第 59 卷 第 5 期 2010 年 5 月
1000-3290/2010/59(05)/2924-08

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 59, No. 5, May, 2010

一个新的广义的 Riccati 方程有理展开法及其应用*

王 静†

(河南理工大学数学与信息科学学院,焦作 454000)

(2009 年 7 月 25 日收到;2009 年 8 月 30 日收到修改稿)

利用符号计算软件 Maple,在一个新的广义的 Riccati 方程有理展开法的帮助下,得到了关于复合的 KdV 系统及广义的 KdV – Burgers 系统的几个新的更广义类型的精确解. 该方法还可被应用到其他非线性发展方程中去.

关键词: 新的广义的 Riccati 方程有理展开法,复合的 KdV 系统,广义的 KdV – Burgers 系统,符号计算

PACC: 0230, 0290, 0420J

1. 引 言

物理学中的很多现象都可以用非线性发展方程来描述. 在研究非线性物理现象中,寻找非线性发展方程(NEEs)的精确解起着非常重要的作用并引起了越来越多学者的兴趣[1—26]. 其中,被认为在求解非线性偏微分方程的孤子行波解是最直接且有效的方法之一的 tanh 函数法得到了广泛的扩展和改进[6—17].

最近,非线性项具有任意次幂的非线性发展方程引起了很多人的兴趣. 例如,非线性项具有任意次幂的复合的 KdV 系统

$$u_t + \alpha u^p u_x + \beta u^{2p} u_x + \delta u_{xxx} = 0 \qquad (1)$$

和非线性项具有任意次幂的广义的 KdV-Burgers 系统

$$(u_t + \alpha u^p u_x + \beta u^{2p} u_x + \gamma u_{xx} + \delta u_{xxx})_x + s u_{yy} = 0, \qquad (2)$$

这两个方程包含了很多已经被许多作者研究过的方程[18—22]. 例如,在文献[20,21]中, Dey 和 Coffey 考虑了 $p=1$ 和 $p=2$ 情况下(1)式的类孤子解而 Wadati[18] 考察了 $p=1$ 情况下的孤子解, Bäcklund 变换, Zhang 等人[22] 研究了(1)的孤子行波解.

沿着有理展开的思路,本文提出了一种新的代数方法,称为新的广义的 Riccati 方程有理展开法,来讨论非线性项具有任意次幂的复合的 KdV 系统及广义的 KdV-Burgers 系统. 利用该方法,成功的得到了一些新的且更一般的有理解.

本文第二节简要地叙述一下新的广义的 Riccati 方程有理展开法的步骤; 第三节将这个方法应用到非线性项具有任意次幂的复合的 KdV 系统及广义的 KdV-Burgers 系统; 第四节给出一些结论.

2. 方法概述

下面,我们列出这个方法的主要步骤.

第 1 步 对于物理学中给定的关于 $u_i(x,y,t)$ 的包含三个变量 x,y,t 的非线性发展系统

$$\nabla_i(u_i, u_{it}, u_{ix}, u_{iy}, u_{itt}, u_{ixt}, u_{iyt}, u_{ixx}, u_{iyy}, u_{ixy}, \cdots) = 0, \qquad (3)$$

利用行波变换

$$u_i(x,y,t) = U_i(\xi), \ \xi = k(x + ly - \lambda t), \qquad (4)$$

这里 k, l, λ 是待定常数. 这样非线性偏微分方程(3)化为非线性常微分方程(ODE)

$$\Delta_i(U_i, U'_i, U''_i, \cdots) = 0. \qquad (5)$$

第 2 步 引入下面的有限有理展开格式:

$$U_i = a_{i0} + \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{ij}\psi^j(\xi)}{(1+\mu\psi(\xi))^j}, \qquad (6)$$

新变量 $\psi = \psi(\xi)$ 满足

$$\psi' - (h_1 + h_2\psi^2) = \frac{d\psi}{d\xi} - (h_1 + h_2\psi^2) = 0, \qquad (7)$$

* 河南省自然科学基金(批准号: 0611055500),河南理工大学青年基金(批准号: Q2006-10-646172)、河南理工大学青年骨干教师项目(批准号: 649071)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: scilencewj@163.com

这里 $a_{i0}, a_{ij}(i=1,2,\cdots;j=1,2,\cdots,m_i)$ 和 μ 是待定常数.

第 3 步 m_i 可通过平衡(3)或(5)中的最高阶偏导数项和最高次非线性项得到,即

1）如果 m_i 是一个正整数到第 4 步;

2）如果 $m_i=\frac{q}{p}$,做变换 $U(\xi)=\varphi^{\frac{q}{p}}(\xi)$,然后转到第 1 步;

3）如果 m_i 是一个负整数,做变换 $U(\xi)=\varphi^{m}(\xi)$然后转到第 1 步.

第 4 步 将(6)和(7)式代入(5)式然后令结果中分子部分所有的关于 $\psi^i(\xi)(i=1,2,\cdots)$ 的项的系数为零从而可以得到关于 $k,\lambda,l,a_{i0},a_{ij}(i=1,2,\cdots;j=1,2,\cdots,m_i)$ 和 μ 的非线性代数方程的超定系统.

