

# 非均匀圆柱壳中非线性波传播模型的同伦分析解法\*

那仁满都拉<sup>†</sup> 韩元春

(内蒙古民族大学物理与电子信息学院, 通辽 028043)

(2009 年 8 月 17 日收到; 2009 年 8 月 31 日收到修改稿)

圆柱形壳中非线性波传播问题的研究具有重要的理论和现实意义. 本文用同伦分析方法, 研究了描述非均匀圆柱壳中非线性波传播的一种新模型, 得到了该模型的高精度近似孤波解和周期波解. 这表明同伦分析方法是研究非线性波传播问题的一种十分有效的方法.

**关键词:** 同伦分析方法, 圆柱壳, 孤立波, 周期波

**PACC:** 0340K, 0290

## 1. 引 言

非线性偏微分方程广泛用于描述各学科领域的各种非线性现象. 然而, 这些非线性偏微分方程中除了有限数量的方程能够得到精确解析解以外, 大多数方程很难得到精确解析解, 只能用近似方法来获得近似解析解(当然数值方法是另一种重要手段). 已有的传统近似方法, 如摄动方法、Lyapunov 人工小参数法、 $\delta$  展开法和 Adomian 分解法等方法虽能够成功地解决了许多非线性问题, 但这些方法给出的级数解之收敛区域和收敛速度都是唯一的, 不能提供一个控制和调节级数解之收敛区域和速度的简便途径. 因此这些方法得到的级数解, 当物理参数或变量增大, 从而非线性增强时, 可能失效.

针对已有这些近似方法的缺点和不足, 廖世俊发展传统的同伦方法提出了基于拓扑学基本概念——同伦的一种解析方法: 同伦分析方法<sup>[1]</sup>. 该方法的优点是适合于求解强非线性问题、彻底抛弃了小参数假设, 从而根本上克服了摄动方法的局限性、可自由选取基函数使更有效地表达解、所得到的级数解之收敛区域可由一个辅助参数来调节和控制. 文献[2—7]等成功地把该方法应用到非线性问题的求解中. 近年来, 传统同伦方法另外一方面的发展是用于对称性分析和相似约化方面<sup>[8]</sup>.

薄壳中波传播问题的研究已有较长的历

史<sup>[9, 10]</sup>, 具有非常重要的实际意义. 最近文献[11]在考虑耦合应力的作用下, 利用立方非线性应力-应变关系, 得到了描述非均匀圆柱壳中非线性波传播的一种新的模型

$$u_t - u^2 u_x - \sigma u_{xxx} + u_{xxxxx} = 0, \quad (1)$$

这里  $u$  是应变的纵向分量,  $\sigma$  是与材料的非线性、泊松比及圆柱壳重量有关的常数. 此模型与以前得到过的圆柱壳中波传播模型<sup>[12]</sup>完全不同的一种新模型, 到目前很少文献对该模型进行过研究.

## 2. 同伦分析方法

首先我们简单介绍同伦分析方法的基本思想. 我们考虑如下微分方程:

$$N[u(\tau)] = 0, \quad (2)$$

这里  $N$  是非线性算符,  $\tau$  表示相关的独立变量,  $u(\tau)$  是未知函数. 为了简单起见, 在这里我们不叙述所有边界条件和初始条件的处理过程. 实际上, 它们的处理也类似. 推广传统的同伦方法, 廖世俊<sup>[1]</sup>构造了所谓的零阶形变方程, 即

$$(1-p)L[\varphi(\tau;p) - u_0(\tau)] = phH(\tau)N[\varphi(\tau;p)], \quad (3)$$

这里  $p \in [0, 1]$  是所谓的嵌入变量,  $h \neq 0$  是辅助参数,  $H(\tau) \neq 0$  是辅助函数,  $L$  是辅助线性算符,  $u_0(\tau)$  是初始猜测解,  $\varphi(\tau;p)$  是某一未知函数. 由此可看出, 这里有很多自由选取的辅助参数、辅助函数、辅

\* 国家自然科学基金(批准号: 10862003), 内蒙古自治区高等学校科学技术研究基金(批准号: NJZY07139)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: nrmdl@126.com

