

用砖墙方法和薄层方法计算 Gibbons-Maeda 黑洞时空中标量场的统计力学熵^{*}

贺 锋 赵 凡[†] 颜 千

(湖南科技大学物理学院, 湘潭 411201)

(2008 年 3 月 20 日收到; 2009 年 10 月 19 日收到修改稿)

利用砖墙方法和薄层方法计算了 Gibbons-Maeda 黑洞背景时空中标量场的统计力学熵. 用砖墙方法求得的统计力学熵有两项: 其中一项与 Gibbons-Maeda 黑洞视界面积成正比, 并且当截断因子满足一定的关系时, 熵为其视界面积的四分之一; 另一项是对数发散项. 利用薄层方法所求得的熵只有与 Gibbons-Maeda 黑洞视界面积成正比的项, 对数发散项被自然消去.

关键词: 砖墙方法, 薄层方法, Gibbons-Maeda 黑洞, 统计力学熵

PACC: 0470

1. 引 言

自从 Bekenstein 和 Hawking 提出黑洞熵与其视界面积成正比以来^[1,2], 黑洞熵就成为理论物理研究的重要课题, 这是因为熵具有统计意义, 因而对黑洞熵的理解涉及到对黑洞微观本质的认识. 很可能需要一个完全的量子引力理论才能真正地认识黑洞熵的微观起源. 在目前量子引力理论还未成熟的情况下, 为了探求黑洞熵的统计起源, 人们发展了各种半经典的求熵的方法, 常见的方法有砖墙方法^[3]、薄层方法、改进的砖墙方法、conical singularity 方法、blunt-cone 方法及 volume cut-off 方法等, 这些方法都取得了一定的成功, 其中用得最多的是砖墙方法. 以前人们用砖墙方法计算了多种黑洞的熵, 如 Schwarzschild 黑洞、R-N 黑洞、Kerr-Newman 黑洞以及弦理论框架中的 Garfinkle-Horowitz-Strominger dilaton 黑洞^[4-17] 等的熵. 随后人们研究发现, 黑洞的熵主要是视界面附近量子态的贡献. 于是对砖墙模型进行了改进, 提出了薄层模型, 该模型仅考虑视界附近的一薄层, 可自然地避免原砖墙模型的红外截断^[18,19]. 本文将分别用砖墙方法和薄层方法计算 Gibbons-Maeda 黑洞时空中标量场的统计力

学熵.

2. Gibbons-Maeda 黑洞背景时空中的 Klein-Gordon 方程

采用自然单位制, Gibbons-Maeda 黑洞度规由下式给出^[20]:

$$ds^2 = -\frac{(r-r_+)(r-r_-)}{R^2}dt^2 + \frac{R^2}{(r-r_+)(r-r_-)}dr^2 + R^2(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (1)$$

其中 $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 + D^2 - P^2 - Q^2}$, $D = \frac{(P^2 - Q^2)}{2M}$, $R^2 = r^2 - D^2$, Q 和 P 分别为 Gibbons-Maeda 黑洞的电荷和磁荷.

以该时空为背景, 自由标量粒子所满足的 Klein-Gordon 方程为

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu} \right] = 0, \quad (2)$$

上式可化为

$$-\frac{R^2}{(r-r_+)(r-r_-)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[(r-r_+) \times (r-r_-) \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right] + \frac{1}{R^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (3)$$

* 湖南科技大学研究生创新基金(批准号: S080111)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: ayuzf@126.com

令 $\Phi(r, \theta, \varphi, t) = X(r)Y(\theta, \varphi)e^{i\omega t}$, 代入(3)式分离变量得到角向方程和径向方程

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial Y}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + l(l+1)Y = 0, \quad (4)$$

$$\frac{R^2\omega^2}{(r-r_+)(r-r_-)}X(r) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[(r-r_+) \times (r-r_-) \frac{\partial X}{\partial r} \right] - \frac{l(l+1)}{R^2}X = 0. \quad (5)$$

(4) 式的解是我们熟悉的球谐函数 $Y = Y_{lm}(\theta, \varphi)$. (5) 式可采用 WKB 近似法求解, 令 $X(r) = \exp[is(r)]$, 代入(5)式取其实部即得

$$K = \frac{\partial s}{\partial r} = \frac{R^2}{(r-r_+)(r-r_-)} \times \sqrt{\omega^2 - \frac{(r-r_+)(r-r_-)}{R^2} \frac{l(l+1)}{R^2}}, \quad (6)$$

其中 $K = \frac{\partial s}{\partial r}$ 是经典动量, ω 是粒子能量.

