第 59 卷 第 5 期 2010 年 5 月
1000-3290/2010/59(05)/2939-03
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol. 59, No. 5, May, 2010

Lagrange 系统 Mei 对称性的Ⅲ型结构方程和Ⅲ型 Mei 守恒量*

贾利群[1)†] 张耀宇[2)] 杨新芳[1)] 崔金超[3)] 解银丽[1)]

1)(江南大学理学院, 无锡 214122)

2)(平顶山学院电气信息工程学院, 平顶山 467002)

3)(北京理工大学宇航学院, 北京 100081)

(2009 年 8 月 13 日收到;2009 年 9 月 4 日收到修改稿)

研究 Lagrange 系统 Mei 对称性的Ⅲ型结构方程和Ⅲ型 Mei 守恒量. 在群的无限小变换下,由 Lagrange 系统 Mei 对称性的定义和判据,得到 Lagrange 系统 Mei 对称性的Ⅲ型结构方程和Ⅲ型 Mei 守恒量. 举例说明结果的应用.

关键词: Lagrange 系统, Mei 对称性, Ⅲ型结构方程, Ⅲ型 Mei 守恒量

PACC: 0320

1. 引　　言

2000 年,梅凤翔提出了力学系统中的动力学函数经过无限小变换后仍满足原方程的一种新对称性[1],被学者称为 Mei 对称性. 2000 年到 2007 年间,Mei 对称性的研究成果集中反映在梅凤翔和国内众多学者的研究专著中[2, 3],2008 年之后,Mei 对称性依然是众多学者研究的热点[4—16]. 目前,文献[17]研究了 Lagrange 系统 Mei 对称性直接导致的一种新的守恒量. 本文研究 Lagrange 系统 Mei 对称性直接导致的Ⅲ型结构方程和Ⅲ型 Mei 守恒量.

2. Lagrange 系统的 Mei 对称性及其判据

设系统受到的约束是理想双面完整约束,系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 确定,系统的 Lagrange 函数 L 和 Lagrange 方程分别为

$$L = L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}), \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0 \quad (s = 1,2,\cdots,n). \tag{2}$$

引入 Euler 算子

$$E_s = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial}{\partial q_s} \quad (s = 1,2,\cdots,n),$$

则方程(2)可简写为

$$E_s(L) = 0 \quad (s = 1,2,\cdots,n). \tag{3}$$

引入时间和广义坐标的无限小变换

$$t^* = t + \varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),$$

$$q_s^*(t^*) = q_s(t) + \varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \quad (s = 1,2,\cdots,n), \tag{4}$$

其中,ε 为无限小参数,ξ_0 和 ξ_s 为无限小变换生成元. 本文采用 Einstein 求和约定. 引进

$$X^{(1)} = \xi_0\frac{\partial}{\partial t} + \xi_s\frac{\partial}{\partial q_s} + \left(\frac{\mathrm{d}\xi_s}{\mathrm{d}t} - \dot{q}_s\frac{\mathrm{d}\xi_0}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}, \tag{5}$$

其中

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_s\frac{\partial}{\partial q_s} + \ddot{q}_s\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}. \tag{6}$$

设在无限小变换(4)下,Lagrange 函数 $L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 变为 $L^*(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = L(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathbf{d}t^*})$.

定义 在无限小变换(4)下,如果系统运动方程(2)或(3)的形式保持不变,即

$$E_s(L^*) = 0 \quad (s = 1,\cdots,n) \tag{7}$$

成立,则这种不变性称为 Lagrange 系统的 Mei 对称性.

* 国家自然科学基金(批准号: 10572021)和江南大学预研基金(批准号: 2008LYY011)资助的课题.

† E-mail: jlq0000@163.com

在$(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$处展开$L^*$，有

$$
\begin{aligned}
L^* &= L\left(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right) \\
&= L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon\tilde{X}^{(1)}(L) + O(\varepsilon^2). \qquad (8)
\end{aligned}
$$

将(8)式代入方程(7)，忽略ε^2及更高阶小项，并利用方程(3)，得到

$$E_s[X^{(1)}(L)] = 0 \quad (s = 1,\cdots,n). \qquad (9)$$

于是有

判据 对Lagrange系统(2)，如果变换(4)的无限小生成元ξ_0和ξ_s满足方程(9)，则相应的不变性为系统的Mei对称性.

称方程(9)为Lagrange系统Mei对称性的判据方程.

3. Lagrange系统Mei对称性的Ⅲ型结构方程和Ⅲ型Mei守恒量

命题 如果Lagrange系统(2)的Mei对称性的生成元ξ_0,ξ_s以及规范函数$G_{\mathrm{M}}=G_{\mathrm{M}}(t,q,\dot{q})$满足如下Ⅲ型结构方程：

$$\frac{\mathrm{d}G_{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t} + q_s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial q_s} + \dot{q}_s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s} = 0, \qquad (10)$$

则Lagrange系统(2)的Mei对称性导致的Ⅲ型Mei守恒量为

$$I_{\mathrm{M}} = G_{\mathrm{M}} + \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial q_s}q_s = \mathrm{const}. \qquad (11)$$

证明 注意到Mei对称性的判据方程(9)和Ⅲ型结构方程(10)，有

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}I_{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}G_{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t} + q_s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial q_s} + \dot{q}_s\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial q_s} \\
&= \frac{\mathrm{d}G_{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t} + q_s\frac{d}{dt}\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial q_s} + \dot{q}_s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s} \\
&\quad - \dot{q}_s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s} + \dot{q}_s\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial q_s} \\
&= \frac{\mathrm{d}G_{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t} + q_s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial q_s} + \dot{q}_s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s} \\
&\quad - \dot{q}_sE_s[X^{(1)}(L)] \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

显然，方程(10)和(11)式是Lagrange系统Mei对称性的一种新的结构方程和守恒量.