第 5 步 利用 Maple 求解关于非线性代数方程的超定系统,我们可以得到 $k,\lambda,l,a_{i0},a_{ij}(i=1,2,\cdots;j=1,2,\cdots,m_i)$ 和 μ 的表达式.

第 6 步 (7)式具有如下形式的解：

1）当 $h_1h_2>0$ 时

$$\psi(\xi)=\frac{\sqrt{h_1h_2}}{h_2}\tan(\sqrt{h_1h_2}\xi+c_1),\tag{8}$$

$$\psi(\xi)=\frac{\sqrt{h_1h_2}}{h_2}\cot(\sqrt{h_1h_2}\xi+c_2).\tag{9}$$

2）当 $h_1h_2<0$ 时

$$\psi(\xi)=\frac{\sqrt{-h_1h_2}}{h_2}\tanh(\sqrt{-h_1h_2}\xi+c_3),\tag{10}$$

$$\psi(\xi)=\frac{\sqrt{-h_1h_2}}{h_2}\coth(\sqrt{-h_1h_2}\xi+c_4).\tag{11}$$

3）当 $h_1=0$ 而 $h_2\neq0$ 时

$$\psi(\xi)=-\frac{1}{h_2\xi+c},\tag{12}$$

这里 $\xi=k(x+ly-\lambda t)$ 而 c,c_1,c_2,c_3,c_4 是任意常数.

注 1 据我们所知,存在如下关系式:

$$\cos(2\xi)=2\cos^2(\xi)-1=1-2\sin^2(\xi),$$
$$\sin(2\xi)=2\sin(\xi)\cos(\xi),$$
$$\cosh(2\xi)=2\cosh^2(\xi)-1=2\sinh^2(\xi)+1,$$
$$\sinh(2\xi)=2\sinh(\xi)\cosh(\xi).$$

因此(8)和(9)式又可写成

$$\psi(\xi)=\frac{\sqrt{h_1h_2}}{h_2}(\csc(\sqrt{4h_1h_2}\xi+c_5)\pm\cot(\sqrt{4h_1h_2}\xi+c_5)),\tag{13}$$

$$\psi(\xi)=\frac{\sqrt{h_1h_2}}{h_2}(\sec(\sqrt{4h_1h_2}\xi+c_6)\pm\tan(\sqrt{4h_1h_2}\xi+c_6)).\tag{14}$$

而(10)和(11)式也可被写作

$$\psi(\xi)=\frac{\sqrt{-h_1h_2}}{h_2}(\coth(\sqrt{-4h_1h_2}\xi+c_7)\pm\operatorname{csch}(\sqrt{-4h_1h_2}\xi+c_7)),\tag{15}$$

$$\psi(\xi)=\frac{\sqrt{-h_1h_2}}{h_2}(\tanh(\sqrt{-4h_1h_2}\xi+c_8)\pm i\operatorname{sech}(\sqrt{-4h_1h_2}\xi+c_8)),\tag{16}$$

这里 $\xi=k(x+ly-\lambda t)$ 而 c_5,c_6,c_7,c_8 是任意常数.

注 2 根据欧拉公式,(8)和(9)式又可写成指数函数的形式,即

$$\psi(\xi)=\frac{\sqrt{h_1h_2}}{h_2}\frac{(1-ice^{2i\xi\sqrt{h_1h_2}})}{(1+ce^{2i\xi\sqrt{h_1h_2}})}.\tag{17}$$

而(10)和(11)式也可记作

$$\psi(\xi)=\frac{\sqrt{-h_1h_2}}{h_2}\frac{(1+ce^{2\xi\sqrt{-h_1h_2}})}{(1-ce^{2\xi\sqrt{-h_1h_2}})}.\tag{18}$$

3. 应 用

3.1. 复合的 KdV 系统

根据我们的方法,首先,设方程(1)有如下形式的解:

$$u(x,t)=U(\xi),\ \xi=k(x-\lambda t).\tag{19}$$

将(1)式化作

$$-\lambda U'+\alpha U^pU'+\beta U^{2p}U'+k^2\delta U'''=0,\tag{20}$$

通过平衡(20)式中的最高阶偏导数项和最高次非线性项,我们可以得到 $m=\frac{1}{p}$,因此我们做如下变换:

$$U(\xi)=\varphi^{1/p}(\xi).\tag{21}$$

将(21)式代入(20)式得到

$$\begin{aligned}&-\lambda\varphi'(\xi)p^2\varphi^2(\xi)+\alpha\varphi^3(\xi)\varphi'(\xi)p^2\\&+\beta\varphi^4(\xi)\varphi'(\xi)p^2+k^2\delta(\varphi'(\xi))^3\\&-3k^2\delta(\varphi'(\xi))^3p+3k^2\delta p\varphi'(\xi)\varphi''(\xi)\varphi(\xi)\\&+2k^2\delta(\varphi'(\xi))^3p^2-3k^2\delta\varphi'(\xi)p^2\varphi''(\xi)\varphi(\xi)\\&+k^2\delta\varphi'''(\xi)p^2\varphi^2(\xi)=0.\end{aligned}\tag{22}$$

利用前面提到的方法,我们将(22)式的解设为如下形式:

$$\varphi(\xi)=a_0+\frac{a_1\psi(\xi)}{1+\mu\psi(\xi)},\tag{23}$$

这里 $\psi(\xi)$ 满足(7)式.