助线性算符以及初始猜测解, 这奠定了同伦分析方法的有效性和灵活性之基础. 很显然, 当  $p=0$  和  $p=1$  时有

$$\varphi(\tau;0) = u_0(\tau), \quad \varphi(\tau;1) = u(\tau), \quad (4)$$

这表明, 当嵌入变量  $p$  从 0 增大到 1 时,  $\varphi(\tau;p)$  从初始猜测解  $u_0(\tau)$  变化到精确解  $u(\tau)$ . 把  $\varphi(\tau;p)$  对  $p$  作泰勒级数展开, 可得

$$\varphi(\tau;p) = u_0(\tau) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(\tau)p^m, \quad (5)$$

其中  $u_m(\tau) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \varphi(\tau;p)}{\partial p^m} \Big|_{p=0}$ . 如果辅助参数、辅助函数、辅助线性算符以及初始猜测解选取适当, 则级数(5)在  $p=1$  处收敛, 因此我们拥有

$$u(\tau) = u_0(\tau) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(\tau). \quad (6)$$

廖世俊<sup>[1]</sup>已证明, (6)式必将是方程(2)的一种解. 此解利用未知项  $u_m(\tau)$  ( $m=1, 2, 3, \dots$ ) 给出了初始猜测解  $u_0(\tau)$  与精确解  $u(\tau)$  之间的关系, 其中未知项  $u_m(\tau)$  可由高阶形变方程来确定. 为此, 我们定义矢量

$$\mathbf{u}_n = \{u_0(\tau), u_1(\tau), \dots, u_n(\tau)\}. \quad (7)$$

将方程(3)对嵌入变量  $p$  求导  $m$  次, 然后令  $p=0$  并除以  $m!$ , 我们得到如下所谓的高阶形变方程:

$$L[u_m(\tau) - \chi_m u_{m-1}(\tau)] = hH(\tau)R_m(\mathbf{u}_{m-1}), \quad (8)$$

其中

$$R_m(\mathbf{u}_{m-1}) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[\varphi(\tau;p)]}{\partial p^{m-1}} \Big|_{p=0},$$

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1, \\ 1, & m > 1. \end{cases}$$

对方程(8)两边作用逆算符  $L^{-1}$  可得

$$u_m(\tau) = \chi_m u_{m-1}(\tau) + hL^{-1}[H(\tau)R_m(\mathbf{u}_{m-1})], \quad (9)$$

这样, 我们由解(6)和(9)式可得到原方程的任意精度的级数解.

### 3. 同伦分析方法的应用

下面我们把同伦分析方法应用到非均匀圆柱壳中非线性波传播模型(1)中. 文献[11]给出方程(1)有精确孤波解

$$u(x,t) = \frac{3}{\sqrt{10}} \sigma \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{\sqrt{5}\sigma}{10} \left( x + \frac{4}{25} \sigma^2 t \right) \right].$$

为了与此解比较, 我们先考虑初始条件

$$u(x,0) = \frac{3}{\sqrt{10}} \sigma \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{5}\sigma}{10} x \right) \quad (10)$$

下的情况.

为了应用同伦分析方法, 我们选择初始猜测解

$$u_0(x,t) = u(x,0) = \frac{3}{\sqrt{10}} \sigma \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{5}\sigma}{10} x \right), \quad (11)$$

以及辅助线性算符

$$L[\varphi(x,t;p)] = \frac{\partial \varphi(x,t;p)}{\partial t}. \quad (12)$$

该算子具有性质

$$L(c_1) = 0, \quad (13)$$

这里  $c_1$  是由初始条件确定的积分常数. 另外, 根据方程(1)的具体形式, 我们定义非线性算符

$$L[\varphi(x,t;p)] = \frac{\partial \varphi(x,t;p)}{\partial t} - \varphi(x,t;p)^2 \frac{\partial \varphi(x,t;p)}{\partial x} - \sigma \frac{\partial^3 \varphi(x,t;p)}{\partial x^3} + \frac{\partial^5 \varphi(x,t;p)}{\partial x^5}. \quad (14)$$

