

Kerr-Newman 黑洞的辐射谱*

赵 仁[†] 张丽春 李怀繁

(山西大同大学物理系, 理论物理研究所, 大同 037009)

(2008 年 10 月 6 日收到; 2009 年 9 月 3 日收到修改稿)

运用 Damour-Ruffini 方法研究 Kerr-Newman 黑洞粒子的 Hawking 辐射. 在保持时空中总能量, 总角动量和总电荷守恒的条件下, 考虑辐射粒子对时空的反作用后, 得到黑洞辐射谱不再是严格的纯热谱. 在该结论中, 不但含有辐射粒子能量的影响项, 而且含有辐射粒子角动量对黑洞角动量的影响项. 所给表达式与用隧穿方法得到的表达式一致. 满足量子力学的么正性原理.

关键词: Damour-Ruffini 方法, Hawking 辐射, 能量守恒, 角动量守恒

PACC: 0420, 9760L

1. 引 言

从经典的角度来看, 进入黑洞内部的任何物质都不能逃出, 随着吸入其中的物质逐渐增多, 黑洞将变的越来越大. 20 世纪 70 年代, Hawking^[1] 宣布了他的惊人论断, 那就是黑洞可以向外辐射粒子. 这一论断在黑洞物理学上立下了一个划时代的里程碑, 这一效应的发现不仅解决了黑洞热力学当时存在的矛盾, 而且深入地揭示了量子力学、热力学与引力之间的内在联系. 考察各种类型黑洞的热性质成为黑洞物理学中的重要课题之一. Hawking 指出, 黑洞表面附近的真空涨落产生虚粒子对, 当其中负能虚粒子通过隧道效应而进入黑洞, 黑洞的能量将减少, 同时其中的正能粒子可能向外穿出黑洞外引力区, 这相当于黑洞辐射了一个粒子. Gibbons 和 Hawking 证明黑洞辐射谱是严格的黑体谱^[2]. Hawking 辐射的提出, 使人们认识到黑洞不再是恒星的终极状态, 黑洞也将演化并最终消失. 由于 Hawking 的证明中没有考虑辐射对时空的反作用, 得到的 Hawking 辐射谱是精确的黑体谱. 我们从黑体谱只能得到温度这一参数, 黑洞辐射不会带给我们有关黑洞内部物质的任何信息, 这意味着一旦黑洞蒸发完毕, 黑洞所有的信息包括么正性都将丢失而不会留下任何痕迹. 黑洞信息丢失意味着纯量子

态将衰变成混合态, 这就违背了量子力学的么正性原理, 这对量子力学的理论根基是一个严重的挑战.

Hawking 在 2004 年之前一直坚信, 黑洞的演化过程信息是不守恒的, 黑洞的演化不满足量子理论的么正性^[3]. 也有一些物理学家则持不同意见, 他们主张黑洞的演化过程中应该信息守恒, 并且满足么正性原理^[4]. 这两种观点都不能给出强有力的证明, 这个悬案一直持续了 30 多年, 直到 2004 年, Hawking 在第 17 届国际引力与相对论大会上, 又给世界一个强烈的震撼, 他宣布放弃他以前有关黑洞信息丢失的观点, 认为在黑洞的形成和蒸发过程中信息是守恒的^[5]. 但 Hawking 并没有给出严格的证明.

2000 年, Parikh 和 Wilczek 提出了一种计算黑洞 Hawking 辐射修正谱的半经典方法——隧穿方法^[6]. 人们将这一方法推广计算不同时空黑洞的 Hawking 辐射谱的修正谱^[7-24], 均满足么正性原理, 支持信息守恒.

但是在应用隧穿方法研究黑洞辐射过程中有几点使人们不理解的地方: 第一, Parikh 和 Wilczek 的核心思想是考虑辐射粒子自引力的作用, 将黑洞的 Hawking 辐射理解成一种量子隧穿, 黑洞辐射谱对纯热谱的偏离是由于势垒引起的, 而势垒的强弱取决于出射粒子自身能量的大小. 然而, 用隧穿方法研究黑洞的辐射过程中并没有给出势垒的数学

* 山西省自然科学基金 (批准号: 2006011012) 和山西大同大学博士科研启动基金资助的课题.