利用 Maple,将(23)和(7)式代入(22)式,得到关于 $\psi^i(\xi)$ $(i=0,1,\cdots)$ 的代数方程. 设方程中含 $\psi^i(\xi)$ 项的系数为零得到一组关于 $a_0,a_1,\mu,\delta,\alpha,\beta,\lambda$ 的超定代数方程组(这里省略). 求解得

$$\begin{aligned}
&a_0=a_0,\ a_1=\frac{(-\mu h_1\pm\sqrt{-h_1h_2})a_0}{h_1},\ \mu=\mu,\ \delta=\delta,\\
&\alpha=2k^2\delta h_1^2\Big[\frac{h_1^2p^2\mu^4-4p^2h_2^2+2h_1^2\mu^4-3h_1^2\mu^4p-2h_2^2}{a_0h_1(\mu(-2\mu h_1\pm2\sqrt{-h_1h_2})+\mu^2h_1+h_2)p^2}\\
&\quad+\frac{2\mu h_2^2+6ph_1\mu^3h_2+2\mu^5h_1^2+3ph_1^2\mu^5+4h_1\mu^3h_2+3h_2^2p\mu+2p^2h_1\mu^3h_2+p^2\mu h_2^2+p^2\mu^5h_1^2}{a_0(\mu(-2\mu h_1\pm2\sqrt{-h_1h_2})+\mu^2h_1+h_2)p^2(-\mu h_1\pm\sqrt{-h_1h_2})}\Big],\\
&\beta=\frac{k^2\delta(2\mu^2h_1h_2+6ph_1\mu^2h_2+3p\mu^4h_1^2+4p^2h_1h_2\mu^2+2h_2^2p^2+3ph_2^2+2p^2h_1^2\mu^4+\mu^4h_1^2+h_2^2)h_1}{a_0^2(\mu^2h_1\mp2\mu\sqrt{-h_1h_2}-h_2)p^2},\\
&\lambda=-\frac{4k^2\delta h_1h_2(\mu^3h_1\mp3h_1\mu^2\sqrt{-h_1h_2}-3\mu h_1h_2\pm h_2\sqrt{-h_1h_2})}{p^2(\mu^2h_1\mp2\mu\sqrt{-h_1h_2}-h_2)(\mu h_1\mp\sqrt{-h_1h_2})}.
\end{aligned}\tag{24}$$

根据(21),(23),(24) 和(8)—(18)式,我们得到(1)式的下述解.

1) 根据(24)式,当 $h_1h_2>0$ 时

(a) 由(8),(9),(13),(14)式我们得到复合的 KdV 系统的三角周期解

$$u_1=\left(\frac{a_0h_2\pm a_0h_1\mathrm{i}\tan(\sqrt{h_1h_2}k(x-\lambda t)+c_1)}{h_2+\mu\sqrt{h_1h_2}\tan(\sqrt{h_1h_2}k(x-\lambda t)+c_1)}\right)^{1/p},\tag{25}$$

$$u_2=\left(\frac{a_0h_2\pm a_0h_1\mathrm{i}\cot(\sqrt{h_1h_2}k(x-\lambda t)+c_2)}{h_2+\mu\sqrt{h_1h_2}\cot(\sqrt{h_1h_2}k(x-\lambda t)+c_2)}\right)^{1/p},\tag{26}$$

$$u_3=\left(\frac{a_0h_2\pm a_0h_1\mathrm{i}(\sec(\sqrt{4h_1h_2}k(x-\lambda t)+c_3)\pm\tan(\sqrt{4h_1h_2}k(x-\lambda t)+c_3))}{h_2+\mu\sqrt{h_1h_2}(\sec(\sqrt{4h_1h_2}k(x-\lambda t)+c_3)\pm\tan(\sqrt{4h_1h_2}k(x-\lambda t)+c_3))}\right)^{1/p},\tag{27}$$

$$u_4=\left(\frac{a_0h_2\pm a_0h_1\mathrm{i}(\csc(\sqrt{4h_1h_2}k(x-\lambda t)+c_4)\pm\cot(\sqrt{4h_1h_2}k(x-\lambda t)+c_4))}{h_2+\mu\sqrt{h_1h_2}(\csc(\sqrt{4h_1h_2}k(x-\lambda t)+c_4)\pm\cot(\sqrt{4h_1h_2}k(x-\lambda t)+c_4))}\right)^{1/p}.\tag{28}$$