这样, 我们可构造如下零阶形变方程:

$$(1-p)L[\varphi(x,t;p) - u_0(x,t)] = phH(x,t)N[\varphi(x,t;p)]. \quad (15)$$

很显然, 当  $p=0$  和  $p=1$  时, 有  $\varphi(x,t;0) = u_0(x,t)$  和  $\varphi(x,t;1) = u(x,t)$ . 由零阶形变方程(15), 可得到如下  $m$  阶形变方程:

$$L[u_m(x,t) - \chi_m u_{m-1}(x,t)] = hH(x,t)R_m(\mathbf{u}_{m-1}), \quad (16)$$

及所满足的初始条件  $u_m(x,0) = 0$ . 这里

$$R_m(\mathbf{u}_{m-1}) = \frac{\partial u_{m-1}(x,t)}{\partial t} - \sum_{i=0}^{m-1} \left( \sum_{j=0}^i (u_j(x,t) \times u_{i-j}(x,t)) \frac{\partial u_{m-1-i}(x,t)}{\partial x} \right) - \sigma \frac{\partial^3 u_{m-1}(x,t)}{\partial x^3} - \frac{\partial^5 u_{m-1}(x,t)}{\partial x^5}. \quad (17)$$

$m$  阶形变方程(16), 在  $m \geq 1$  的解为

$$u_m(x,t) = \chi_m u_{m-1}(x,t) + hL^{-1}[H(x,t)R_m(\mathbf{u}_{m-1})]. \quad (18)$$

这样, 由(11)和(18)式可以计算出  $u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t), \dots$  等, 并由(6)式, 可得到原方程任意精度的近似解

$$u(x, t) \approx \sum_{n=0}^m u_n(x, t). \quad (19)$$

当  $\sigma = 1, H(x, t) = 1$  时, 我们的计算结果为

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \frac{6\sqrt{2}}{125}ht\text{sech}^2\left(\frac{\sqrt{5}}{10}x\right)\tanh\left(\frac{\sqrt{5}}{10}x\right), \\ u_2(x, t) &= \frac{6\sqrt{2}}{15625}ht\text{sech}^2\left(\frac{\sqrt{5}}{10}x\right)\left[125\tanh\left(\frac{\sqrt{5}}{10}x\right) + 125ht\tanh\left(\frac{\sqrt{5}}{10}x\right) - 3\sqrt{5}ht\text{sech}^2\left(\frac{\sqrt{5}}{10}x\right) + 2\sqrt{5}ht\right], \\ u_3(x, t) &= \frac{2\sqrt{2}}{390625}ht\text{sech}^2\left(\frac{\sqrt{5}}{10}x\right)\left[8h^2t^2\tanh\left(\frac{\sqrt{5}}{10}x\right) - 24h^2t^2\text{sech}^2\left(\frac{\sqrt{5}}{10}x\right)\tanh\left(\frac{\sqrt{5}}{10}x\right)\right] \\ &\quad + 300\sqrt{5}h^2t - 450\sqrt{5}h^2t\text{sech}^2\left(\frac{\sqrt{5}}{10}x\right) + 9375h^2\tanh\left(\frac{\sqrt{5}}{10}x\right) \\ &\quad + 18750ht\tanh\left(\frac{\sqrt{5}}{10}x\right) + 300\sqrt{5}ht - 450\sqrt{5}ht\text{sech}^2\left(\frac{\sqrt{5}}{10}x\right) \\ &\quad + 9375\tanh\left(\frac{\sqrt{5}}{10}x\right)\left], \end{aligned} \quad (20)$$

已证明, 只要级数解(19)收敛, 它必然是方程(1)的解. 因此保证级数解收敛是非常重要的. 在同伦分析方法中, 我们通过辅助参数  $h$  来很方便地调整和控制级数解的收敛区域. 一般地, 可绘制  $h$  曲线来选取参数  $h$  的有效区域使之保证级数解收敛. 我们绘制了由 10 阶近似解给出的  $V = u_{10}(0, 0)$  之  $h$  曲线, 如图 1 所示. 按文献[1]中指出的那样,  $V-h$  曲线中水平线段为  $h$  之有效区域, 故在此情况下  $h$  的有效区域为  $-1.4 < h < -0.5$ .

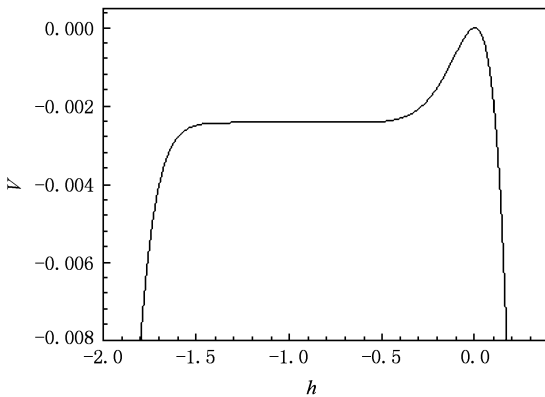


图 1 由 10 阶近似解给出的  $V-h$  曲线

在图 2 中, 当  $h = -0.9$  时, 我们把 10 阶近似孤波解与精确孤波解绘制在一起进行了比较. 从图上我们可清晰地看出, 在不同时刻近似解与精确解符合得非常好, 特别值得一提的是经过长时间之后两者符合得也非常好. 这表明同伦分析方法是研究非

线性波传播问题的一种十分有效的方法, 完全可用于分析孤立波的传播特性问题.

