第 59 卷 第 5 期 2010 年 5 月
1000-3290/2010/59(05)/3027-08

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 59, No. 5, May, 2010

非线性耦合多重边赋权复杂网络的同步*

卞秋香[1)2)†]　姚洪兴[1)]

1)(江苏大学理学院,镇江　212013)

2)(江苏科技大学数理学院,镇江　212003)

(2009 年 7 月 9 日收到;2009 年 9 月 24 日收到修改稿)

研究了一类具有非线性耦合的多重边赋权复杂网络,基于网络拆分思想并运用 Lyapunov 稳定性理论给出了网络的同步准则,数值仿真验证了结论的有效性.

关键词: 非线性耦合,网络拆分,时滞,同步

PACC: 0545

1. 引　　言

近年来,复杂网络的研究热潮方兴未艾,其中网络的同步与控制的研究已成为这一领域的研究热点,针对不同类型、不同拓扑结构的复杂网络涌现出大量的研究成果[1—20]. 这些研究成果主要是关于简单图的复杂网络,对于多重边复杂网络的研究工作很少,而通信网、物流组织网、合作网等都是多重边复杂网络,因而有必要对这类网络进行研究. 另外很多复杂网络同步的结果以耦合函数是线性的假设为前提的[3,5,12,14],但由于实际情况的复杂性,大部分的耦合函数是非线性的. 文献[9]根据网络中边的不同性质将网络拆分成多个子网络,并针对节点是线性耦合、网络是非赋权图的情形给出了网络的同步准则. 本文研究了一类单个结点含时滞的非线性耦合多重边赋权复杂网络的同步控制问题,给出两种控制器的设置并加以证明,最后用仿真实例验证了它们的有效性.

2. 模型与假设

文献[10,18]考虑了含 N 个节点的非线性耦合动力学网络,该网络中每个节点均可用一个 n 阶微分方程描述

$$\dot{x}_i = f(x_i) + \sigma\sum_{j=1}^{N} g_{ij}h(x_j),\ x_i \in R^n,\quad i = 1,2,\cdots,N. \tag{1}$$

受以上模型及文献[9]中拆分思想的启发,本文考虑含有 N 个节点的多重边复杂网络,以通信网为例,把通信网拆分成电缆通信网、卫星通信网、光纤网等子网络,以传输速度最快的光纤网为零子网络,电缆通信网、卫星通信网相对于光纤网分别存在滞后 τ_1 和 τ_2,对通信网进行拆分构成 3 个子网络. 一般性的假设网络中边的性质有 m 种,把网络中各个边传输速度的不同定义为性质不同,以传输速度最快的或没有时滞的边和 N 个节点组成的网络为基准网络,称这个基准网络为零子网络,即时滞 $\tau_0 = 0$ 的网络,剩余边中相对于零子网络有相同时滞 τ_i 的边和 N 个节点构成第 i 个子网络,这样,最后可以拆分成 m 个子网络,并考虑节点自身存在时滞,系统的状态方程为

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) = {}& F(x_i(t), x_i(t-\tau)) + \sigma_0\sum_{j=1}^{N} g_{(0)ij}H_0(x_j(t)) \\ &+ \sigma_1\sum_{j=1}^{N} g_{(1)ij}H_1(x_j(t-\tau_1)) \\ &+ \sigma_2\sum_{j=1}^{N} g_{(2)ij}H_2(x_j(t-\tau_2)) + \cdots \\ &+ \sigma_{m-1}\sum_{j=1}^{N} g_{(m-1)ij}H_{m-1}(x_j(t-\tau_{m-1})), \\ & i = 1,2,\cdots,N,\end{aligned} \tag{2}$$

其中 $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in})^{\mathrm{T}} \in R^n$, $i = 1,2,\cdots,N$ 为节

* 国家自然科学基金(批准号:70871056)资助的课题.

† E-mail: bianqx_1@sohu.com

点 i 的状态变量，$F: R^n \times R^n \to R^n$ 是连续可微的函数，常数 $\tau > 0$ 是时滞时间，$\tau_l > 0 (l = 1, 2, \cdots, m-1)$ 是第 l 个子网络相对于不存在时滞的零子网络的时滞时间，常数 $\sigma_l > 0 (l = 0, 1, \cdots, m-1)$ 为第 l 个子网络的耦合强度，$H_l: R^n \to R^n (l = 0, 1, \cdots, m-1)$ 是连续可微的函数，为各个节点状态变量之间的内部耦合函数，耦合矩阵 $G_{(l)} = (g_{(l)ij})_{N\times N} (l = 0, 1, \cdots, m-1)$ 表示第 l 个子网络的拓扑结构，其中 $g_{(l)ij}$ 的定义如下：原网络中每条边定义一个称为权重的常数，$g_{(l)ij} = g_{(l)ji} (i \neq j)$ 为第 l 个子网络中的节点 i 和节点 j 之间连接边的权重之和，若两节点之间无连接，则 $g_{(l)ij} = g_{(l)ji} = 0 (i \neq j)$，矩阵的对角元定义为

$$g_{(l)ii} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} g_{(l)ij},\ i = 1, 2, \cdots, N,$$

即满足耗散耦合条件 $\sum_{j=1}^{N} g_{(l)ij} = 0$.

