

# 基于随机共振进行弱信号探测的实验研究\*

朱光起<sup>1)</sup> 丁珂<sup>2)</sup> 张宇<sup>2)†</sup> 赵远<sup>2)</sup>

1) (哈尔滨工业大学电气工程及自动化学院, 哈尔滨 150001)

2) (哈尔滨工业大学物理系, 哈尔滨 150001)

(2009 年 8 月 25 日收到; 2009 年 9 月 23 日收到修改稿)

非线性随机共振系统可利用噪声增强微弱信号检测的能力, 为强噪声背景下微弱信号的检测开创了新方法. 基于随机共振的基本原理设计了硬件电路系统, 并将其应用于检测单频和多频微弱信号; 通过输入模拟工程实际的带噪信号, 采样所得的输出信号的频谱分析结果表明, 利用随机共振技术可从强噪声背景下有效地提取出单频和多频弱信号. 多频弱信号的有效提取拓展了基于随机共振原理的弱信号检测技术的应用领域, 结合数字滤波处理技术有效地消除了低频噪声对信号识别的影响. 基于随机共振的弱信号检测技术在信息识别与信息处理方面具有巨大的潜在的应用价值.

**关键词:** 随机共振, 硬件电路系统, 微弱信号检测, 数字滤波

**PACC:** 0540, 4660D

## 1. 引 言

物理、化学、工程技术参量是利用相关的物理现象做成的传感器进行测量的. 无论信号本身, 还是各种类型的传感器, 在做信息转换或转换后做信号测量时, 都会不可避免的受到具有随机性的诸如背景噪声、电路噪声和元器件噪声等噪声的影响, 要做到精确测量有较大的难度. 此外, 专用的微弱信号检测设备又因造价昂贵而大大限制了其应用范围.

传统的弱信号检测技术均把目标集中于抑制噪声, 当信号频率与噪声频率接近时, 抑制噪声的同时有用信号会不可避免地受到损害. 然而, 非线性随机共振系统却能解决上述问题. 随机共振 (stochastic resonance, SR) 理论最初是由 Benzi 等<sup>[1]</sup> 和 Nicolis 等<sup>[2]</sup> 提出, 用于解释地球远古气象中每隔十万年左右冰川期与暖气候周期交替出现的现象. 随机共振的理论和实验研究<sup>[3-10]</sup> 也已经取得一定的成果. 随机共振原理是把混合在一起的信号 (周期力) 和噪声 (随机力) 加入非线性系统中, 在非线性的系统内部或外部随机力与外加周期力的协同作用下, 产生近于与外加周期力相同频率的更为强

烈的周期振动, 把一部分噪声能量转换成信号能量, 从而大大提高系统输出信噪比. 与传统方法相比它是利用噪声而不是消除噪声, 实现了“变废为宝”, 为强噪声背景下微弱信号的检测开创了新思路.

本研究使用电路模拟的方法实现了非线性双稳态系统, 对输出端输出的信号进行采样, 频谱分析结果表明使用设计的硬件电路系统可有效地提取出强噪声背景下的单频弱信号与多频弱信号, 验证了利用非线性双稳态系统的随机共振特性可有效的检测出被强噪声淹没的周期性弱信号, 推动了基于随机共振进行弱信号检测方法在工程中的应用的进程. 多频弱信号的有效提取拓展了基于随机共振原理的弱信号检测技术的应用领域, 结合数字滤波处理技术有效地消除了低频噪声对信号识别的影响. 基于随机共振的弱信号检测技术在信息识别与信息处理方面具有巨大的潜在的应用价值.

## 2. 随机共振原理

双稳态系统是研究随机共振现象的基础, 而具有双势阱性质的朗之万方程是描述非线性双稳态系统的典型模型<sup>[1]</sup>:

\* 国家自然科学基金 (批准号: 60808027) 和哈尔滨工业大学 2008 年大学生创新性实验计划资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: zhangyunn@hit.edu.cn

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{dU}{dt} + s(t) + n(t), \quad (1)$$

式中,  $x$  为系统输出.  $s(t)$  为非线性系统的输入信号.  $n(t)$  为随机噪声信号.  $U(x) = -\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{4}x^4$  是对称双稳态系统的势函数.  $a, b$  是大于零的实数, 为势阱的形状参数.