为了进一步说明同伦分析方法的有效性, 下面我们讨论周期波的情况. 我们采用 Jacobi 椭圆函数展开方法<sup>[13]</sup>, 得到了方程(1)的如下精确周期波解:

$$u(x, t) = A\text{cn}^2(\xi), \quad (21)$$

其中

$$\begin{aligned} A &= \frac{3K^2\sigma}{\sqrt{10}}\frac{1}{2K^2 - 1}, \\ \xi &= \frac{\sqrt{5}}{10}\left(\frac{\sigma}{2K^2 - 1}\right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(x + \frac{\sigma^2(23K^4 - 23K^2 + 8)}{50(2K^2 - 1)^2}t\right), \end{aligned}$$

这里  $K$  是 Jacobi 椭圆函数的模数. 我们选择初始猜测解

$$u_0(x, t) = \frac{3K^2\sigma}{\sqrt{10}}\frac{1}{2K^2 - 1}\text{cn}^2\left[\frac{\sqrt{5}}{10}\left(\frac{\sigma}{2K^2 - 1}\right)^{1/2}x\right]. \quad (22)$$

其他辅助线性算符、辅助函数以及非线性算符的选取与上述情况相同. 当  $\sigma = 0.1, K = 0.75$  时, 我们用 Maple 编制自动推算程序, 计算了  $u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t), u_4(x, t), u_5(x, t), u_6(x, t)$ , 得到了 6 阶近似周期波解

