第 59 卷 第 5 期 2010 年 5 月
1000-3290/2010/59(05)/2935-04
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol. 59, No. 5, May, 2010

完整系统 Nielsen 方程的统一对称性与守恒量*

李元成[1)†] 王小明[1)] 夏丽莉[2)]

1)(中国石油大学(华东)物理科学与技术学院, 青岛 266555)

2)(河南教育学院物理系, 郑州 450046)

(2009 年 8 月 7 日收到;2009 年 8 月 27 日收到修改稿)

研究完整系统 Nielsen 方程的统一对称性与守恒量. 在完整系统 Nielsen 方程的基础上,首先给出了 Nielsen 方程的 Noether 对称性、Lie 对称性和 Mei 对称性与守恒量,其次给出了 Nielsen 方程的统一对称性的定义和判据,得到 Nielsen 方程的统一对称性导致的 Noether 守恒量、Hojman 守恒量和 Mei 守恒量. 举例说明结果的应用.

关键词: 完整系统,Nielsen 方程,统一对称性,守恒量

PACC: 0320

1. 引 言

1935 年 Nielsen 建立了完整系统的一类新型方程,后人称为 Nielsen 方程. Nielsen 方程在分析力学理论中占据重要地位,1918 年 Noether 揭示了对称性与守恒量之间的潜在关系[1],通过近几十年的研究,对称性与守恒量的研究在分析力学领域得到快速的发展,已取得许多的研究成果[2—10]. 然而对 Nielsen 方程的对称性与守恒量的研究仍有许多工作要做. 近年来,对 Nielsen 方程的对称性研究已有初步成果[11—20],但仅研究了 Mei 对称性和 Lie-Mei 对称性. 对方程的其他对称性如 Noether 对称性和统一对称性的研究未见报道. 本文研究完整系统 Nielsen 方程的统一对称性,给出完整系统 Nielsen 方程的统一对称性的定义、判据,得到 Nielsen 方程的统一对称性导致的 Noether 守恒量、Hojman 守恒量和 Mei 守恒量.

2. 系统的运动微分方程

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$来确定,受有双面理想完整约束的运动微分方程可表示为 Nielsen 方程

$$\frac{\partial \dot{L}}{\partial \dot{q}_s}-2\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s \quad (s=1,\cdots,n), \tag{1}$$

式中 $L=L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为系统的 Lagrange 函数,$Q_s=Q_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$为非势广义力. 方程(1)可表示为

$$N_s(L)=Q_s \quad (s=1,\cdots,n), \tag{2}$$

其中

$$N_s=\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-2\frac{\partial}{\partial q_s} \tag{3}$$

为 Mei 算子. 设系统(2)非奇异,由方程(2)可解出所有广义加速度,记作

$$\ddot{q}_s=\alpha_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}), \quad (s=1,\cdots,n). \tag{4}$$

3. 系统的 Noether 对称性、Lie 对称性和 Mei 对称性

取无限小变换

$$t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),$$
$$q_s^*(t^*)=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}), \tag{5}$$

其中 ε 为无限小参数,ξ_0,ξ_s 为无限小单参数群变换的生成元.

Noether 对称性是 Hamilton 作用量在无限小变换下的一种不变性. 寻找 Nielsen 方程的 Noether 对称性及其守恒量,必须将 Nielsen 方程变换成 Lagrange 方程,可以证明[21]

$$N_s(L)=E_s(L)=Q_s, \quad (s=1,\cdots,n), \tag{6}$$

* 河南省教育厅自然科学基础研究项目(批准号:2009A140003)和河南教育学院骨干教师培养基金资助的课题.