4. 算 例

力学系统的Lagrange函数为[17]

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - q_1q_2 + t^2, \qquad (12)$$

试研究系统的Mei对称性和Ⅲ型Mei守恒量.

首先，研究Lagrange系统的Mei对称性. 将(12)式代入方程(2)得

$$\ddot{q}_1 + q_2 = 0,\ \ddot{q}_2 + q_1 = 0. \qquad (13)$$

做计算得

$$
\begin{aligned}
X^{(1)}(L) = &(\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\dot{\xi}_0)\dot{q}_1 + (\dot{\xi}_2 - \dot{q}_2\dot{\xi}_0)\dot{q}_2 \\
&- \xi_1q_2 - \xi_2q_1 + 2\xi_0t. \qquad (14)
\end{aligned}
$$

取生成元

$$\xi_0 = 0,\xi_1 = q_2,\xi_2 = q_1, \qquad (15)$$

则

$$X^{(1)}(L) = 2\dot{q}_1\dot{q}_2 - q_1^2 - q_2^2. \qquad (16)$$

于是有

$$E_s[X^{(1)}(L)] = 0 \quad (s = 1,2). \qquad (17)$$

因此，系统具有Mei对称性.

下面，研究Lagrange系统Mei对称性直接导致的Ⅲ型Mei守恒量. 将(16)式代入Ⅲ型结构方程(10)，可得

$$G_{\mathrm{M}} = q_1^2 + q_2^2 - 2\dot{q}_1\dot{q}_2, \qquad (18)$$

故由(11)式可得

$$I_{\mathrm{M}} = -2\dot{q}_1\dot{q}_2 - q_1^2 - q_2^2 = \mathrm{const}. \qquad (19)$$

值得注意的是：对生成元(15)，文献[17]给出的守恒量与(19)式相同.

5. 结 论

本文给出了Lagrange系统Mei对称性的Ⅲ型结构方程和Ⅲ型Mei守恒量. 它的形式和已找到的两种Lagrange系统Mei对称性的结构方程和守恒量[16]不同，并可找到与第一种形式的守恒量不同的新守恒量，但由此是否可找到与第二种形式的守恒量不同的新守恒量，还有待探讨. 本文的结果发展和完善了约束力学系统Mei对称性与Mei守恒量理论，可以推广到非完整约束力学系统等领域.

[1] Mei F X 2000 *J. Beijing Inst. Technol.* **9** 120
[2] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量(北京:北京理工大学出版社)]
[3] Luo S K, Zhang Y F 2008 *Advances in the Study of Dynamics of Constrained Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [罗绍凯、张永发 2008 约束系统动力学研究进展(北京:科学出版社)]
[4] Jia L Q, Xie J F, Zheng S W 2008 *Chin. Phys.* B **17** 0017
[5] Ding N, Fang J H 2008 *Chin. Phys.* B **17** 1550
[6] Jia L Q, Xie J F, Luo S K 2008 *Chin. Phys.* B **17** 1560
[7] Zhang M J, Fang J H, Zhang X N, Lu K 2008 *Chin. Phys.* B **17** 1957
[8] Fang J H, Liu Y K, Zhang X N 2008 *Chin. Phys.* B **17** 1962
[9] Huang X H, Zhang X B. Shi S Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6056 (in Chinese) [黄晓虹、张晓波、施沈阳 2008 物理学报 **57** 6056]
[10] Ge W K 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6714 (in Chinese) [葛伟宽 2008 物理学报 **57** 6714]
[11] Cai J L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 22 (in Chinese) [蔡建乐 2009 物理学报 **58** 22]
[12] Wang P, Fang J H, Wang X M 2009 *Chin. Phys.* B **18** 1312
[13] Cui J C, Zhang Y Y, Jia L Q 2009 *Chin. Phys.* B **18** 1731
[14] Cui J C, Jia L Q, Yang X F 2009 *J. Henan Norm. Univ.* (Natural Science) **37** (2) 70 (in Chinese) [崔金超、贾利群、杨新芳 2009 河南师范大学学报(自然科学版) **37** (2) 70]
[15] Cui J C, Zhang Y Y, Yang X F, Jia L Q 2010 *Chin. Phys.* B **19** 030304-1
[16] Pang T, Fang J H, Zhang M J, Lin P, Lu K 2009 *Chin. Phys.* B **18** 3150
[17] Fang J H 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3617 (in Chinese) [方建会 2009 物理学报 **58** 3617]

Type Ⅲ structural equation and Mei conserved quantity of Mei symmetry for a Lagrangian system*

Jia Li-Qun[1)†] Zhang Yao-Yu[2)] Yang Xin-Fang[1)] Cui Jin-Chao[3)] Xie Yin-Li[1)]

1) (*School of Science, Jiangnan University, Wuxi* 214122, *China*)

2) (*Electric and Information Engineering College, Pingdingshan University, Pingdingshan* 467002, *China*)

3) (*School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing* 100081, *China*)

(Received 13 August 2009; revised manuscript received 4 September 2009)

Abstract

Type Ⅲ structural equation and Mei conserved quantity of Mei symmetry for a Lagrangian system are studied. Under the infinitesimal transformation of groups, type Ⅲ structural equation and Mei conserved quantity of Mei symmetry for a Lagrangian system are obtained from the definition and the criterion of Mei symmetry for a Lagrangian system. Finally, an example is given to illustrate the application of the results.

Keywords: Lagrangian system, Mei symmetry, type Ⅲ structural equation, type Ⅲ Mei conserved quantity

PACC: 0320

---

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10572021) and the Preparatory Research Foundation of Jiangnan University, China (Grant No. 2008LYY011).

† E-mail: jlq0000@163.com