为方便研究系统, 取输入信号为最简单的信号和噪声, 即单频信号与高斯分布白噪声, 此时方程 (1) 可化为

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^3 + A\cos(\omega_0 t) + \Gamma(t), \quad (2)$$

式中,  $A$  为信号幅值,  $\omega_0$  为信号调制频率.  $\Gamma(t)$  为高斯分布白噪声, 满足

$$\langle \Gamma(t) \rangle = 0, \langle \Gamma(t)\Gamma(t') \rangle = 2D\delta(t-t'), \quad (3)$$

式中,  $D$  为噪声强度,  $t'$  为关于  $t$  的时间延迟.

当输入信号幅值  $A$  和噪声强度  $D$  为零时, 系统有两个相同的势阱, 阱底位于  $x = \pm \sqrt{\frac{a}{b}}$ , 垒高为  $\Delta U = \frac{a^2}{4b}$ . 系统的最终输出状态将停留在两个势阱中的一个, 视系统的初始状态而定. 当仅存在随机扰动时, 系统的最终输出状态将在两个势阱之间按照 Kramers 速率<sup>[11]</sup> 跃迁

$$R = \frac{a}{\pi\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{2\Delta U}{D}\right). \quad (4)$$

随机共振基本原理可简化为把混合在一起的信号和噪声加入到非线性双稳态系统中, 在非线性双稳态系统内部噪声与信号的协同作用下, 使势阱发生倾斜, 信号将在两个势阱之间按照 Kramers 速率跃迁, 进而产生与信号相同频率的更为强烈的周期振动, 把一部分噪声能量转换成信号能量, 从而大大提高系统输出信噪比, 即有效地提取出强噪声背景下的弱信号.

大多数文献中都采用信噪比作为辨识非线性双稳态系统是否进入随机共振状态的指标, 其定义是: 信号功率  $P_S$  与噪声功率  $P_N$  的比值, 用 SNR 表示, 单位为分贝 (dB). 在数值计算中通常以对数形式表述信噪比.

设系统的输入信号为  $s(t) = A\cos(\omega_0 t)$ , 则根据信噪比的定义, 系统的信噪比为

$$\text{SNR} = 10\lg \frac{P_S}{P_N} = 10\lg \frac{P_S(\omega_0)}{P_N(\omega_0)}. \quad (5)$$

在绝热近似<sup>[11]</sup> 条件 ( $A \ll 1, D \ll 1, \omega_0 \ll 1$ ) 下, 根据渐进消去 (adiabatic elimination) 理论, 可得双稳态系统输出信噪比公式<sup>[12]</sup>

$$\text{SNR} = \frac{\sqrt{2}a^2(\sqrt{bA})^2 e^{-a^2/4bD}}{4(bD)^2} \times \left[ 1 - \frac{a^3(\sqrt{bA})^2 e^{-a^2/2bD}/(\pi^2(bD)^2)}{(2a^2 e^{-a^2/4bD}/\pi^2) + \omega_0^2} \right]^{-1}. \quad (6)$$

定义噪声为零时  $\text{SNR} = 0$ , 由关系式可知随噪声强度  $D$  的增长, 系统输出信号的周期成分的信噪比 SNR 先随  $D$  增长, 然后迅速按指数率减小. 当  $D \approx \Delta U/2$  时, SNR 取得最大值. 取 (6) 式中各个参数为

$$a = b = 1, A = 0.02, \omega_0 = 0.1 \times 2\pi. \quad (7)$$

SNR 与  $D$  的关系如图 1 所示.