[†] E-mail: zhao2969@sina.com

表达式. 第二, 黑洞辐射粒子, 必然对时空具有反作用, 用隧穿方法研究黑洞的辐射并没有考虑反作用问题. 第三, 将隧穿方法推广到研究旋转黑洞的辐射谱时^[7,14,15], 给出黑洞角动量的变化是由于黑洞能量的变化引起的, 对辐射粒子具有的转动对黑洞角动量的影响没有考虑.

本文将从经典证明 Hawking 辐射的 Damour-Ruffini^[25,26] 方法出发. 研究旋转带电黑洞的 Hawking 辐射. 在保持时空总能量, 总角动量和总电荷守恒的情况下, 得到黑洞的 Hawking 辐射谱偏离黑体谱, 满足么正性原理, 支持信息守恒. 由于在计算过程中我们考虑了时空的总角动量守恒, 因此引起黑洞角动量的变化, 不仅是由于能量的改变, 而且辐射粒子的转动对黑洞角动量变化也有影响.

最近对旋转黑洞视界面积的量子化研究引起了人们的关注^[27,28], 通过我们研究得到黑洞角动量是量子化的, 为研究旋转黑洞的视界面积量子化提供理论基础, 这样对黑洞热辐射的研究又有了新的内容.

2. Klein-Gordon 方程

Kerr-Newman 时空线元

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr - Q^2}{\rho^2} \right) dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \left[(r^2 + a^2) \sin^2 \theta + \frac{(2Mr - Q^2) a^2 \sin^4 \theta}{\rho^2} \right] \times d\varphi^2 - \frac{2(2Mr - Q^2) a \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\varphi, \quad (1)$$

式中 $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$, $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2$, M , Q , 和 $J = Ma$ 分别是黑洞的质量 (能量), 电荷和角动量.

Kerr-Newman 黑洞外视界的拖曳角速度

$$\Omega_+ = \frac{a}{r_+ + a^2} = \frac{J}{2M(M^2 + \sqrt{M^4 - J^2 - Q^2 M^2} - Q^2/2)}. \quad (2)$$

黑洞的外视界面积和 Hawking 辐射温度分别为

$$A(r_+) = 4\pi(r_+^2 + a^2) = 8\pi(M^2 + \sqrt{M^4 - J^2 - Q^2 M^2} - Q^2/2). \quad (3)$$

和

$$T_+ = \frac{\kappa_+}{2\pi} = \frac{r_+ - r_-}{4\pi(r_+ + a^2)}$$

$$= \frac{\sqrt{M^4 - J^2 - Q^2 M^2}}{4\pi M(M^2 + \sqrt{M^4 - J^2 - Q^2 M^2} - Q^2/2)}, \quad (4)$$

κ_+ 为黑洞视界的表面引力. $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}$, r_+ 和 r_- 分别是黑洞外内视界半径.

弯曲时空中带电粒子的 Klein-Gordon 方程

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - ieA_\mu \right) \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} - ieA_\nu \right) \Phi \right] - \mu_0^2 \Phi = 0, \quad (5)$$

其中 μ_0 为标量粒子的质量, e 为粒子的电荷, 电磁四矢 $A_\mu = (-Qr/\rho^2, 0, 0, Qr a \sin^2 \theta / \rho^2)$. 由 (1) 式可求得度规行列式

$$g = -\rho^4 \sin^2 \theta, \quad (6)$$

和度规的逆变形式

$$g^{00} = -\frac{1}{\rho^2} \left[\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta \right],$$

$$g^{11} = \frac{\Delta}{\rho^2},$$

$$g^{22} = \frac{1}{\rho^2},$$

$$g^{33} = \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{a^2}{\Delta} \right],$$