3. 用砖墙方法计算 Gibbons-Maeda 黑洞背景时空中标量场的熵

根据半经典的索末菲量子化条件, 径向波数

$$F = -\frac{2\pi^3}{45\beta^4} \left\{ \frac{(r_+^2 - D^2)^3}{(r_+ - r_-)^2} \left[\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{L - r_+} \right] + \frac{(r_-^2 - D^2)^3}{(r_+ - r_-)^2} \left[\frac{1}{r_+ + \varepsilon - r_-} - \frac{1}{L - r_-} \right] \right. \\ + \frac{(6r_+^4 D^2 + 6r_+^5 r_- - 2D^6 - 4r_+^6 - 12r_+^3 r_- D^2 + 6r_+ r_- D^4)}{(r_+ - r_-)^3} [\ln \varepsilon - \ln(L - r_+)] \\ + \frac{(6r_-^4 D^2 + 6r_+ r_-^5 - 2D^6 - 4r_-^6 - 12r_+ r_-^3 D^2 + 6r_+ r_- D^4)}{(r_+ - r_-)^3} [\ln(L - r_-) - \ln(r_+ + \varepsilon - r_-)] \\ \left. + \frac{[L^3 - (r_+ + \varepsilon)^3]}{3} + (r_+ + r_-)[L^2 - (r_+ + \varepsilon)^2] + (-3D^2 + 3r_-^2 + 3r_+^2 + 4r_+ r_-)[L - (r_+ + \varepsilon)] \right\}. \quad (10)$$

当 $L \geq r_+$, $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, (10) 式可表示为

$$F = -\frac{2\pi^3}{45\beta^4} \frac{(r_+^2 - D^2)^3}{\varepsilon(r_+ - r_-)^2} - \frac{2\pi^3(6r_+^4 D^2 + 6r_+^5 r_- - 2D^6 - 4r_+^6 - 12r_+^3 r_- D^2 + 6r_+ r_- D^4)}{45\beta^4(r_+ - r_-)^3} \ln \varepsilon - \frac{2\pi^3 L^3}{135\beta^4}. \quad (11)$$

式中等号右边第一项为视界的贡献, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时发散, 第二项为对数发散项, 第三项为周围远距离真空所产生的作用, 可略去.

进一步可以算出 Gibbons-Maeda 黑洞背景时空中标量场的统计力学熵为

$$S = \beta^2 \frac{\partial F}{\partial \beta} = \frac{8\pi^3}{45\beta^3} \frac{(r_+^2 - D^2)^3}{\varepsilon(r_+ - r_-)^2} + \frac{8\pi^3}{45\beta^3} \frac{(6r_+^4 D^2 + 6r_+^5 r_- - 2D^6 - 4r_+^6 - 12r_+^3 r_- D^2 + 6r_+ r_- D^4)}{(r_+ - r_-)^3} \ln \varepsilon. \quad (12)$$

$$n = \frac{1}{\pi} \int_{r_+ + \varepsilon}^L dr K(r, l, E), \quad (7)$$

则能量不超过 ω 的总波数或量子态数为

$$g(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{r_+ + \varepsilon}^L dr K(r, l, E) \int (2l+1) dl, \quad (8)$$

其中对 l 积分的积分限由(6)式根号内表达式恒正定出.