† E-mail: liyuanc@upc.edu.cn

其中

$$E_s = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial}{\partial q_s}. \tag{7}$$

于是有

命题 1 对完整系统 Nielsen 方程,如果存在规范函数 $G_{\mathrm{N}} = G_{\mathrm{N}}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 使无限小生成元 ξ_0,ξ_s 满足 Noether 等式

$$L\dot{\xi}_0 + X^{(1)}(L) + Q_s(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \dot{G}_{\mathrm{N}} = 0, \tag{8}$$

那么 Nielsen 方程具有 Noether 对称性,同时直接导致如下守恒量:

$$I_{\mathrm{N}} = L\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G_{\mathrm{N}} = \mathrm{const}, \tag{9}$$

其中

$$X^{(1)} = \xi_0\frac{\partial}{\partial t} + \xi_s\frac{\partial}{\partial q_s} + (\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}.$$

证明 因为完整系统 Nielsen 方程的 Noether 对称性必须存在一个规范函数 $G_{\mathrm{N}} = G_{\mathrm{N}}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足 Noether 等式(8),将(9)式两边对 t 求导,利用(8)式能够证明$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_{\mathrm{N}}=0$,命题 1 成立.

Lie 对称性是微分方程在群的无限小变换下的一种不变性. 由定义可得完整系统 Nielsen 方程 Lie 对称性的确定方程为

$$X^{(2)}[N_s(L)] = X^{(1)}(Q_s). \tag{10}$$

其中 $X^{(2)} = X^{(1)} + (\ddot{\xi}_s - 2\ddot{q}_s\dot{\xi}_0 - \dot{q}_s\ddot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}$.

命题 2 如果完整系统 Nielsen 方程在无限小变换(5)下生成元 ξ_0,ξ_s 满足方程(10),且存在函数 $\mu=\mu(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足

$$\frac{\partial \alpha_s}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\mu = 0, \tag{11}$$

则完整系统 Nielsen 方程的 Lie 对称性可导致如下广义 Hojman 守恒量:

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{H}} = &\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial t}(\mu\xi_0) + \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial q_s}(\mu\xi_s) \\ &+ \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}[\mu(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)] - \dot{\xi}_0 = \mathrm{const}. \end{aligned} \tag{12}$$

证明 因为完整系统 Nielsen 方程的 Lie 对称性必须满足确定方程(10),利用方程(10)和(11),根据系统广义 Hojman 守恒量的证明方法,能证明系统存在守恒量(12).

Mei 对称性是用变换后的动力函数代替变换前的动力学函数而使运动方程形式保持不变的一种不变性. 由定义可得完整系统 Nielsen 方程 Mei 对称性的判据方程为

$$N_s[X^{(1)}(L)] = X^{(1)}(Q_s). \tag{13}$$

命题 3 如果完整系统 Nielsen 方程在无限小变换(5)下生成元 ξ_0,ξ_s 满足方程(13),且存在规范函数 $G_{\mathrm{M}} = G_{\mathrm{M}}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足广义结构方程

$$\begin{aligned} &X^{(1)}(L)\dot{\xi}_0 + X^{(1)}[X^{(1)}(L)] \\ &+ X^{(1)}(Q_s)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \dot{G}_{\mathrm{M}} = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

则完整系统 Nielsen 方程的 Mei 对称性可导致如下 Mei 守恒量

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{M}} = &X^{(1)}(L)\xi_0 + \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G_{\mathrm{M}} \\ &= \mathrm{const}. \end{aligned} \tag{15}$$

证明 因为完整系统 Nielsen 方程的 Mei 对称性必须满足 Mei 对称性判据方程(13),将(15)式两边对 t 求导,利用(13),(14)两式能够证明$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_{\mathrm{M}}=0$,系统存在 Mei 守恒量(15).

4. 系统的统一对称性

定义 如果完整系统 Nielsen 方程的对称性同时为 Noether 对称性、Lie 对称性和 Mei 对称性,这样的对称性称为完整系统 Nielsen 方程的统一对称性.

判据 对于完整系统 Nielsen 方程,如果存在规范函数 $G_{\mathrm{N}} = G_{\mathrm{N}}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$,无限小生成元 ξ_0,ξ_s 满足如下等式:

$$\begin{aligned} &\{L\dot{\xi}_0 + X^{(1)}(L) + Q_s(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \dot{G}_{\mathrm{N}}\}^2 \\ &+ \{X^{(2)}[N_s(L)] - X^{(1)}(Q_s)\}^2 \\ &+ \{N_s[X^{(1)}(L)] - X^{(1)}(Q_s)\}^2 = 0, \end{aligned} \tag{16}$$

则相应的对称性为完整系统 Nielsen 方程的统一对称性.