(b) 由(17)式,我们得到复合的 KdV 系统的指数函数形式解

$$u_5=\left(\frac{a_0h_2\pm a_0h_1\mathrm{i}\left(\dfrac{1-\mathrm{i}c_5\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\sqrt{h_1h_2}k(x-\lambda t)}}{1+c_5\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\sqrt{h_1h_2}k(x-\lambda t)}}\right)}{h_2+\mu\sqrt{h_1h_2}\left(\dfrac{1-\mathrm{i}c_5\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\sqrt{h_1h_2}k(x-\lambda t)}}{1+c_5\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\sqrt{h_1h_2}k(x-\lambda t)}}\right)}\right)^{1/p},\tag{29}$$

这里

$$\lambda=-\frac{4k^2\delta h_1h_2(\mu^3h_1\mp3h_1\mu^2\sqrt{-h_1h_2}-3\mu h_1h_2\pm h_2\sqrt{-h_1h_2})}{p^2(\mu^2h_1\mp2\mu\sqrt{-h_1h_2}-h_2)(\mu h_1\mp\sqrt{-h_1h_2})},$$

a_0,μ,k 和 c_1,c_2,c_3,c_4,c_5 是任意常数,而 α,β 由(24)式确定.

2) 由(24)式, 当 $h_1h_2<0$ 时

(a) 由(10),(11),(15),(16)式我们得到复合的 KdV 系统的类孤子解

$$u_6=\left(\frac{a_0h_2\mp a_0h_1\tanh(\sqrt{-h_1h_2}k(x-\lambda t)+c_6)}{h_2+\mu\sqrt{-h_1h_2}\tanh(\sqrt{-h_1h_2}k(x-\lambda t)+c_6)}\right)^{1/p},\tag{30}$$

$$u_7=\left(\frac{a_0h_2\mp a_0h_1\coth(\sqrt{-h_1h_2}k(x-\lambda t)+c_7)}{h_2+\mu\sqrt{-h_1h_2}\coth(\sqrt{-h_1h_2}k(x-\lambda t)+c_7)}\right)^{1/p},\tag{31}$$

$$u_8=\left(\frac{a_0h_2\mp a_0h_1(\tanh(\sqrt{-4h_1h_2}k(x-\lambda t)+c_8)\pm i\mathrm{sech}(\sqrt{-4h_1h_2}k(x-\lambda t)+c_8))}{h_2+\mu\sqrt{-h_1h_2}(\tanh(\sqrt{-4h_1h_2}k(x-\lambda t)+c_8)\pm i\mathrm{sech}(\sqrt{-4h_1h_2}k(x-\lambda t)+c_8))}\right)^{1/p},\tag{32}$$

$$u_9=\left(\frac{a_0h_2\mp a_0h_1(\coth(\sqrt{-4h_1h_2}k(x-\lambda t)+c_9)\pm \mathrm{csch}(\sqrt{-4h_1h_2}k(x-\lambda t)+c_9))}{h_2+\mu\sqrt{-h_1h_2}(\coth(\sqrt{-4h_1h_2}k(x-\lambda t)+c_9)\pm \mathrm{csch}(\sqrt{-4h_1h_2}k(x-\lambda t)+c_9))}\right)^{1/p}.\tag{33}$$

(b) 由(18)式,我们得到复合的 KdV 系统的指数函数形式解

$$u_{10}=\left(\frac{a_0h_2\mp a_0h_1\left(\dfrac{1+c_{10}\mathrm{e}^{2\sqrt{-h_1h_2}k(x-\lambda t)}}{1-c_{10}\mathrm{e}^{2\sqrt{-h_1h_2}k(x-\lambda t)}}\right)}{h_2+\mu\sqrt{-h_1h_2}\left(\dfrac{1+c_{10}\mathrm{e}^{2\sqrt{-h_1h_2}k(x-\lambda t)}}{1-c_{10}\mathrm{e}^{2i\sqrt{-h_1h_2}k(x-\lambda t)}}\right)}\right)^{1/p},\tag{34}$$

这里

$$\lambda=-\frac{4k^2\delta h_1h_2(\mu^3h_1\mp 3h_1\mu^2\sqrt{-h_1h_2}-3\mu h_1h_2\pm h_2\sqrt{-h_1h_2})}{p^2(\mu^2h_1\mp 2\mu\sqrt{-h_1h_2}-h_2)(\mu h_1\mp\sqrt{-h_1h_2})},$$

a_0,μ,k 和 c_6,c_7,c_8,c_9,c_{10}是任意常数而 α,β 由(24)式确定.