$$g^{03} = -\frac{2aMr}{\Delta \rho^2}. \quad (7)$$

将 (7) 和 (6) 代入 (5) 式, 可得

$$\left[\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - 2a \left[1 - \frac{(r^2 + a^2)}{\Delta} \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} \Delta \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \left[\frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{a^2}{\Delta} \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + 2ieQr \frac{1}{\Delta} \left[a \frac{\partial}{\partial \varphi} + (r^2 + a^2) \frac{\partial}{\partial t} \right] \Phi = \left[-\mu_0^2 \rho^2 + e^2 Q^2 r^2 \frac{1}{\Delta} \right] \Phi. \quad (8)$$

分离变量, 令 $\Phi = e^{-i(\omega t - m\varphi)} \chi(\theta) \psi(r)$, 得

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial \chi(\theta)}{\partial \theta} = \left[\left(\omega a \sin \theta - \frac{m}{\sin \theta} \right)^2 + \mu_0^2 a^2 \cos^2 \theta - \lambda \right] \chi(\theta), \quad (9)$$

$$\frac{d}{dr} \Delta \frac{d}{dr} \psi(r) = \left[\lambda + \mu_0^2 r^2 - \frac{1}{\Delta} [\omega(r^2 + a^2) - am - eQr]^2 \right] \psi(r). \quad (10)$$

其中 λ 为分离变量常数, ω 为辐射粒子能量, m 为辐射粒子角动量在转动轴上的投影, e 为辐射粒子所

带电荷. 令 $K = (r^2 + a^2)\omega - am - eQr$, 则 (10) 式可化为

$$\Delta \frac{d^2\psi(r)}{dr^2} + 2(r - M) \frac{d\psi(r)}{dr} = \left[\lambda + \mu_0^2 r^2 - \frac{K^2}{\Delta} \right] \psi(r). \quad (11)$$

3. Tortoise 坐标变换

对 Kerr-Newman 时空, 定义 Tortoise 坐标变换

$$r_* = r + \frac{1}{2\kappa_+} \ln \frac{r - r_+}{r_+} - \frac{1}{2\kappa_-} \ln \frac{r - r_-}{r_-}, \quad (12)$$

式中 $\kappa_{\pm} = \frac{r_{\pm} - r_{\mp}}{2(r_{\pm}^2 + a^2)}$. 由此可得

$$dr_* = \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr, \quad \frac{d}{dr} = \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \frac{d}{dr_*}, \quad (13)$$

$$\frac{d^2}{dr^2} = \left(\frac{r^2 + a^2}{\Delta} \right)^2 \frac{d^2}{dr_*^2} + \frac{2(rQ^2 + Ma^2 - Mr^2)}{\Delta^2} \frac{d}{dr_*}. \quad (14)$$

将 (13) 和 (14) 式代入 (11) 式, 得

$$(r^2 + a^2)^2 \frac{d^2\psi(r)}{dr_*^2} + 2r\Delta \frac{d\psi(r)}{dr_*} = \left[\Delta(\lambda + \mu_0^2 r^2) - K^2 \right] \psi(r). \quad (15)$$

当 $r \rightarrow r_{\pm}$ 时, $\Delta(r_{\pm}) \rightarrow 0$, 由此 (15) 式在黑洞视界附近化为

$$\frac{d^2 R(r)}{dr_*^2} + (\omega - \omega_0)^2 \psi(r) = 0, \quad (16)$$

式中 $\omega_0 = m\Omega_{\pm} + eV_0$, $\Omega_{\pm} = \frac{a}{r_{\pm}^2 + a^2}$ 为外内视界的拖曳速度, V_0 为视界两极 ($\theta = 0, \pi$) 处的静电势.