完整系统 Nielsen 方程的统一对称性在一定条件下可导出 Noether 守恒量,Hojman 守恒量和 Mei 守恒量.

命题 4 对于完整系统 Nielsen 方程,统一对称性可导致形如(9)式的 Noether 守恒量.

命题 5 对于完整系统 Nielsen 方程,如果存在函数 $\mu=\mu(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足(11)式,则统一对称性可导致形如(12)式广义 Hojman 守恒量.

命题 6 对于完整系统 Nielsen 方程,如果存在规范函数 $G_{\mathrm{M}} = G_{\mathrm{M}}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足(14)式,则统一对称

性可导致形如(15)式 Mei 守恒量.

5. 算　例

假设力学系统的 Lagrange 函数为 $L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)$,系统受到的非势广义力为 $Q_1=\dot{q}_1, Q_2=\dot{q}_2$,试研究系统的统一对称性导致的守恒量.

取生成元

$$\xi_0=0, \xi_1=\xi_2=1. \tag{17}$$

可验证生成元(17)满足方程(16),则该对称性是完整系统 Nielsen 方程的统一对称性.

将生成元(17)代入(16)式可得规范函数

$$G_N=-(q_1+q_2). \tag{18}$$

由(9)式可得完整系统 Nielsen 方程统一对称性对应的 Noether 守恒量为

$$I_N=\dot{q}_1+\dot{q}_2-q_1-q_2=\text{const}. \tag{19}$$

将生成元(17)式代入(11)式可得函数

$$\mu=(q_1-\dot{q}_1)(q_2-\dot{q}_2)\exp(-2t). \tag{20}$$

由(12)式可得完整系统 Nielsen 方程统一对称性对应的广义 Hojman 守恒量为

$$I_H=(q_1-\dot{q}_1)^{-1}+(q_2-\dot{q}_2)^{-1}=\text{const}. \tag{21}$$

将生成元(17)代入(14)式可得规范函数 $G_M=0$,由(15)式可得完整系统 Nielsen 方程统一对称性对应的 Mei 守恒量为 $I_M=0$.

取生成元

$$\xi_0=0, \xi_1=t, \xi_2=-t. \tag{22}$$

方程(16)满足,则该对称性是完整系统 Nielsen 方程的统一对称性.

将生成元(22)式代入(16)式可得规范函数

$$G_N=(\dot{q}_2-\dot{q}_1)t. \tag{23}$$

由(9)式可得完整系统 Nielsen 方程统一对称性对应的 Noether 守恒量为

$$I_N=0. \tag{24}$$

将生成元(22)式代入(11)式可得函数

$$\mu=(q_1-\dot{q}_1)(q_2-\dot{q}_2)\exp(-2t). \tag{25}$$

由(12)式可得完整系统 Nielsen 方程统一对称性对应的广义 Hojman 守恒量为

$$\begin{aligned}I_H&=t(q_1-\dot{q}_1)^{-1}-t(q_2-\dot{q}_2)^{-1}\\&\quad-(q_1-\dot{q}_1)^{-1}+(q_2-\dot{q}_2)^{-1}\\&=\text{const}.\end{aligned} \tag{26}$$

将生成元(22)式代入(14)式可得规范函数

$$G_M=2t+t^2, \tag{27}$$

由(15)式可得完整系统 Nielsen 方程统一对称性对应的 Mei 守恒量为

$$I_M=4t+t^2=\text{const}. \tag{28}$$

6. 结　论

研究力学系统的统一对称性的目的之一是寻找系统更多的守恒量. 本文研究的完整系统 Nielsen 方程统一对称性,给出了定义和判据,由统一对称性,在一定条件下可以找到 Noether 守恒量、Hojman 守恒量和 Mei 守恒量. 本文的结果包含了文献[11,12,14]的结果, 有可能推广到其他类型的约束系统.

