\xi}+u_1u_{0\xi})+F(u_0,u_1)]\\&\times[\exp(p\lambda^2(t-\tau)+\mathrm{i}\lambda(x-\xi))]\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{13}$$

其中 p 为常数，u_0,u_1 分别由(7)，(10)表示.

用同样的方法比较关系式 $H(u,s)=0$ 关于 s 的更高次幂的系数，可得到扰动非线性发展方程(1)的更高次扰动孤子近似解.

4. 微扰孤子解

若在扰动 Burgers 方程(1)中的扰动项是微扰的，并设 $f=\varepsilon u^5$，其中 ε 为正的小参数. 这时相应的微扰方程为

$$u_t+uu_x+pu_{xx}=\varepsilon u^5,\ 0<\varepsilon\ll 1. \tag{14}$$

由上述计算方法，不难得到扰动 Burgers 方程(14)的扰动孤子解 $u(t,x,\varepsilon)$ 关于 s 的零次幂和一次幂的系数分别为

$$u_0(t,x)=\frac{c}{k}+2pk\tanh(kx-ct+l), \tag{15}$$

$$u_1(t,x)=\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{c}{k}+2pk\tanh(kx-ct+l)\right]^5\times[\exp(p\lambda^2(t-\tau)+\mathrm{i}\lambda(x-\xi))]\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau. \tag{16}$$

于是由(15)，(16)式可得扰动 Burgers 方程(14)的孤子解的一次近似 $u_{1\mathrm{hom}}(t,x,\varepsilon)$ 为

$$\begin{aligned}u_{1\mathrm{hom}}(t,x)=&\frac{c}{k}+2pk\tanh(kx-ct+l)\\&+\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{c}{k}+2pk\tanh(kx-ct+l)\right]^5\times[\exp(p\lambda^2(t-\tau)\\&+\mathrm{i}\lambda(x-\xi))]\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{17}$$

由于方程(14)是微扰方程，现利用摄动方法再求其近似解. 设方程(14)的摄动解为

$$u=\sum_{i=0}^{\infty}u_i\varepsilon^i,$$

我们能够依次地求出摄动解的各次近似，其中一次近似 u_{per} 为

$$\begin{aligned}u_{\mathrm{per}}=&\frac{c}{k}+2pk\tanh(kx-ct+l)\\&+\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{c}{k}+2pk\tanh(kx-ct+l)\right]^5\end{aligned}$$

$$\times\left[\exp\left(p\lambda^{2}(t-\tau)+\mathrm{i}\lambda(x-\xi)\right)\right]$$
$$\times\,\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau+O(\varepsilon^{2}),$$
$$0<\varepsilon\ll 1. \tag{18}$$

上述结果与同伦映射方法得到的结果一致. 这从一个侧面表明,用同论方法求得的扰动 Buegers 方程孤子解具有较高的精度.

5. 结　　论

1. 本文用同伦映射方法,选取的初始近似 $u_0(t,x)$是采用非扰动情形下的典型发展方程(2)的孤子解 $\bar{u}(t,x)$. 它保证了对应于扰动情形下的 Buegers 方程较快地求得在要求的精度范围内的近似解析解.

2. 孤子理论描述的是一类复杂的自然现象. 往往需要将它建立并简化为基本模式并利用近似方法去求解它. 同伦映射方法就是一个简单有效的近似方法.

3. 同伦映射方法是一个近似的解析方法,它不同于一般的数值解法. 用同伦映射方法求得的解还可以继续进行解析运算, 从而可以进一步得到所讨论非线性问题精度较高的的解.