根据统计物理, 与标量场对应的玻色系统的自由能可表示为

$$F = \frac{1}{\beta} \int dg(\omega) \ln(1 - e^{-\beta\omega}) \\ = - \int_0^\infty d\omega \frac{g(\omega)}{e^{\beta\omega} - 1} \\ = - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\omega}{e^{\beta\omega} - 1} \int_{r_+ + \varepsilon}^L dr \int \frac{R^2}{(r-r_+)(r-r_-)} \\ \times \sqrt{\omega^2 - \frac{(r-r_+)(r-r_-)}{R^2} \frac{l(l+1)}{R^2}} (2l+1) dl \\ = - \frac{2}{3\pi} \int_0^\infty \frac{\omega^3}{e^{\beta\omega} - 1} d\omega \int_{r_+ + \varepsilon}^L \frac{R^6}{(r-r_+)^2 (r-r_-)^2} dr \\ = - \frac{2\pi^3}{45\beta^4} \int_{r_+ + \varepsilon}^L \frac{R^6}{(r-r_+)^2 (r-r_-)^2} dr, \quad (9)$$

上式中最后一个等号右边的是关于有理分式的积分, 可严格积出, 计算可得

对于 Gibbons-Maeda 黑洞

$$\beta = \frac{1}{T} = \frac{2\pi(r_+^2 - D^2)}{r_+ - r_-}, \tag{13}$$

其中 T 为 Hawking 温度, 取截断因子

$$\varepsilon = \frac{r_+ - r_-}{45\pi(r_+^2 - D^2)}, \tag{14}$$

则(12)式中的第一项

$$\frac{8\pi^3}{45\beta^3} \frac{(r_+^2 - D^2)^3}{\varepsilon(r_+ - r_-)^2} = \pi(r_+^2 - D^2) = \frac{A}{4}. \tag{15}$$

其中 $A = 4\pi(r_+^2 - D^2)$ 是 Gibbons-Maeda 黑洞视界面积.

4. 用薄层方法计算 Gibbons-Maeda 黑洞背景时空中标量场的熵

只要把(7)—(9)式中对 r 的积分区间由 $[r_+ + \varepsilon, L]$ 改为 $[r_+ + \varepsilon, r_+ + \varepsilon + h]$, 计算可得

$$\begin{aligned} F = & -\frac{2\pi^3}{45\beta^4} \left\{ \frac{(r_+^2 - D^2)^3}{(r_+ - r_-)^2} \left[\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon + h} \right] + \frac{(r_-^2 - D^2)^3}{(r_+ - r_-)^2} \left[\frac{1}{r_+ + \varepsilon - r_-} - \frac{1}{r_+ + \varepsilon + h - r_-} \right] \right. \\ & + \frac{(6r_+^4 D^2 + 6r_+^5 r_- - 2D^6 - 4r_+^6 - 12r_+^3 r_- D^2 + 6r_+ r_- D^4)}{(r_+ - r_-)^3} [\ln \varepsilon - \ln(\varepsilon + h)] \\ & + \frac{(6r_-^4 D^2 + 6r_+ r_-^5 - 2D^6 - 4r_-^6 - 12r_+ r_-^3 D^2 + 6r_+ r_- D^4)}{(r_+ - r_-)^3} [\ln(r_+ + \varepsilon + h - r_-) - \ln(r_+ + \varepsilon - r_-)] \\ & + \frac{[(r_+ + \varepsilon + h)^3 - (r_+ + \varepsilon)^3]}{3} + (r_+ + r_-)[(r_+ + \varepsilon + h)^2 - (r_+ + \varepsilon)^2] \\ & \left. + (-3D^2 + 3r_-^2 + 3r_+^2 + 4r_+ r_-)h \right\}. \tag{16} \end{aligned}$$

当 $h \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$ 时, (16)式可近似表示为

$$F \sim -\frac{2\pi^3}{45\beta^4} \frac{(r_+^2 - D^2)^3}{(r_+ - r_-)^2} \left[\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon + h} \right]. \tag{17}$$

由(17)式可以算出 Gibbons-Maeda 黑洞背景时空中标量场的统计力学熵为

$$S = \beta^2 \frac{\partial F}{\partial \beta} = \frac{8\pi^3}{45\beta^3} \frac{(r_+^2 - D^2)^3}{(r_+ - r_-)^2} \left[\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon + h} \right]. \tag{18}$$