3.2. 广义的 KdV-Burgers 系统

接下来考虑方程(2),首先将解设为如下形式:

$$u(x,y,t)=U(\xi),\ \xi=k(x+ly-\lambda t).\tag{35}$$

将(2)式化为

$$(-\lambda U'+\alpha U^pU'+\beta U^{2p}U'+\gamma kU''+\delta k^2U''')'+sl^2U''=0,\tag{36}$$

将(36)式积分两次得到

$$\delta k^2U''+\gamma kU'+(sl^2-\lambda)U+\frac{\alpha U^{p+1}}{p+1}+\frac{\beta U^{2p+1}}{2p+1}=0.\tag{37}$$

通过平衡(37)式中的最高阶偏导数项和最高次非线性项,得到 $m=\dfrac{1}{p}$,因此作如下变换:

$$U(\xi)=\varphi^{1/p}(\xi),\tag{38}$$

将(38)式代入(37)式得到

$$\begin{aligned}&(1+p)(1+2p)\delta k^2(p\varphi(\xi)\varphi''(\xi)\\&+(1-p)(\varphi'(\xi))^2)+(1+p)\\&\times(1+2p)\gamma kp\varphi(\xi)\varphi'(\xi)+p^2((1+p)\\&\times(1+2p)(sl^2-\lambda)\varphi^2(\xi)+(1+2p)\\&\times\alpha\varphi^3(\xi)+(1+p)\beta\varphi^4(\xi))=0.\end{aligned}\tag{39}$$

根据前面提到的方法,将(39)式的解设为如下形式:

$$\varphi(\xi)=a_0+\frac{a_1\psi(\xi)}{1+\mu\psi(\xi)},\tag{40}$$

这里 $\psi(\xi)$满足(7).

利用 Maple,将(40)和(7)式代入(39)式,得到关于 $\psi^i(\xi)(i=0,1,...)$的代数方程. 设方程中含 $\psi^i(\xi)$项的系数为零得到一组关于 $a_0,a_1,\mu,k,\alpha,\beta,l$ 的超定代数方程组(这里省略). 求解得

情况 1

$$a_0=a_0,\ \mu=\mu,\quad k=\frac{(h_1\mu\mp\sqrt{-h_1h_2})\gamma p}{2h_1\delta(\pm p\mu\sqrt{-h_1h_2}+ph_2\mp 2\mu\sqrt{-h_1h_2}-2h_2)},$$

$$a_1=-\frac{(h_1\mu\mp\sqrt{-h_1h_2})a_0}{h_1},\quad l=\pm\sqrt{\frac{\gamma^2+4\lambda\delta+\lambda\delta p^2-4\lambda\delta p-\gamma^2p}{s\delta}(p-2)^{-1}},$$

$$\alpha=\frac{p\gamma^2(p+1)(2h_1h_2^2\mu^2-h_2^3+3h_1^2h_2\mu^4\pm\sqrt{-h_1h_2}(h_1^2\mu^5-2h_1h_2\mu^3-3h_2^2\mu))}{a_0h_2\delta(\mu^2h_1-h_2\mp 2\mu\sqrt{-h_1h_2})^2(p^2-4p+4)},$$

$$\beta=-\frac{\gamma^2(4\mu^2h_1h_2p^2+2\mu^4h_1^2p^2+2h_2^2p^2+3\mu^4h_1^2p+6\mu^2h_1ph_2+3ph_2^2+\mu^4h_1^2+2\mu^2h_1h_2+h_2^2)}{4\delta a_0^2h_2(\mu(-2h_1\mu\pm2\sqrt{-h_1h_2})(p-2)^2+h_2p^2-4ph_2+4h_2+\mu^2h_1p^2-4p\mu^2h_1+4\mu^2h_1)}. \tag{41}$$

情况 2

$$a_0=a_0,\ \mu=\mu,\ k=k,\ a_1=-\frac{(h_1\mu\pm\sqrt{-h_1h_2})a_0}{h_1},$$

$$l=\pm\sqrt{-\frac{-4\delta k^2h_1h_2\pm2\gamma kp\sqrt{-h_1h_2}-\lambda p^2}{s}}p^{-1},$$

$$\alpha=\frac{k(2h_1\gamma p^2\mu-6h_1\delta kph_2+(\gamma p^2+\gamma p+2h_1\delta kp^2\mu+6h_1\delta kp\mu+4h_1\delta k\mu)(-h_1\mu\pm\sqrt{-h_1h_2}))}{a_0p^2}$$
$$+\frac{k(-2h_1\delta kp^2h_2+2h_1\gamma p\mu-4h_1\delta kh_2+2h_1^2\delta kp^2\mu^2+4h_1^2\delta k\mu^2+6h_1^2\mu^2\delta kp)}{a_0p^2},$$

$$\beta=\frac{-\delta k^2h_1(-3h_2p-2p^2h_2+6\mu^2h_1p^2-h_2+9p\mu^2h_1+3\mu^2h_1+(4\mu p^2+6p\mu+2\mu)(-h_1\mu\pm\sqrt{-h_1h_2}))}{a_0^2p^2}. \tag{42}$$

通过(38),(40),(41) 和(8)—(18)式,我们得到(2)式的下述解.