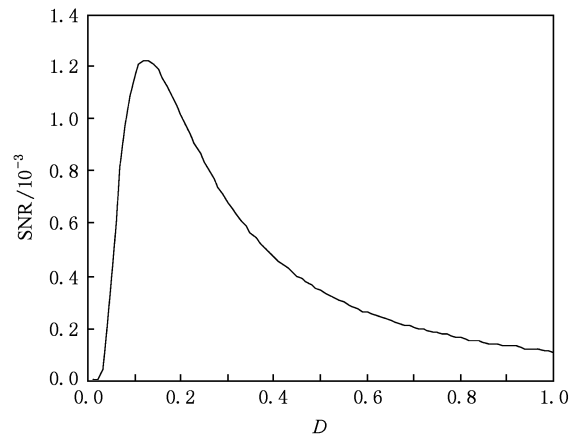


图 1 SNR 与  $D$  理论关系

对于实际信号, 当噪声强度  $D$  趋于零时 SNR 应为无穷大, 而根据绝热近似理论此时的输出信噪比的定性结果是零, 显然是不合实际的. 这也是绝热近似理论的不足之处. 但是依据 SNR 与  $D$  的理论关系, 当已知势阱的形状参数  $a, b$  时, 易确定噪声强度  $D$  的数值使得系统输出信噪比 SNR 取得最大值, 对强噪声背景下的弱信号的提取具有一定的指导意义.

### 3. 电路设计及弱信号检测

具有双势阱性质的朗之万方程作为描述非线性双稳态系统的典型模型, 直观的显示出非线性系统中各参量之间的关系, 故可采用电路模拟朗之万

方程以实现非线性双稳态系统,硬件电路系统如图 2 所示. 其中  $A\cos(\omega_0 t)$  为系统输入信号,  $\Gamma(t)$  为高斯分布白噪声, 输入信号的频率为  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ ,  $x(t)$  为系

统输出信号. 通过对系统输出端输出的信号  $x(t)$  进行采样, 然后对采样所得的数据进行频谱分析, 即可验证系统能否从强噪声背景下提取出弱信号.

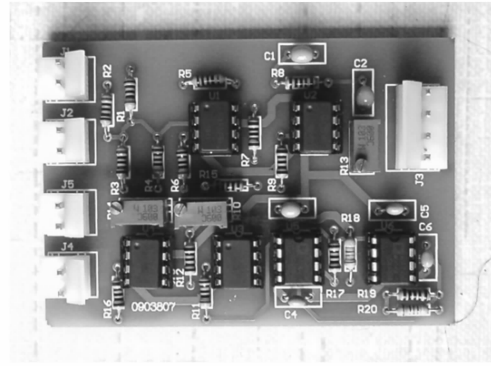
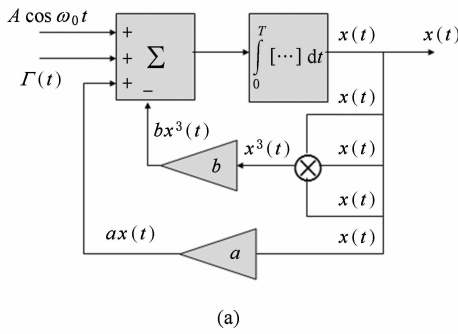


图 2 硬件电路系统 (a) 硬件电路系统原理图; (b) 硬件电路系统实物图

考虑淹没于强度  $D = 4$  的噪声中的幅值  $A = 0.09$  (这里  $D$  和  $A$  的单位为无量纲单位) 的 17 Hz 弱信号, 由图 3 (a) 可见信号已经完全淹没于噪声之中, 无法确定信号的存在, 其信噪比为  $SNR_{input} = 20\log_{10}(A / \sqrt{2D}) = -29.95$  dB. 由于存在强烈的同频噪声, 使用线性滤波、小波分析等弱信号识别手段都存在一定的局限性, 无法有效的提取出强噪声

背景下的弱信号. 使用设计的电路检测信号时, 将信号与噪声输入电路中, 调节电路参数  $a, b$ , 对输出端采样得到的数据进行频谱分析后得到如图 3 (b) 所示的输出频谱图, 输出信噪比  $SNR_{output} = 10.25$  dB, 易知使用设计的电路可从强噪声背景下有效地提取出弱信号, 同时表明了 SR 具有在强烈同频噪声的情况下进行弱信号检测的功能.