方程 (16) 的解为

$$\psi = e^{\pm i(\omega - \omega_0)r_*}, \quad (17)$$

考虑时间因子后, 径向波解为

$$\Psi = e^{-i\omega t \pm i(\omega - \omega_0)r_*}. \quad (18)$$

令 $\hat{r} = \frac{\omega - \omega_0}{\omega} r_*$, 得到黑洞视界表面处的入射波解

$$\Psi_{\text{in}} = e^{-i\omega(t + \hat{r})} = e^{-i\omega v}, \quad (19)$$

和出射波解

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{out}}(r > r_+) &= e^{-i\omega(t - \hat{r})} = e^{-i\omega v} e^{2i\omega \hat{r}} \\ &= e^{-i\omega v} e^{2i(\omega - \omega_0)r_*}. \end{aligned} \quad (20)$$

式中 $v = t + \hat{r}$ 为 Eddington-Finkelstein 坐标, 将 (12) 式代入 (20) 式得

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{out}}(r > r_+) &= e^{-i\omega v} e^{2i(\omega - \omega_0)r} \\ &\times \left(\frac{r - r_+}{r_+} \right)^{i(\omega - \omega_0)/\kappa_+} \left(\frac{r - r_-}{r_-} \right)^{-i(\omega - \omega_0)/\kappa_-}. \end{aligned} \quad (21)$$

可以看出, 出射波解在视界面 r_+ 上奇异, 上式只能描述视界 r_+ 外的出射粒子, 不能描写视界内的出射粒子.

4. 解析延拓

研究黑洞辐射, 感兴趣的是出射波解, 然而由 (21) 式知, 出射波解在 $r = r_+$ 处奇异, 为此我们把 Ψ_{out} 解析延拓到视界内, 我们以奇点 $r = r_+$ 为圆心, 以 $|r - r_+|$ 为半径, 沿下半复 r 平面作解析延拓, 转动 $-\pi$ 角^[26,27], 这时

$$r - r_+ \rightarrow |r - r_+| e^{-i\pi} = (r_+ - r) e^{-i\pi}, \quad (22)$$

于是得到视界面 r_+ 内的出射波解

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{out}}(r < r_+) &= e^{-i\omega v} e^{2i(\omega - \omega_0)r} \left(\frac{r_+ - r}{r_+} \right)^{i(\omega - \omega_0)/\kappa_+} \\ &\times e^{\pi(\omega - \omega_0)/\kappa_+} \left(\frac{r - r_-}{r_-} \right)^{-i(\omega - \omega_0)/\kappa_-} \\ &= e^{\pi(\omega - \omega_0)/\kappa_+} e^{-i\omega v} e^{2i(\omega - \omega_0)r_*}. \end{aligned} \quad (23)$$

(23) 式和 (20) 式分别描述了黑洞内外的出射波解. 因此能量为 ω , 所带电荷为 e , 角动量为 m 粒子的出射波, 在黑洞视界面上的出射率为

$$\Gamma = \left| \frac{\Psi_{\text{out}}(r > r_+)}{\Psi_{\text{out}}(r < r_+)} \right|^2 = e^{-2\pi(\omega - \omega_0)/\kappa_+}. \quad (24)$$

5. 黑洞的辐射谱

上面的讨论中, 我们知 Kerr-Newman 黑洞具有能量 M , 所带电荷 Q 和角动量 J , 辐射粒子的能量 ω , 所带电荷 e 和角动量 m . 当黑洞的辐射是稳态平衡辐射过程时, 时空中的总能量 $M + \omega$, 总电荷 $Q + e$, 总角动量 $J + m$. 而粒子的能量, 电荷和角动量是在黑洞辐射过程中由黑洞中带出的. 因此, 黑洞辐射前的能量为 $M + \omega$, 电荷为 $Q + e$ 和角动量为 $J + m$. (24) 式所给出辐射粒子在视界面上出射率的表达式是在没有考虑辐射粒子对时空的反作用下得到的. 当黑洞辐射粒子时, 必然对时空具有反作用, 为了体现辐射对时空的反作用, 我们对 (24) 式的结论进行重写, 即将 (24) 式中辐射粒子的能量 ω , 电荷 e 和角动量 m 用黑洞的参量描述, 这样给出的结