1) 根据(41)式,当 $h_1h_2>0$ 时

(a) 由(8),(9),(13),(14)式我们得到广义的 KdV-Burgers 系统的三角周期解

$$u_1=\left(\frac{a_0h_2\pm a_0h_1\mathrm{i}\tan(\sqrt{h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_1)}{h_2+\mu\sqrt{h_1h_2}\tan(\sqrt{h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_1)}\right)^{1/p}, \tag{43}$$

$$u_2=\left(\frac{a_0h_2\pm a_0h_1\mathrm{i}\cot(\sqrt{h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_2)}{h_2+\mu\sqrt{h_1h_2}\cot(\sqrt{h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_2)}\right)^{1/p}, \tag{44}$$

$$u_3=\left(\frac{a_0h_2\pm a_0h_1\mathrm{i}(\sec(\sqrt{4h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_3)\pm\tan(\sqrt{4h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_3))}{h_2+\mu\sqrt{h_1h_2}(\sec(\sqrt{4h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_3)\pm\tan(\sqrt{4h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_3))}\right)^{1/p}, \tag{45}$$

$$u_4=\left(\frac{a_0h_2\pm a_0h_1\mathrm{i}(\csc(\sqrt{4h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_4)\pm\cot(\sqrt{4h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_4))}{h_2+\mu\sqrt{h_1h_2}(\csc(\sqrt{4h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_4)\pm\cot(\sqrt{4h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_4))}\right)^{1/p}. \tag{46}$$

(b) 由(17)式,我们得到广义的 KdV-Burgers 系统的指数函数解

$$u_5=\left(\frac{a_0h_2\pm a_0h_1\mathrm{i}\left(\dfrac{1-\mathrm{i}c_5\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\sqrt{h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)}}{1+c_5\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\sqrt{h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)}}\right)}{h_2+\mu\sqrt{h_1h_2}\left(\dfrac{1-\mathrm{i}c_5\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\sqrt{h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)}}{1+c_5\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\sqrt{h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)}}\right)}\right)^{1/p}, \tag{47}$$

这里

$$k=\frac{(h_1\mu\mp\sqrt{-h_1h_2})\gamma p}{2h_1\delta(\pm p\mu\sqrt{-h_1h_2}+ph_2\mp2\mu\sqrt{-h_1h_2}-2h_2)},$$

$$l=\pm\sqrt{\frac{\gamma^2+4\lambda\delta+\lambda\delta p^2-4\lambda\delta p-\gamma^2p}{s\delta}}(p-2)^{-1},$$

a_0,μ,λ 和 c_1,c_2,c_3,c_4,c_5 是任意常数,而 α,β 由(41)式确定.

2) 根据(41)式,当 $h_1h_2<0$ 时

(a) 由(10),(11),(15),(16)式我们得到广义的 KdV-Burgers 系统的类孤子解

$$u_6=\left(\frac{a_0h_2\mp a_0h_1\tanh(\sqrt{-h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_6)}{h_2+\mu\sqrt{-h_1h_2}\tanh(\sqrt{-h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_6)}\right)^{1/p}, \tag{48}$$

$$u_7=\left(\frac{a_0h_2\mp a_0h_1\coth(\sqrt{-h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_7)}{h_2+\mu\sqrt{-h_1h_2}\coth(\sqrt{-h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_7)}\right)^{1/p},\tag{49}$$

$$u_8=\left(\frac{a_0h_2\mp a_0h_1(\tanh(\sqrt{-4h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_8)\pm \mathrm{i}\operatorname{sech}(\sqrt{-4h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_8))}{h_2+\mu\sqrt{-h_1h_2}(\tanh(\sqrt{-4h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_8)\pm \mathrm{i}\operatorname{sech}(\sqrt{-4h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_8))}\right)^{1/p},\tag{50}$$

$$u_9=\left(\frac{a_0h_2\mp a_0h_1(\coth(\sqrt{-4h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_9)\pm \operatorname{csch}(\sqrt{-4h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_9))}{h_2+\mu\sqrt{-h_1h_2}(\coth(\sqrt{-4h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_9)\pm \operatorname{csch}(\sqrt{-4h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_9))}\right)^{1/p}.\tag{51}$$

（b）由(18)式,我们得到广义的 KdV-Burgers 系统的指数函数解

$$u_{10}=\left(\frac{a_0h_2\mp a_0h_1\left(\dfrac{1+c_{10}\mathrm{e}^{2\sqrt{-h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)}}{1-c_{10}\mathrm{e}^{2\sqrt{-h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)}}\right)}{h_2+\mu\sqrt{-h_1h_2}\left(\dfrac{1+c_{10}\mathrm{e}^{2\sqrt{-h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)}}{1-c_{10}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\sqrt{-h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)}}\right)}\right)^{1/p},\tag{52}$$

这里

$$k=\frac{(h_1\mu\mp\sqrt{-h_1h_2})\gamma p}{2h_1\delta(\pm p\mu\sqrt{-h_1h_2}+ph_2\mp 2\mu\sqrt{-h_1h_2}-2h_2)},$$

$$l=\pm\sqrt{\frac{\gamma^2+4\lambda\delta+\lambda\delta p^2-4\lambda\delta p-\gamma^2p}{s\delta}}(p-2)^{-1},$$

a_0,μ,λ 和 c_6,c_7,c_8,c_9,c_{10}是任意常数,而 α,β 由(41)确定.