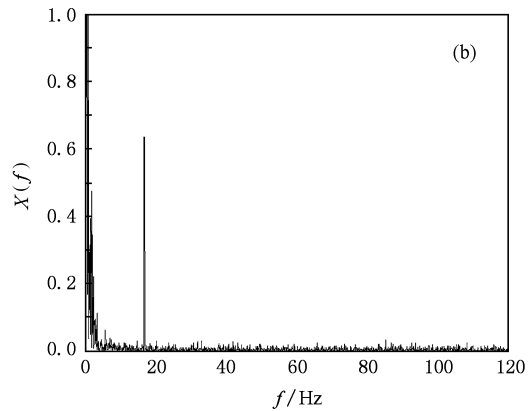
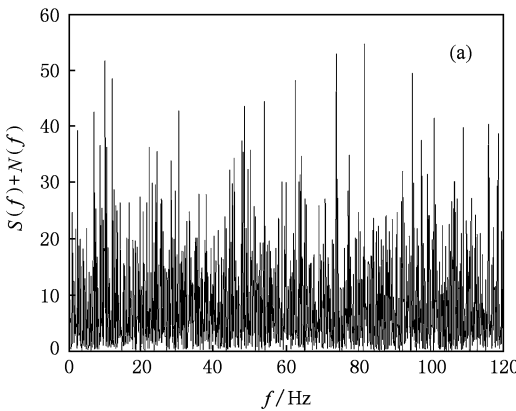


图 3 17 Hz 弱信号随机共振前后的频域图 (a) 输入信号的频域图; (b) 输出信号的频域图

但是单频弱信号被从强噪声背景下有效地提取出来的同时也存在低频部分的噪声幅值高于信号幅值的问题, 对信号识别造成很大的影响. 当工程未知信号的单频信息频率较低时, 可能被低频噪声淹没, 加大了对工程未知信号的检测难度.

测强噪声背景中的单频周期性信号, 无疑大大的局限了 SR 技术的应用范围.

工程实际中遇到的弱信号检测问题大多为多频信号构成, 若仅把注意力集中于使用 SR 技术检

由傅里叶变换原理可知任意信号均可分解为若干个余弦(或正弦)信号叠加, 故使用 SR 技术检测多频信号时, 只需将方程(2)中的  $A\cos(\omega_0 t)$  置换为  $\sum_{i=1}^n A_i \cos(\omega_{0i} t)$ , 此时系统输出的各信号的信噪

比<sup>[13]</sup>为

$$\text{SNR}_{\text{out},i} = \int_0^{+\infty} S(f)\delta(f-f_{0i})df / \int_{f_{0i}-\delta f}^{f_{0i}+\delta f} N(f)df. \quad (8)$$

取 $f_{0i}$ 分别为 13 Hz, 23 Hz, 37 Hz, 43 Hz,  $A_i$  均为 0.09 的四个周期性信号线性叠加的弱信号作为待检测

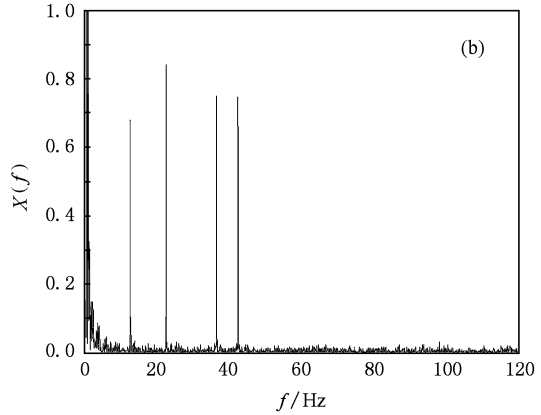
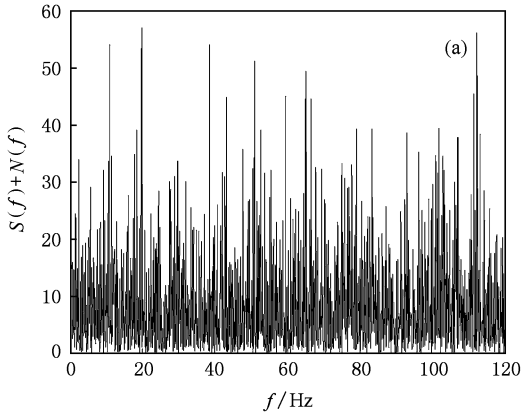