论体现了辐射对时空的影响. 在改用黑洞参量描述时, 我们要满足时空的总能量, 总电荷和总角动量守恒. 即

$$\begin{aligned} -\omega &= M - (M + \omega) = \Delta M, \\ -e &= Q - (Q + e) = \Delta Q, \\ -m &= J - (J + m) = \Delta J, \end{aligned} \quad (25)$$

式中 $\Delta M, \Delta Q$ 和 ΔJ 分别是黑洞辐射前后能量, 电荷和角动量的变化量. 上式只计算了黑洞辐射能量 ω , 电荷 e 和角动量 m 的一个粒子. 当黑洞辐射多个粒子时, (25) 式中能量的变化, 电荷的变化和角动量的变化应对所有辐射粒子求和^[29,30].

$$\begin{aligned} \Delta S &= 2\pi(M^2 + \sqrt{M^4 - J^2 - Q^2 M^2} - Q^2/2) \\ &\quad - 2\pi[(M + \omega)^2 + \sqrt{(M + \omega)^4 - (J + m)^2 - (Q + e)^2(M + \omega)^2} - (Q + e)^2/2] \end{aligned} \quad (29)$$

为黑洞辐射前后的 Bekenstein-Hawking 熵差. 我们的结论(29)式与用隧穿方法得到的结论一致^[6-24], 符合量子力学的么正性原理. 最近对旋转黑洞视界面积的量子化研究引起了人们的关注^[27,28]. 由以上讨论知, 黑洞角动量的变化 $\delta J = m$, 式中 m 只能取零或整数, 由此可知黑洞角动量是量子化的, 为研究旋转黑洞视界面积量子化提供理论基础, 这样对黑洞热辐射的研究又有了新的内容.

6. 结 论

黑洞辐射的研究一直是人们非常关注的研究课题之一, 对它的研究需要弯曲时空中的量子理

论, 目前这一理论并不成熟. 人们用半经典的方法研究黑洞的热辐射均得到了满意的结论, 但在具体计算中还存在着一定的困难. 如 Parikh 和 Wilczek 等人用隧穿的方法研究黑洞热辐射, 对稳态时空得到了满意的结果, 但对动态时空是否有效, 目前尚未见报道. 用 Damour-Ruffini 方法研究黑洞热辐射具有普适性, 不但对稳态时空有效, 而且对动态时空也适用, 是比较成熟的理论. 因此, 用该方法研究黑洞的辐射谱具有普适性, 很容易推广到研究一般时空背景中黑洞对各种粒子的热辐射, 甚至用来研究动态黑洞, 这将在我们的后续工作中做详细、深入的探讨.

$$\Gamma = \exp[(\Delta M - V_0 \Delta Q - \Omega_+ \Delta J)/T_+], \quad (26)$$

式中 $T_+ = \frac{\kappa_+}{2\pi}$ 为黑洞的 Hawking 辐射温度. 将黑洞热力学第一定律^[31,32]