3）根据(42)式,当 $h_1h_2>0$ 时

（a）由(8),(9),(13),(14)式我们得到广义的 KdV-Burgers 系统的三角周期解

$$u_{11}=\left(\frac{a_0h_2\pm a_0h_1\mathrm{i}\tan(\sqrt{h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_{11})}{h_2+\mu\sqrt{h_1h_2}\tan(\sqrt{h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_{11})}\right)^{1/p},\tag{53}$$

$$u_{12}=\left(\frac{a_0h_2\pm a_0h_1\mathrm{i}\cot(\sqrt{h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_{12})}{h_2+\mu\sqrt{h_1h_2}\cot(\sqrt{h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_{12})}\right)^{1/p},\tag{54}$$

$$u_{13}=\left(\frac{a_0h_2\pm a_0h_1\mathrm{i}(\sec(\sqrt{4h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_{13})\pm\tan(\sqrt{4h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_{13}))}{h_2+\mu\sqrt{h_1h_2}(\sec(\sqrt{4h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_{13})\pm\tan(\sqrt{4h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_{13}))}\right)^{1/p},\tag{55}$$

$$u_{14}=\left(\frac{a_0h_2\pm a_0h_1\mathrm{i}(\csc(\sqrt{4h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_{14})\pm\cot(\sqrt{4h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_{14}))}{h_2+\mu\sqrt{h_1h_2}(\csc(\sqrt{4h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_{14})\pm\cot(\sqrt{4h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_{14}))}\right)^{1/p}.\tag{56}$$

（b）由 (17)式,我们得到广义的 KdV-Burgers 系统的指数函数解

$$u_{15}=\left(\frac{a_0h_2\pm a_0h_1\mathrm{i}\left(\dfrac{1-\mathrm{i}c_{15}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\sqrt{h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)}}{1+c_{15}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\sqrt{h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)}}\right)}{h_2+\mu\sqrt{h_1h_2}\left(\dfrac{1-\mathrm{i}c_{15}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\sqrt{h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)}}{1+c_{15}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\sqrt{h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)}}\right)}\right)^{1/p},\tag{57}$$

这里

$$l=\pm\sqrt{-\frac{-4\delta k^2h_1h_2\pm 2\gamma kp\sqrt{-h_1h_2}-\lambda p^2}{s}}p^{-1},$$

a_0,μ,k 和 $c_{11},c_{12},c_{13},c_{14},c_{15}$是任意常数,而 α,β 由(42)式确定.

4）根据(42)式,当 $h_1h_2<0$ 时

（a）由(10),(11),(15),(16)式我们得到广义的 KdV-Burgers 系统的类孤子解

$$u_{16}=\left(\frac{a_0h_2\mp a_0h_1\tanh(\sqrt{-h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_{16})}{h_2+\mu\sqrt{-h_1h_2}\tanh(\sqrt{-h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_{16})}\right)^{1/p},\tag{58}$$

$$u_{17}=\left(\frac{a_0h_2\mp a_0h_1\coth(\sqrt{-h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_{17})}{h_2+\mu\sqrt{-h_1h_2}\coth(\sqrt{-h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_{17})}\right)^{1/p},\tag{59}$$

$$u_{18}=\left(\frac{a_0h_2\mp a_0h_1(\tanh(\sqrt{-4h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_{18})\pm \mathrm{i}\,\mathrm{sech}(\sqrt{-4h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_{18}))}{h_2+\mu\sqrt{-h_1h_2}(\tanh(\sqrt{-4h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_{18})\pm \mathrm{i}\,\mathrm{sech}(\sqrt{-4h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_{18}))}\right)^{1/p},\tag{60}$$

$$u_{19}=\left(\frac{a_0h_2\mp a_0h_1(\coth(\sqrt{-4h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_{19})\pm \mathrm{csch}(\sqrt{-4h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_{19}))}{h_2+\mu\sqrt{-h_1h_2}(\coth(\sqrt{-4h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_{19})\pm \mathrm{csch}(\sqrt{-4h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)+c_{19}))}\right)^{1/p}.\tag{61}$$

（b）由（18）式，我们得到广义的 KdV-Burgers 系统的指数函数解

$$u_{20}=\left(\frac{a_0h_2\mp a_0h_1\dfrac{1+c_{20}\mathrm{e}^{2\sqrt{-h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)}}{1-c_{20}\mathrm{e}^{2\sqrt{-h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)}}}{h_2+\mu\sqrt{-h_1h_2}\dfrac{1+c_{20}\mathrm{e}^{2\sqrt{-h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)}}{1-c_{20}\mathrm{e}^{2i\sqrt{-h_1h_2}k(x+ly-\lambda t)}}}\right)^{1/p},\tag{62}$$

这里

$$l=\pm\sqrt{-\frac{-4\delta k^2h_1h_2\pm 2\gamma kp\sqrt{-h_1h_2}-\lambda p^2}{s}p^{-1}},$$

a_0,μ,k 和 $c_{16},c_{17},c_{18},c_{19},c_{20}$ 是任意常数，而 α,β 由（42）式确定.

注 3 很显然的可以看到：当 $s=0$ 时，方程(2)就是文献[15]中的方程（1.2）. 当 $\mu=0$ 时，文献[15]中的部分解是上述解 u_1,u_2,u_6,u_7 和 $u_{11},u_{12},u_{16},u_{17}$ 的一些特殊形式.