---

[1] Gu D F, Philander S G H 1997 *Science* **275** 805
[2] McPhaden M J, Zhang D 2002 *Nature* **415** 603
[3] Loutsenko I 2006 *Comm. Math. Phys.* **268** 465
[4] Parkes E J 2008 *Chaos Solitons Fractals* **38** 154
[5] Ma S H, Qiang J Y, Fang J P 2007 *Comm. Theor. Phys.* **48** 662
[6] Gedalin M 1998 *Phys. Plasmas* **5** 127
[7] Ma S H, Qiang J Y, Fang J P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 620 (in Chinese) [马松华、强继业、方建平 2007 物理学报 **56** 620]
[8] Wang L S, Xu D Y 2003 *Science in China* E **32** 488 (in Chinese) [王林山、徐道义 2003 中国科学 E **32** 488]
[9] Yang J R, Mao J J 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 1527
[10] Gao Y, Tang X Y 2007 *Commum. Theor. Phys.* **48** 961
[11] Yang J R, Mao J J 2008 *Chin. Phys.* **17** 4337
[12] Pan L X, Zuo W M, Yan J R 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1 (in Chinese) [潘留仙、左伟明、颜家壬 2005 物理学报 **54** 1]
[13] Lu D C, Hong B J, Tian L X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5617 (in Chinese) [卢殿臣、烘宝剑、田立新 2006 物理学报 **55** 5617]
[14] Tapgetusang, Sirendaoerji 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2121 (in Chinese) [套格图桑、斯仁道尔吉 2009 物理学报 **58** 2121]
[15] Parkes E J, DuffyB R 1996 *Comput. Phys. Commun.* **98** 288
[16] Wang ML 1995 *Phys. Lett.* A **199** 169
[17] Sirendaoreji , SunJ 2003 *Phys. Lett.* A **309** 387
[18] Liu S K, Fu Z T, Liu S D, Zhao Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 10 (in Chinese) [刘式适、付遵涛、刘式达、赵　强 2002 物理学报 **51** 10]
[19] Fan E G 2000 *Phys. Lett.* A **277** 212
[20] Elwakil S A, El-labany S K, Zaharan M A 2002 *Phys. Lett.* A **299** 179
[21] Mo J Q, Lin W T,Zhu J 2004 *Prog. Nat. Sci.* **14** 1126
[22] Mo J Q, Lin W T 2005 *Chin. Phys.* **14** 875
[23] Mo J Q, Lin W T, Wang H 2006 *Chin. Phys.* **15** 578
[24] Mo J Q, Wang H, Lin W T, Lin Y H 2006 *Chin. Phys.* **15** 671
[25] Mo J Q, Lin W T, Wang H 2007 *Chin. Phys.* **16** 578
[26] Mo J Q, Lin W T, Wang H 2007 *Chin. Phys.* **16** 951
[27] Mo J Q, Lin W T 2008 *Chin. Phys.* B **17** 370
[28] Mo J Q, Lin W T 2008 *Chin. Phys.* B **17** 743
[29] Mo J Q, Wang H, Lin W T, Lin Y H 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6(in Chinese) [莫嘉琪王辉、林万涛、林一骅 2006 物理学报 **55** 6]
[30] Mo J Q, Zhang W J, He M 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1843 (in Chinese) [莫嘉琪、张伟江、何　铭 2007 物理学报 **56** 1843]
[31] Mo J Q, Chen L H 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4646 (in Chinese) [莫嘉琪、陈丽华 2008 物理学报 **57** 4646]
[32] Mo J Q 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2930 (in Chinese) [莫嘉琪 2009 物理学报 **58** 2930]
[33] Mo J Q, Chen Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4379(in Chinese) [莫嘉琪、程　燕 2009 物理学报 **58** 4379]
[34] Mo J Q 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 695 (in Chinese) [莫嘉琪 2009 物理学报 **58** 695]
[35] Liao S J 2004 *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method* (New York: CRC Press Co)
[36] He J H 2002 *Approximate Analytical Methods in Engineering and Sciences* (Zhengzhou: Henan Science and Technology Press) (in Chinese) [何吉欢 2002 工程和科学计算中的近似非线性分析方法 (郑州 河南科学技术出版社)]
[37] Wahl quist H D,Estabrook FB 1975 *J. Math. Phys.* **16** 1
[38] Zhang G X, Li Z B, Duan Y S 2000 *Science in China* A **12** 1103

Homotopic mapping solution of soliton for a class of disturbed Burgers equation*

Shi Lan-Fang[1)2)†] Zhou Xian-Chun[3)]

1)(*College of Mathematics and Physics, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, China*)

2)(*College of Mathematics, Hohai University, Nanjing 210098, China*)

3)(*College of Electronic and Information Engineering, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, China*)

(Received 30 July 2009; revised manuscript received 11 August 2009)

Abstract

The problem of solving a class of disturbed Burgers equation is considered. Using the homotopic mapping method and theory, the approximate solution with arbitrary degree of accuracy for the solitary wave is obtained.

Keywords: nonlinear, soliton, homotopic mapping, approximate solution

PACC: 0200, 0340

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 40876010), the Advanced Research Foundation for National Major Utility Technology of China (Grant No. GYHY200806029).

† E-mail: shilf108@163.com