$$u(x, t) \approx u_0(x, t) + u_1(x, t) + \dots + u_6(x, t). \quad (23)$$

为了确定辅助参数  $h$  之有效区域, 在图 3 中我们绘

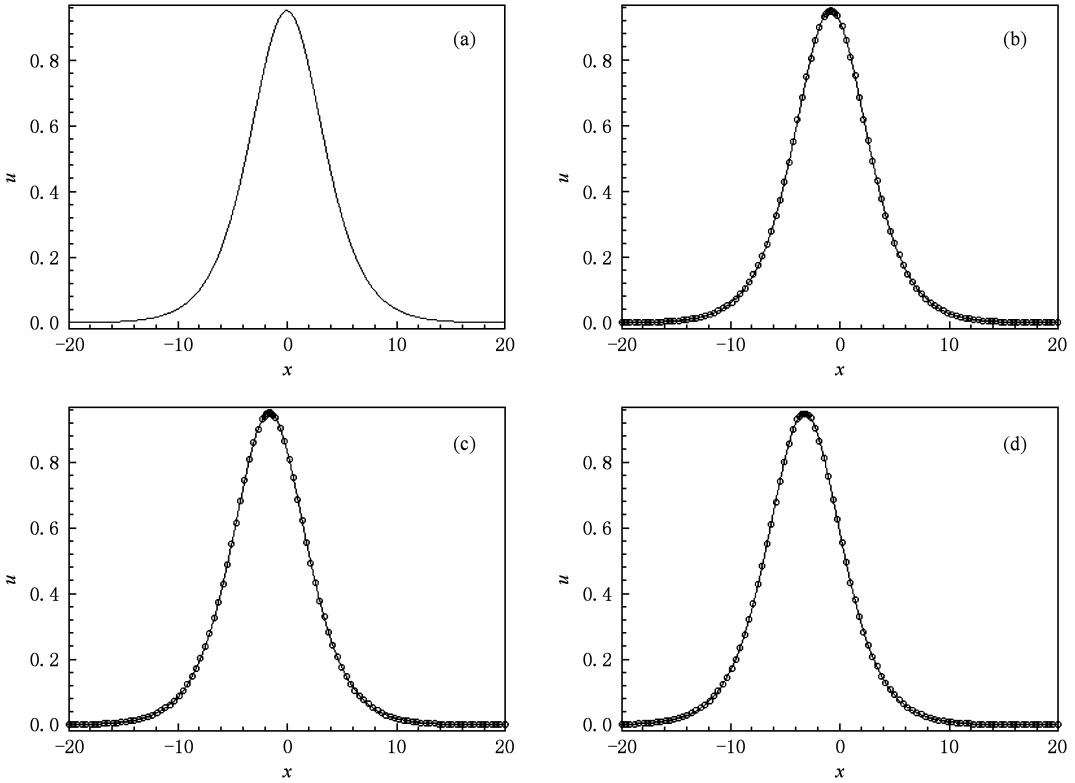


图2 10阶近似孤波解(实线)与精确孤波解(圆圈)的比较 (a) $t=0$ ; (b) $t=5$ ; (c) $t=10$ ; (d) $t=20$

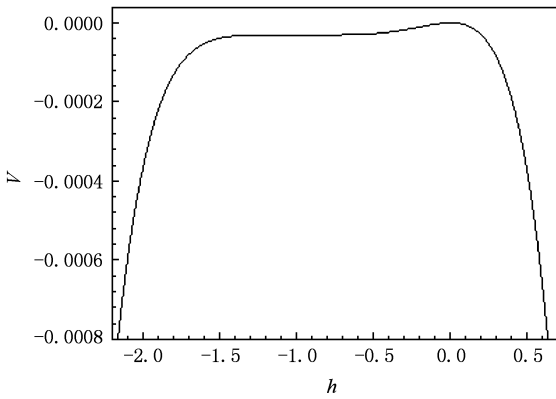


图3 由6阶近似解给出的  $V-h$  曲线

制了由6阶近似解给出的  $V = u_{xx}(0,0)$  之  $h$  曲线,即  $V-h$  曲线. 从图上可看出,在这种情况下  $h$  之有效区域约为  $-1.3 < h < -0.55$ . 当  $h = -0.6$  时,在图4中我们把6阶近似周期波解与精确周期波解绘制在一起进行了比较. 从图上我们可清晰地看出,即使

在周期波解的情况下不同时刻的近似解与精确解符合得也很好,这再一次证明了同伦分析方法是研究非线性波传播问题的一种有效方法.

### 4. 结 论

本文成功地把同伦分析方法应用到描述非均匀圆柱壳中非线性波传播的一种新模型中,得到了该模型的近似孤波解和周期波解. 把得到的近似孤波解和周期波解与相应的精确解进行比较之后发现它们符合得非常好. 这表明用同伦分析方法可以得到非线性波方程的级数形式的近似孤波解和周期波解. 由于这些级数解的收敛区域和速度可以用辅助参数来调节和控制,所以这些解是高精度的有效解,完全可用于分析非线性波的传播特性. 相信同伦分析方法在非线性复杂问题的研究中将发挥更重要的作用.

