

广义 Birkhoff 自治系统平衡状态的流形稳定性*

李广成[†] 陈雷明 王东晓 武大勇

(郑州航空工业管理学院数理系, 郑州 450015)

(2009 年 4 月 19 日收到; 2009 年 7 月 10 日收到修改稿)

研究广义 Birkhoff 自治系统平衡状态流形稳定性. 建立广义 Birkhoff 自治系统的受绕运动方程和平衡方程. 由 Liapunov 稳定性理论给出广义 Birkhoff 自治系统的平衡状态流形稳定性的有关判据. 举例说明结果的应用.

关键词: 广义 Birkhoff 方程, 自治系统, 平衡状态, 流形稳定性

PACC: 0320

1. 引 言

1927 年 Birkhoff 给出比 Hamilton 方程更为普遍的一类新型动力学方程^[1], 并给出比 Hamilton 原理更为普遍的一类新型积分变分原理. 1979 年 Santilli 将这个新方程命名为 Birkhoff 方程^[2]. 梅凤翔及其合作者对 Birkhoff 系统进行了深入研究, 构造了 Birkhoff 系统动力学的基本理论框架^[3]. 文献[3—6]系统地研究了 Birkhoff 系统逆问题、对称性、积分不变量, 稳定性, 以及 Birkhoff 系统的代数和几何描述等. 梅凤翔在 Birkhoff 方程的右端增加了一个附加项, 将其称之为广义 Birkhoff 方程, 并由此构筑了广义 Birkhoff 系统动力学的理论框架^[7]. 由广义 Birkhoff 方程描述的力学系统和物理系统称为广义 Birkhoff 系统. 文献[8,9]研究了广义 Birkhoff 系统的积分不变量和广义 Birkhoff 系统动力学的逆问题. 文献[10,11]也对广义 Birkhoff 系统有关问题做了深入研究.

广义 Birkhoff 系统作为一类广泛的力学系统, 其稳定性研究有助于加深了解约束力学系统的稳定性问题. 广义 Birkhoff 自治系统的平衡位置有时不是孤立的, 而是组成流形, 那么平衡状态稳定性判定定理就不再适用^[12]. 本文研究广义 Birkhoff 自治系统平衡状态的流形稳定性问题. 给出有关平衡状态流形稳定与不稳的相关判据.

2. 系统运动方程和平衡方程

广义 Birkhoff 自治系统方程的一般形式为

$$\sum_{\nu=1}^{2n} \omega_{\mu\nu} \dot{\alpha}^{\nu} - \frac{\partial B}{\partial \alpha^{\mu}} = -\Lambda_{\mu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, 2n), \quad (1)$$

其中, $\omega_{\mu\nu} = \frac{\partial R_{\nu}}{\partial \alpha^{\mu}} - \frac{\partial R_{\mu}}{\partial \alpha^{\nu}}$, $\det \omega_{\mu\nu} \neq 0$. 这里 $B = B(\alpha)$ 和 $R_{\mu} = R_{\mu}(\alpha)$ 称为 Birkhoff 函数和 Birkhoff 函数组, 而 $\omega_{\mu\nu}$ 称为 Birkhoff 张量. 方程中 Λ_{μ} 为附加项.

这里我们设附加项 Λ_{μ} 满足条件

$$\Lambda_{\mu} = \frac{\partial w}{\partial \alpha^{\mu}} \quad (\mu = 1, 2, \dots, 2n). \quad (2)$$

设系统(1)的平衡位置为

$$\alpha^{\nu} = \alpha_0^{\nu}, \quad \dot{\alpha}^{\nu} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, 2n). \quad (3)$$

将(3)式代入方程(1), 则得广义自治系统的平衡方程

$$\left(\frac{\partial(B-w)}{\partial \alpha^{\mu}} \right)_0 = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, 2n), \quad (4)$$

这里下标 0 表示其中 α 用 α_0 替代的结果. 如果平衡方程(4)有解, 则系统存在平衡位置. 如果 $2n$ 个代数方程(4)是彼此独立的, 则平衡位置是孤立的; 如果这 $2n$ 个代数方程不是彼此独立的, 则平衡位置组成流形.