图 4 多频弱信号随机共振前后的频域图 (a)输入信号的频域图; (b)输出信号的频域图

将混和信号输入设计的电路中, 调节电路参数  $a, b$ , 对输出端采样得到的数据进行频谱分析后得到如图 4(b) 所示的输出频谱图, 从输出信号频谱图易知多频信号被有效地提取出来, 输出信噪比  $\text{SNR}_{\text{output}}$  分别为 10.38 dB, 16.36 dB, 14.18 dB, 14.17 dB.

上述的多频 SR 现象不同于 SR 中出现的倍频现象<sup>[14]</sup>, 也不同于数值计算研究<sup>[15]</sup>结果: SR 的多频周期性弱信号识别仅限于信号频率相差在一个数量级之内. 但是多频弱信号被从强噪声背景下有效地提取出来的同时也存在低频部分的噪声幅值高于信号幅值的问题, 对多频信号的识别造成很大的影响; 当工程未知信号的多频信息频率较低时, 可能被低频噪声淹没, 加大了对工程未知信

的输入信号, 强度  $D=4$  的噪声, 由图 4(a) 混合信号频谱图知信号已淹没于噪声中, 输入信号的信噪比均为

$$\text{SNR}_{\text{input}} = 20\log_{10}(A/\sqrt{2D}) = -29.95 \text{ dB}.$$

号的检测难度.

设计的硬件电路系统还可有效地提取出不在同一数量级的强噪声背景下非倍频信号. 取  $f_{0i}$  分别为 53 Hz, 153 Hz, 253 Hz, 353 Hz,  $A_i$  均为 0.09 的四个周期性信号线性叠加的弱信号作为待检测的输入信号, 强度  $D=4$  的噪声, 由图 5(a) 混合信号频谱图知信号已淹没于噪声中, 输入信号的信噪比均为

$$\text{SNR}_{\text{input}} = 20\log_{10}(A/\sqrt{2D}) = -29.95 \text{ dB}.$$

将混和信号输入设计的电路中, 调节电路参数  $a, b$ , 对输出端采样得到的数据进行频谱分析后得到如图 5(b) 所示的输出频谱图, 从输出信号频谱图易知多频信号被有效地提取出来, 输出信噪比  $\text{SNR}_{\text{output}}$  分别为 14.28 dB, 10.36 dB, 6.18 dB, 3.17 dB.

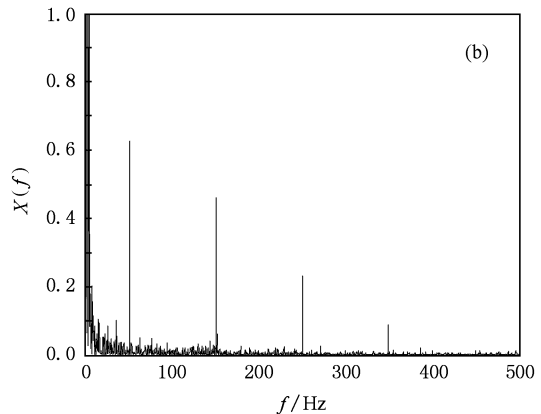
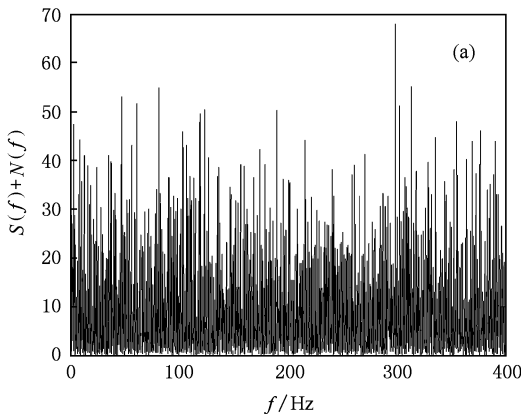


图 5 多频弱信号随机共振前后的频域图 (a)输入信号的频域图; (b)输出信号的频域图

限于使用的示波器的采样精度及设计的硬件电路系统的性能,强噪声背景下更低或更高频率信号的提取有待于进一步研究.