注 4 如果将(7)中的参数 h_1 和 h_2 取不同的值，则 tanh 函数展开法[7]，广义的 tanh 函数展开法[8]，改进的扩展的 tanh 函数法[9]，广义的双曲函数法[10]，Riccati 方程有理展开法[11]和广义的 Riccati 方程有理展开法[12]都可以由新方法得到，即我们这里提出的方法更具有一般性.

4. 结 论

在这篇文章中，我们提出了一种新的广义的 Riccati 方程有理展开法并将其应用到了复合的 KdV 系统及广义的 KdV-Burgers 系统. 成功的得到了许多类型的新的精确解. 该方法也可以很容易的应用到其他的非线性发展方程中去，并且可以得到更多的孤波解或其他形式的解. 另外，该方法可以用计算机处理，这样，我们就可以用计算机来处理复杂繁琐的符号代数计算问题.

[1] Ablowitz M J, Clarkson P A 1991 *Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering* (New York: Cambridge University Press)

[2] Wadati M. J 1972 *Phys. Soc. Jpn.* **32** 1681

[3] Hirota R 1971 *Phys. Rev. Lett.* **27** 1192

[4] Lou S Y 2000 *Phys. Lett.* A **277** 94

[5] Wang M L 1995 *Phys. Lett.* A **199** 169

[6] Parkes E J, Duffy B R 1996 *Comp. Phys. Commun.* **98** 288
Parkes E J, Duffy B R 1997 *Phys. Lett.* A **229** 217

[7] Khater A H, Malfliet W, Callebaut D K, Kamel E S 2002 *Chaos, Solitons and Fractals* **14** 513

[8] Fan E G 2000 *Phys. Lett.* A **277** 212
Fan E G 2001 *Phys. Lett.* A **282** 18

[9] Elwakil S A, El-labany S K, Zahran M A, Sabry R 2002 *Phys. Lett.* A **299** 179

[10] Gao Y T, Tian B 2001 *Comp. Phys. Commun.* **133** 158

[11] Wang Q, Chen Y, Zhang H Q 2005 *Phys. Lett.* A **340** 411

[12] Wang J, Zhang X L, Song L N, Zhang H Q 2006 *Appl. Math. Comput.* **182** 1330

[13] Li Z B, Liu Y P 2002 *Comp. Phys. Commun.* **148** 256

[14] Yan Z Y, Zhang H Q 1999 *Phys. Lett.* A **252** 291

[15] Li B, Chen Y, Zhang H Q 2003 *Chaos Solitons and Fractals* **15** 647

[16] Xie F D, Chen J, Lü Z S 2005 *Commun. Theor. Phys.* **43** 585

[17] Song L N, Zhang H Q 2005 *Commun. Theor. Phys.* **44** 783

[18] Wadati M J 1975 *Phys. Soc. Jpn.* **38** 673, 681

[19] Pego R L, Smereka P, Weinstein MI 1993 *Physica* D **67** 45

[20] Dey B. 1986 *J. Phys.* A **19** 19

[21] Coffey M W, SIAM J 1990 *Appl. Math.* **50** 1580

[22] Zhang W G, Chang Q S, Jiang B G 2002 *Chaos Solitons and Fractals* **13** 311

[23] Liu S K, Fu Z T, Liu S D, Zhao Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1923 (in Chinese)[刘式适、付遵涛、刘式达、赵 强 2002 物理学报 **51** 1923]

[24] Lu D C, Hong B J, Tian L X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5617 (in Chinese)[卢殿臣、烘宝剑、田立新 2006 物理学报 **55** 5617]

[25] Pan J T, Gong, L X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5585 (in Chinese)[潘军廷、龚伦训 2007 物理学报 **56** 5585]

[26] Shi Y R, Guo P, Lü K P, Duan W S 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3265 (in Chinese)[石玉仁、郭 鹏、吕克璞、段文山 2004 物理学报 **53** 3265]

A new generalized Riccati equation rational expansion method and its application*

Wang Jing†

(*Department of Mathematics and Informatics*, *Henan Polytechnic University*, *Jiaozuo* 454000, *Chian*)

(Received 25 July 2009; revised manuscript received 30 August 2009)

Abstract

With the aid of symbolic computation system Maple, several new kinds of generalized exact solutions for the compound KdV system and extended KdV – Burgers system with nonlinear terms of any order are obtained by using a new generalize Riccati equation rational expansion method. This approach can also be applied to other nonlinear evolution equations with nonlinear terms of any order.

Keywords: generalized Riccati equation rational expansion method, compound KdV system with nonlinear terms of any order, extended KdV – Burgers system with nonlinear terms of any order, symbolic computation

PACC: 0230, 0290, 0420J

* Poject supported by Natural Science Foundation of Henan Province (Grant No. 0611055500), the Youth Funds of Henan Polytechnic University (Grant No. Q2006-10-646172), the Youth Mainstry teacher Funds of Henan Polytechnic University (Grant No. 649071).

† Corresponding author. E-mail: scilencewj@163.com