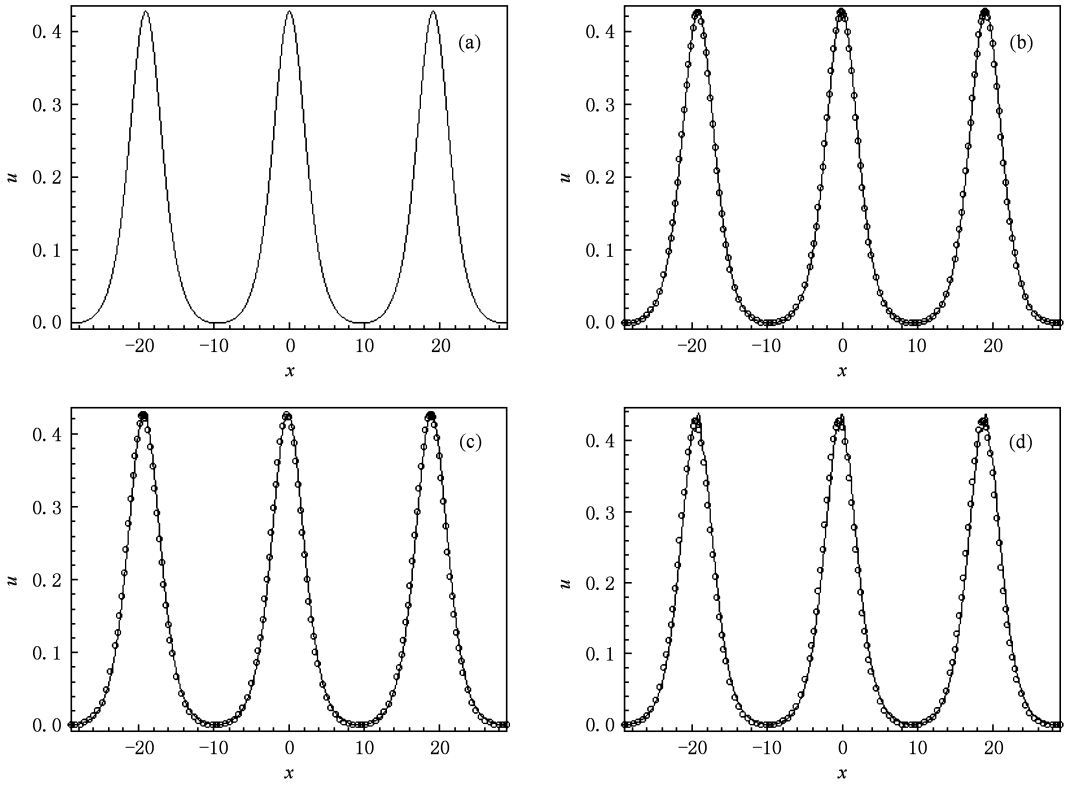


图4 6阶近似周期波解(实线)与精确周期波解(圆圈)的比较 (a)  $t=0$ ; (b)  $t=5$ ; (c)  $t=10$ ; (d)  $t=15$

- [1] Liao S J 2006 *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [廖世俊 2006 超越摄动——同伦分析方法导论(北京:科学出版社)]
- [2] Liao S J 2004 *Appl. Math. Comput.* **147** 499
- [3] Shi Y R, Xu X J, Wu Z X, Wang Y H, Yang H J, Duan W S, Lü K P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1555 (in Chinese) [石玉仁、许新建、吴枝喜、汪映海、杨红娟、段文山、吕克璞 2006 物理学报 **55** 1555]
- [4] Yang H J, Shi Y R, Duan W S, Lü K P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3064 (in Chinese) [杨红娟、石玉仁、段文山、吕克璞 2007 物理学报 **56** 3064]
- [5] Shi Y R, Wang Y H, Yang H J, Duan W S 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6791 (in Chinese) [石玉仁、汪映海、杨红娟、段文山 2007 物理学报 **56** 6791]
- [6] Wu Q K, 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2654 (in Chinese) [吴钦宽 2008 物理学报 **57** 2654]
- [7] Rashidi M M, Domairry G, Dinarvand S 2009 *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **14** 708
- [8] Jiao X Y, Gao Y, Lou S Y 2009 *Sci. China Ser. G* **52** 1169
- [9] Novozhilov V V 1962 *The theory of thin shells* (Leningrad: Sudpromgiz)
- [10] Vol'mir A S 1972 *Nonlinear dynamics of plates and shells* (Moscow: Nauka)
- [11] Zemlyanukhin A I, Mogilevich L I 2001 *Acoustical Physics* **47** 303
- [12] Zemlyanukhin A I, Mogilevich L I 1999 *Nonlinear waves in cylindrical shells* (Saratov: Saratov University Press)
- [13] Lu D Z 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4501 (in Chinese) [吕大昭 2005 物理学报 **54** 4501]

# The homotopy analysis method for solving nonlinear wave propagation model in inhomogeneous cylindrical shells<sup>\*</sup>

Naranmandula<sup>†</sup> Han Yuan-Chun

(*College of Physics and Electronics, Inner Mongolia University for Nationalities, Tongliao 028043, China*)

(Received 17 August 2009; revised manuscript received 31 August 2009)

## Abstract

The investigation of nonlinear wave propagation in cylindrical shells is of theoretical and realistic significance. In this work, using homotopy analysis method, we study a new model of nonlinear wave propagation in inhomogeneous cylindrical shells, and obtain approximate solitary wave solution and periodic wave solution with high accuracy. It shows that homotopy analysis method is one of the most effective methods for research into the problems of nonlinear wave propagation.

**Keywords:** homotopy analysis method, cylindrical shells, solitary wave, periodic wave

**PACC:** 0340K, 0290

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10862003) and the Higher School Science and Technology Research Foundation of Inner Mongolia Autonomous Region (Grant No. NJZY07139).

<sup>†</sup> E-mail: nrmdl@126.com