#### 4. 数字滤波对随机共振结果的处理

通过对采样所得的输出信号的频谱分析,可见单频信号和多频信号的频谱图均存在低频部分的

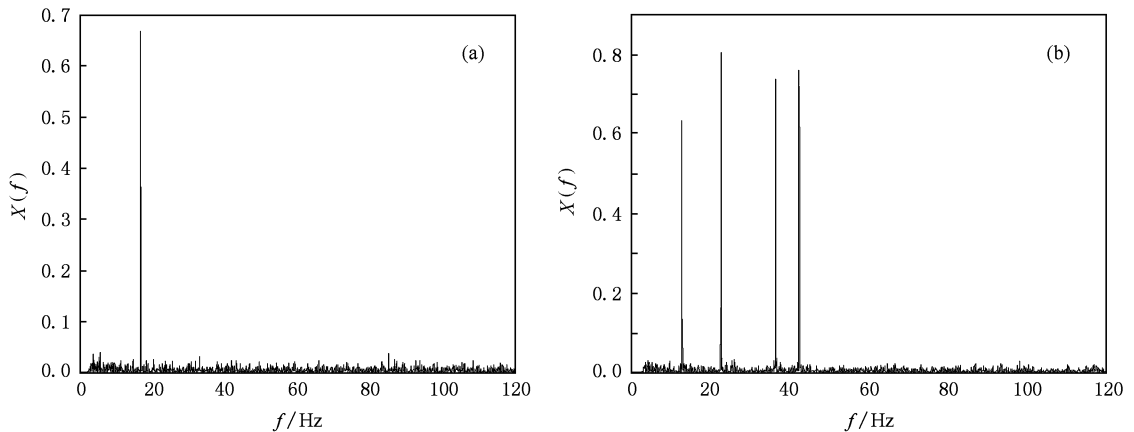


图6 单频、多频信号高通滤波后的频域图 (a)单频信号高通滤波后的频域图;(b)多频信号高通滤波后的频域图

但是对于未知的信号,使用数字滤波技术滤去低频噪声的同时可能会滤去信号中的低频信息,故而针对未知信号的滤波技术有待于进一步完善.

#### 5. 结 论

本文基于随机共振的基本原理设计了硬件电路系统,并将其应用于检测单频和多频微弱信号;输出信号的频谱分析结果验证了利用随机共振技术检测弱信号的优越性,多频弱信号的有效提取拓展了基于随机共振原理的弱信号检测技术的应用领域;数字滤波处理技术消除了低频噪声对信号识

别的影响. 在运用二次采样<sup>[16]</sup>的SR中也会遇到同样的问题.

结合数字滤波技术<sup>[17]</sup>有效地消除了低频噪声对信号识别的影响. 利用 Matlab 软件采用巴特沃斯滤波器,并选取无相位失真滤波器,设计了一个高通滤波器,对非线性随机共振硬件电路系统输出信号进行高通滤波,对滤波后的输出信号进行频谱分析得到如图6所示的频谱图,可见经高通滤波后信号成分更加明显.

别的影响. 本论文的研究为SR技术在工程实际中的应用铺平了前行的道路,拓展了基于SR原理的弱信号检测技术的应用领域.

然而在实际工程中,信号与噪声通常是未知的. 在信号与噪声的特性均未知的情况下,随机共振系统如何根据现场信号和噪声强度,自动地调节系统本身参数来达到随机共振状态,随机共振过程中信号吸收的能量与信号的幅值、频率之间有什么关系? 这些问题我们将进一步研究. 相信在不久的将来,基于随机共振原理的弱信号检测技术必将为强噪声背景下微弱信号的提取开创一片新天地.