[1] Noether A E 1918 *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math. Phys.* **KI** 235

[2] Mei F X, Liu D and Luo Y 1991 *Advanced Analytical Mechanics* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔、刘　端、罗勇 1991 高等分析力学(北京:北京理工大学出版社)]

[3] Li Z P 1993 *Classical and quantal dynamics of constrained systems and Their symmetrical properties* (Beijing: Beijing Polytechnic University press) (in Chinese) [李子平 1993 经典和量子约束系统及其对称性质(北京:北京工业大学出版社)]

[4] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用(北京:科学出版社)]

[5] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanics Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量(北京:北京理工大学出版社)]

[6] Luo S K, Zhang Y F 2008 *Advances in the Study of Dynamics of Constrained Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [罗绍凯、张永发 2008 约束系统动力学研究进展(北京:科学出版社)]

[7 Hojman S A 1992 *J. Phys.* A: *Math. Gen.* **25** L291

[8] Mei F X 2000 *J. Beijing Institute of Technology* **9** 120

[9] Mei F X, Shang M 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1901 (in Chinese) [梅凤翔、尚　玫 2000 物理学报 **49** 1901]

[10] Mei F X, Xu X J, Zhang Y F 2004 *Acta Mech. Sin.* **20** 668

[11] Wang S Y, Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 373

[12] Qiao Y F, Zhao S H, Li R J 2004 *Chin. Phys.* **13** 292

[13] Xu X J, Mei F X, Qin M C 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4021 (in Chinese) [许学军、梅凤翔、秦茂昌 2004 物理学报 **53** 4021]

[14] Fang J H, Xue Q Z, Zhao S Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2183 (in Chinese) [方建会、薛庆忠、赵嵩卿 2002 物理学报 **51** 2183]

[15] Zhang J, Fang J H, Chen P S 2005 *Acta Armamentarii* **26** 228 (in Chinese) [张 军、方建会、陈培胜 2005 兵工学报 **26** 228]

[16] Hu C L, Xie J F 2007 *J. Hulunbeier Coollege* **15** 83 (in Chinese) [胡楚勒、解加芳 2007 呼伦贝尔学院学报 **15** 83]

[17] Jia L Q, Luo S K, Zhang Y Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2006 (in Chinese) [贾利群、罗绍凯、张耀宇 2008 物理学报 **57** 2006]

[18] Jia L Q, Zhang Y Y, Luo S K, Cui J C 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2141 (in Chinese) [贾利群、张耀宇、罗绍凯、崔金超 2009 物理学报 **58** 2141]

[19] Cui J C, Zhang Y Y, Jia L Q 2009 *Chin. Phys* B **18** 1731

[20] Cui J C, Jia L Q and Zhang Y Y 2009 *Commun. Theor. Phys.* **52** 7

[21] Mei F X1984 *Acta Mech. Sin.* **16** 596 (in Chinese) [梅凤翔 1984 力学学报 **16** 596]

Unified symmetry and conserved quantities of Nielsen equation for a holonomic mechanical system*

Li Yuan-Cheng[1)†] Wang Xiao-Ming[1)] Xia Li-Li[2)]

1) (*College of Physics Science and Technology, China University of Petroleum, Qingdao* 266555, *China*)

2) (*Department of Physics, Henan Institute Of Education, Zhengzhou* 450046, *China*)

(Received 7 August 2009; revised manuscript received 27 August 2009)

Abstract

The unified symmetry and conserved quantities of Nielsen equation for a holonomic mechanical system are studied. On the base of the Nielsen equation, we first give the Noether symmetry, the Lie symmetry and the Mei symmetry for the equation and the conserved quantities deduced from them, then the definition and the criterion for unified symmetry of Nielsen equation are presented, lastly, the Mei conserved quantity, as well as the Noether conserved quantity and the Hojman conserved quantity deduced from the unified symmetry are obtained. An example is given to illustrate the application of the result .

Keywords: holonomic mechanical system, Nielsen equation, unified symmetry, conserved quantity

PACC: 0320

* Project supported by the Key Disciplines' Building Foundation of Henan Institute of Education, the Natural Science Foundation of Education Bureau of Henan Province, China (Grant No. 2009A140003) and the Young Core Instructor from Henan Institute of Education.

† E-mail: liyuanc@upc.edu.cn