* 国家自然科学基金(批准号:10772026)和河南省教育厅自然科学基金(批准号:2008A130002, 2008A140013)资助的课题.

[†] E-mail: gchli0225@163.com

3. 广义 Birkhoff 自治系统平衡状态流形的稳定性

设方程(4)不是彼此独立的,其稳定性无法用平衡稳定性的一次近似方法和直接法来判断. 本节我们讨论广义 Birkhoff 自治系统的平衡稳定性.

设广义 Birkhoff 自治系统(1)有积分^[8]

$$g(\alpha^r) = c_0 \quad (5)$$

组成流形 \mathbf{L} ,

$$\mathbf{L} = \{\alpha^\mu \mid g(\alpha^r) = c_0 = \text{const}\}, \quad (6)$$

它是方程(1)的一个不变集. 假设平衡方程(4)的平衡位置组成流形 \mathbf{E} ,

$$\mathbf{E} = \left\{ \alpha^\mu \left| \left(\frac{\partial(B-w)}{\partial \alpha^\mu} \right)_0 = 0 \right. \right\}. \quad (7)$$

文献[6]根据 Liapunov 稳定性理论推广而得到的有关平衡状态流形稳定性的判据,可以直接移植到广义 Birkhoff 自治系统中,有

命题 1 对系统(1)的受扰运动方程(4),如果存在一个在流形 \mathbf{L} 上相对 \mathbf{E} 的定号函数 $V(\alpha^\mu)$,它沿方程(4)对时间的全导数 \dot{V} 在 \mathbf{L} 上相对于 \mathbf{E} 为 $V(\alpha^\mu)$ 的异号常号函数或恒等于零,那么平衡状态流形 \mathbf{E} 在 \mathbf{L} 上是稳定的.

命题 2 对系统(1)的受扰运动方程(4),如果存在一个在流形 \mathbf{L} 上相对 \mathbf{E} 的非常负(非常正)函数 $V(\alpha^\mu)$,它沿方程(4)对时间的全导数 \dot{V} 在 \mathbf{L} 上相对于 \mathbf{E} 为常正(常负)函数,那么平衡状态流形 \mathbf{E} 在 \mathbf{L} 上是不稳定的.

命题 1 和命题 2 给出的一般规则. 对于研究广义 Birkhoff 自治系统平衡状态流形稳定性时,我们取 Birkhoff 函数 B 为 V 函数,并且总有

$$\frac{dB}{dt} = 0, \quad (8)$$

于是由命题 1 得到

命题 3 对系统(1)的受扰运动方程(4),如果 Birkhoff 函数 B 在流形 \mathbf{L} 上相对 \mathbf{E} 的为定号,那么广义 Birkhoff 自治系统平衡状态流形 \mathbf{E} 在 \mathbf{L} 上是稳定的.

4. 算 例

例 设 4 阶 Birkhoff 系统的 Birkhoff 函数为

$$B = \frac{1}{2} \{ b_{11} (\alpha^1 + \alpha^2)^2 + 2b_{12} (\alpha^1 + \alpha^2) \times (\alpha^3 + \alpha^4)^2 + b_{22} (\alpha^3 + \alpha^4)^2 \}, \quad (9)$$

Birkhoff 函数组和附加项为

$$R_1 = R_2 = 0, R_3 = \frac{1}{2} (\alpha^1)^2 + \alpha^1, R_4 = \frac{1}{2} (\alpha^2)^2 + \alpha^2, \\ w = \frac{1}{2} k (\alpha^1)^2, \quad (10)$$

这里

$$\alpha^1 \neq -1, \quad \begin{vmatrix} b_{11} + k & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (11)$$

由此得系统的平衡方程

$$(b_{11} + k) (\alpha^1 + \alpha^2) + b_{12} (\alpha^3 + \alpha^4) = 0, \\ b_{12} (\alpha^1 + \alpha^2) + b_{22} (\alpha^3 + \alpha^4) = 0. \quad (12)$$