若取

$$\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon + h} = \frac{45\pi(r_+^2 - D^2)}{r_+ - r_-}, \tag{19}$$

则

$$S = \pi(r_+^2 - D^2) = \frac{A}{4}. \tag{20}$$

5. 结 论

(12) 式表明, 用砖墙方法得到的 Gibbons-Maeda 黑洞背景时空中标量场的统计力学熵除了与黑洞视界面积成正比的项外, 还存在无法消去的对数发散项. 而改用薄层方法计算所得的熵, 对数发散项能被自然消去, 只剩下与黑洞视界面积成正比的项, 适当地选取截断因子后, 其比例系数刚好为 $1/4$, 符合 Bekenstein-Hawking 熵.

[1] Hawking S W 1975 *Commun. Math. Phys* **43** 199

[2] Bekenstein J D 1973 *Phys. Rev. D* **7** 2333

[3] G't Hooft 1985 *Nucl. Phys. B* **256** 727

[4] Luo Z J, Zhu J Y 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 395 (in Chinese) [罗智坚、朱建阳 1999 物理学报 **48** 395]

[5] Liu W B, Zhao Z 2000 *Journal of Beijing Normal University (Natural Science)* **36** 626 (in Chinese) [刘文彪、赵 峥 2000 北京师范大学学报 **36** 626]

[6] Zhao R, Zhang L C 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1167 (in Chinese) [赵 仁、张丽春 2002 物理学报 **51** 1167]

[7] Liu C Z, Li X, Zhao Z 2004 *General Relativity and Gravitation* **36** 1135

[8] Ding C K, Jing J L 2007 *Chin. Phys.* **16** 3610

[9] Yang B 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2614 (in Chinese) [杨 波 2008 物理学报 **57** 2614]

[10] Wang B B 2008 *Chin. Phys. B* **17** 467

- [11] Liu C Z 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1977 (in Chinese) [刘成周 2005 物理学报 **54** 1977]
- [12] Jing J L, Yan M L 2001 *Phys. Rev. D* **64** 064015
- [13] Jing J L, Yan M L 2001 *Phys. Rev. D* **63** 084028
- [14] Li X 2001 *Phys. Rev. D* **65** 084005
- [15] Wei Y H, Wang C H, Zhao Z 2002 *Phys. Rev. D* **65** 124023
- [16] Ghosh T, SenGupta S 2008 *Phys. Rev. D* **78** 024045
- [17] Li X, Zhao Z 2000 *Phys. Rev. D* **62** 104001
- [18] He F, Zhao Z, Kim S W 2001 *Phys. Rev. D* **64** 044025
- [19] Gao C J, Shen Y G 2002 *Phys. Rev. D* **65** 084043
- [20] G W Gibbons, K Maeda 1988 *Nucl. Phys. B* **298** 741

Using brick wall method and thin film brick wall method to calculate the statistical-mechanical entropy of scalar field in Gibbons-Maeda spacetime^{*}

He Feng Zhao Fan[†] Yan Qian

(College of Physics, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, China)

(Received 20 March 2008; revised manuscript received 19 October 2009)

Abstract

The statistical-mechanical entropy of scalar field is calculated by using brick wall method and thin film brick-wall method in Gibbons-Maeda black hole spacetime. The entropy obtained from brick-wall method has two terms. One term is proportional to the event horizon area, and the proportional coefficient is $1/4$ when the cutoff factor satisfies a suitable condition. The other term is logarithmic-divergent. The entropy obtained from thin film brick-wall method has only one term which is proportional to the event horizon area, and the logarithmic divergence vanishes.

Keywords: brick-wall method, thin film brick-wall method, Gibbons-Maeda black hole, statistical-mechanical entropy

PACC: 0470

^{*} Project supported by the Graduate Student Creative Foundation of Hunan University of Science and Technology (Grant No. S080111).

[†] Corresponding author. E-mail: ayuzf@126.com