$$\Delta M = T_+ \Delta S + V_0 \Delta Q + \Omega_+ \Delta J, \quad (27)$$

代入(26)式得

$$\Gamma = e^{\Delta S}, \quad (28)$$

式中

- [1] Hawking S W 1975 *Commun. Math. Phys.* **43** 199
- [2] Gibbons G W, Hawking S W 1977 *Phys. Rev. D* **15** 2752
- [3] Hawking S W, Penrose R 1996 *The Nature of Space and Time* (Princeton. Princeton University Press)
- [4] Thorne K 1994 *Black Hole and Time Warps* (New York. Norton Company)
- [5] Hawking S W 2005 *Phys. Rev. D* **72** 084013
- Hawking S W 2002 *Hawking's talk at 17 th International Conference on General Relativity and Gravitation in Dublin.* ArXiv: hep-th/0204107
- [6] Parikh M K, Wilczek F 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 5042
- [7] Kerner R, Mann R B 2006 *Phys. Rev. D* **73** 104010
- [8] Cai R G, Cao L M, Hu Y P 2008 *Class. Quant. Grav.* **26** 155018
- [9] Banerjee R, Majhi B R 2008 *JHEP* **06** 095
- Banerjee R, Majhi B R 2008 *Phys. Lett. B* **662** 62
- [10] Kerner R, Mann R B 2007 *Phys. Rev. D* **75** 084022
- [11] Kerner R, Mann R B 2008 *Phys. Lett. B* **665** 277
- [12] Zhao R, Li H F, Hu S Q 2007 *Chinese Journal of Physics.* **45** 32
- [13] Arzano M, Medved A J M, Vagenas E C 2005 *JHEP* **09** 037
- [14] Zhang J Y, Zhao Z 2005 *Phys. Lett. B* **618** 14
- [15] Jiang Q Q, Wu S Q, Cai X 2007 *Phys. Rev. D* **75** 064029
- [16] Zhang J Y, Fan J H 2007 *Phys. Lett. B* **648** 133
- [17] Li R, Ren J R 2008 *Phys. Lett. B* **661** 370
- [18] Peng J J, Wu S Q 2008 *Phys. Lett. B* **661** 300
- [19] Li H L, Jiang Q Q, Yang S Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 539 (in Chinese) [李慧玲, 蒋青权, 杨树政 2006 物理学报 **55** 539]

- [20] Zhang J Y, Zhao Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3796 (in Chinese) [张靖仪、赵 崢 2006 物理学报 **55** 3796]
- [21] Jiang Q Q, Wu S Q, Cai X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3083 (in Chinese) [蒋青权、吴双清、蔡 勛 2007 物理学报 **56** 3083]
- [22] Liu W B 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6164 (in Chinese) [刘文彪 2007 物理学报 **56** 6164]
- [23] He X K, Liu W B 2007 *Phys. Lett. B* **653** 330
- [24] Zhou S W, Liu W B 2008 *Phys. Rev. D* **77** 104021
- [25] Damour T, Ruffini R 1976 *Phys. Rev. D* **14** 332
- [26] Sannan S 1988 *Gen. Rel. Grav.* **20** 239
- [27] Vagenas E C 2008 *JHEP* **0811** 073
- [28] Medved A J M 2008 *Class. Quant. Grav.* **25** 205014
- [29] Wu S Q, Cai X 2000 *Int. J. Theor. Phys.* **39** 2215
- [30] Wu S Q, Cai X 2000 *IL Nuovo Cimento B* **115** 143
- [31] Bardeen J M, Carter B, Hawking S W 1973 *Commun. Math. Phys.* **31** 161
- [32] Wald R M 1984 *General Relativity* (Chicago and London: the university of Chicago press)

Hawking radiation of Kerr-Newman black hole*

Zhao Ren[†] Zhang Li-Chun Li Huai-Fan

(Department of Physics, Institute of Theoretical Physics, Shanxi Datong University, Datong 037009, China)

(Received 6 October 2008; revised manuscript received 3 September 2009)

Abstract

Taking into consideration the radiation particle retroaction with the total energy, angular momentum and charge of spacetime conservation, using the Damour-Ruffini method, the Hawking radiation of particle from Kerr-Newman black hole are re-investigated. It is found that the Hawking radiation is not exactly pure thermal. Our conclusion not only contains the impact for the energy of the radiation particle, but also contains the impact for the angular momentum of particle to the angular momentum of black hole. The result is consistent with the works of Parikh and Wilczek, and satisfies the unitary theory of quantum mechanics.

Keywords: Damour-Ruffini method, Hawking radiation, energy conservation, angular momentum conservation

PACC: 0420, 9760L

* Project supported by the Natural Science Foundation of Shanxi Province, China (Grant No. 2006011012) and the Doctoral Scientific Research Starting Foundation of Shanxi Datong University, China.

[†] E-mail: zhao2969@sina.com