由(11)式知,方程(12)有解

$$a_0^1 + a_0^2 = 0, a_0^3 + a_0^4 = 0. \quad (13)$$

于是得到系统平衡状态流形

$$\mathbf{E} = \{ \alpha^\mu \mid a^1 + a^2 = 0, a^3 + a^4 = 0 \}. \quad (14)$$

函数 B 相对于流形 \mathbf{E} 为正定的充要条件是

$$b_{11} + k > 0, \quad \begin{vmatrix} b_{11} + k & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix} > 0. \quad (15)$$

函数 B 相对于流形 \mathbf{E} 为正定的充要条件是

$$-b_{11} - k > 0, \quad \begin{vmatrix} -b_{11} - k & -b_{12} \\ -b_{12} & -b_{22} \end{vmatrix} > 0. \quad (16)$$

由命题 3 知,当系数满足条件(15)和(16)时,系统的平衡状态流形是稳定的.

5. 结 论

广义 Birkhoff 自治系统的平衡位置有时不是孤立的,而是组成流形. 当附加项满足(2)式时,对系统(1)的受扰运动方程(4),如果 Birkhoff 函数 B 在流形 \mathbf{L} 上相对于 \mathbf{E} 为定号,那么广义 Birkhoff 自治系统平衡状态流形 \mathbf{E} 在 \mathbf{L} 上是稳定的. 本文的结果是文献[3]相应结果的推广.

- [1] Birkhoff G D 1927 *Dynamical systems* (Providence RI: AMS College Publ)
- [2] Stantilli R M 1983 *Foundations of theoretical mechanics II* (New York: Springer-Verlag)
- [3] Mei F X, Shi R C, Zhang Y F, Wu H B 1996 *Dynamics of Birkhoffian System* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔、史荣昌、张永发、吴惠彬 1996 Birkhoff 系统动力学(北京:北京理工大学出版社)]
- [4] Mei F X 1993 *Chin. Sci. Bull.* **38** 311 (in Chinese) [梅凤翔 1993 科学通报 **38** 311]
- [5] Mei F X 1997 *Journal of Beijing Institute of Technology* **6** 106 (in Chinese) [梅凤翔 2000 北京理工大学学报 **6** 106]
- [6] Luo S K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1416 (in Chinese) [罗绍凯 2002 物理学报 **51** 1416]
- [7] Mei F X 1993 *Science in China A* **36** 1456 [梅凤翔 1993 中国科学 A **36** 1456]
- [8] Mei F X, Cai J L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4658. (in Chinese) [梅凤翔、蔡建乐 2008 物理学报 **57** 4658]
- [9] Mei F X, Xie J F, Gang T Q 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4649 (in Chinese) [梅凤翔、解加芳、江铁强 2008 物理学报 **57** 4649]
- [10] Chen X W, Mei F X 2000 *Journal of Beijing Institute of Technology* **9** 5 (in Chinese) [陈向炜、梅凤翔 2000 北京理工大学学报 **9** 5]
- [11] Chen X W, Fu J L, Luo, S K 2000 *Jour. Shangqiu Tech. Coll.* **16** 6 (in Chinese) [陈向炜、付景礼、罗绍凯 2000 商丘师院学报 **16** 6]
- [12] Mei F X, Shi R C, Zhang Y F, Zhu H P 1996 *Stability of the Constrained Mechanics System* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔、史荣昌、张永发、朱海平 1996 约束力学系统的运动稳定性(北京:北京理工大学出版社)]

Manifold stability of equilibrium state of autonomous generalized Birkhoff system*

Li Guang-Cheng[†] Chen Lei-Ming Wang Dong-Xiao Wu Da-Yong

(Department of Mathematics and Physics, Zhengzhou Institute of Aeronautical Industry Management, Zhengzhou 450015, China)

(Received 19 April 2009; revised manuscript received 10 July 2009)

Abstract

Manifold stability of equilibrium state of autonomous generalized Birkhoff system is studied. The perturbation equation and equilibrium equation of autonomous generalized Birkhoff system is established. The corresponding criteria for manifold stability of autonomous generalized Birkhoff system is given by the Liapunov stability theory. Finally, an example is presented to illustrate these results.

Keywords: generalized Birkhoff system, autonomous system, equilibrium state, manifold stability

PACC: 0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10772026) and Natural Science Foundation of Education Department of Henan Province (Grant Nos. 2008A130002, 2008A140013).

[†] E-mail: gchli0225@163.com