- [1] Benzi R, Stuera A, Vulpiani A 1981 *J. Phys.* A **14** L453  
 [2] Nicolis C, Nicolis G 1981 *Tellus* **33** 225  
 [3] Gitterman M 2005 *Physica A* **352** 309  
 [4] Ning L J, Xu W 2007 *Physica A* **382** 415  
 [5] Jin Y F, Xu W, Xu M and Fang T 2005 *J. Phys.* A **38** 3733  
 [6] Ning L J, Xu W 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2889 (in Chinese) [宁丽娟、徐伟 2009 物理学报 **58** 2889]

- [7] Jin Y F, Hu Y F 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2895 (in Chinese) [靳艳飞、胡海岩 2009 物理学报 **58** 2895]  
 [8] Guo L M, Xu W, Ruan C L, Zhao Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7482 (in Chinese) [郭立敏、徐伟、阮春蕾、赵燕 2008 物理学报 **57** 7482]  
 [9] Zhang L Y, Jin G X, Cao Li 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4706 (in Chinese) [张良英、金国祥、曹力 2008 物理学报 **57** 4706]

- [10] Ning L J, Xu W 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1944 (in Chinese) [宁丽娟、徐伟 2007 物理学报 **56** 1944]
- [11] Hu G 1994 *Stochastic Forces and Nonlinear Systems* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) (in Chinese) [胡岗 1994 随机力与非线性系统(上海:上海科技教育出版社)]
- [12] Hu G, Qin D R, Gong D C, Wen X D 1991 *Phys. Rev. A* **44** 6414
- [13] Hu G, Nicolis G, Nicolis C 1990 *Phys. Rev. A* **42** 2030
- [14] Zhou T, Moss F 1990 *Phys. Rev. A* **41** 4264
- [15] Zhang Y, Lv H F, Zhao Y, Sun X D 2007 *Journal of Jilin University (Information Science Edition)* **25** 71 (in Chinese) [张宇、吕海峰、赵远、孙秀冬 2007 吉林大学学报(信息科学版) **25** 71]
- [16] Leng Y G 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2432 (in Chinese) [冷永刚 2003 物理学报 **52** 2432]
- [17] Ingle V K, Proakis J G (Translated by Chen H C) 1998 *Digital Signal Processing Using Matlab* (Beijing: Electronics Industry Press) p276—305 (in Chinese) [V. K. 英格尔、J. G. 普罗克斯著 陈怀琛等译 1998 数字信号处理及其 MATALB 实现(北京:电子工业出版社)第 276—305 页]

## Experimental research of weak signal detection based on the stochastic resonance of nonlinear system \*

Zhu Guang-Qi<sup>1)</sup> Ding Ke<sup>2)</sup> Zhang Yu<sup>2)†</sup> Zhao Yuan<sup>2)</sup>

1) (College of Electrical Engineering and Automation, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

2) (Department of Physics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

(Received 25 August 2009; revised manuscript received 23 September 2009)

### Abstract

Noise can be used by the nonlinear stochastic resonance system to enhance the ability of weak signal detection, which creates a new method of weak signal detection under heavy background noise. A hardware circuit system, designed based on the basic principle of stochastic resonance, is used to detect single-frequency and multi-frequency weak signals. When the signal with noise that simulates actual engineering situation is introduced into the system, the spectrum of samples of the output signal shows that single-frequency and multi-frequency weak signals under heavy background noise can be detected by the technology based on stochastic resonance effectively. The application field of weak signal detection technology based on stochastic resonance is extended by the effective detection of multi-frequency weak signal, and the degradation of signal recognition by low-frequency noise is eliminated by digital filtering effectively. The weak signal detection technology based on stochastic resonance has potential applications in the information recognition and information processing.

**Keywords:** stochastic resonance, hardware circuit system, detection of weak signal, digital filtering

**PACC:** 0540, 4660D

\* Project supported by the National Nature Science Foundation of China (Grant No. 60808027) and by the University Students' Innovation Experiment Program of Harbin Institute of Technology in 2008.

† Corresponding author. E-mail: zhangyunn@hit.edu.cn