注意(2)式中的节点动力学方程适用于很多带时滞的物理系统，比如时滞 Logistic 系统，M－G 系统，一阶分段线性滞后系统等等.

考虑动态网络

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) = & F(x_i(t), x_i(t-\tau)) + \sigma_0 \sum_{j=1}^{N} g_{(0)ij} H_0(x_j(t)) \\ & + \sigma_1 \sum_{j=1}^{N} g_{(1)ij} H_1(x_j(t-\tau_1)) \\ & + \sigma_2 \sum_{j=1}^{N} g_{(2)ij} H_2(x_j(t-\tau_2)) + \cdots \\ & + \sigma_{m-1} \sum_{j=1}^{N} g_{(m-1)ij} H_{m-1}(x_j(t-\tau_{m-1})) + u_i, \\ & i = 1, 2, \cdots, N, \end{aligned} \tag{3}$$

其中 $u_i = u_i(x_j(t), x_j(t-\tau_k))$，$i, j = 1, \cdots, N$，$k = 1, \cdots, m-1$ 是控制输入. 下面我们给出系统(3)同步的定义.

定义 1 令 $x_i(t; t_0, X_0) (i = 1, 2, \cdots, N)$ 为(3)式的解，$X_0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_N^0) \in R^{n\times N}$，假设 $F: \Omega \times \Omega \to R^n$ 和 $H_l: \Omega \to R^n (l = 0, 1, \cdots, m-1)$ 以及 $u_i: \Omega \times \cdots \times \Omega \to R^n (i = 1, 2, \cdots, N)$ 是连续可微的，$\Omega \subseteq R^n$. 如果存在非空子集 $\Gamma \subseteq \Omega$，并且 $x_i^0 \in \Gamma (i = 1, 2, \cdots, N)$，那么对所有的 $t \geq t_0$ 和 $i = 1, 2, \cdots, N$，有 $x_i(t; t_0, X_0) \in \Omega$ 成立，且有

$$\lim_{t\to\infty} \| x_i(t; t_0, X_0) - s(t; t_0, x_0) \| = 0,\ 1 \leq i \leq N,$$

其中 $s(t; t_0, x_0)$ 是 $\dot{x} = F(x(t), x(t-\tau))$ 的一个解，且 $x_0 \in \Omega$，向量 x 的范数 $\|\cdot\|$ 定义为 $\|x\| = (x^{\mathrm{T}}x)^{1/2}$，那么就称(3)式所描述的系统趋于同步，$\Gamma \times \cdots \times \Gamma$ 称为同步域.

把 $s(t; t_0, x_0)$ 记为 $s(t)$，则

$$\dot{s}(t) = F(s(t), s(t-\tau)), \tag{4}$$

其中 $s(t)$ 可以作为一个平衡点，一个不规则周期轨道或者一个混沌轨道.

定义网络系统的误差变量为

$$\begin{aligned} e_i(t) &= x_i(t) - s(t), \\ e_i(t-\tau_l) &= x_i(t-\tau_l) - s(t-\tau_l), \\ & 1 \leq i \leq N, 1 \leq l \leq m-1. \end{aligned} \tag{5}$$

下面的目的是设计控制器 u_i，使动态网络(3)趋于同步，即

$$\lim_{t\to\infty} \| e_i(t) \| = 0,\ 1 \leq i \leq N. \tag{6}$$

由于系统(3)满足耗散耦合条件 $\sum_{j=1}^{N} g_{(l)ij} = 0$，于是(4)式可表为

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) = & F(s(t), s(t-\tau)) + \sigma_0 \sum_{j=1}^{N} g_{(0)ij} H_0(s(t)) \\ & + \sigma_1 \sum_{j=1}^{N} g_{(1)ij} H_1(s(t-\tau_1)) \\ & + \sigma_2 \sum_{j=1}^{N} g_{(2)ij} H_2(s(t-\tau_2)) + \cdots \\ & + \sigma_{m-1} \sum_{j=1}^{N} g_{(m-1)ij} H_{m-1}(s(t-\tau_{m-1})), \\ & i = 1, 2, \cdots, N. \end{aligned} \tag{7}$$

(3)—(7)式得

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t) = & F(x_i(t), x_i(t-\tau)) - F(s, s(t-\tau)) \\ & + \sigma_0 \sum_{j=1}^{N} g_{(0)ij} h_0(e_j(t)) \\ & + \sigma_1 \sum_{j=1}^{N} g_{(1)ij} h_1(e_j(t-\tau_1)) \\ & + \sigma_2 \sum_{j=1}^{N} g_{(2)ij} h_2(e_j(t-\tau_2)) + \cdots \\ & + \sigma_{m-1} \sum_{j=1}^{N} g_{(m-1)ij} h_{m-1}(e_j(t-\tau_{m-1})) + u_i, \\ & i = 1, 2, \cdots, N, \end{aligned} \tag{8}$$

其中

$$\begin{aligned} h_0(e_j(t)) &= H_0(x_j(t)) - H_0(s(t)), \cdots, \\ h_{m-1}(e_j(t-\tau_{m-1})) &= H_{m-1}(x_j(t-\tau_{m-1})) \\ & \quad - H_{m-1}(s(t-\tau_{m-1})). \end{aligned}$$

下面给出定理中所需的假设与引理.

假设 1 假设存在非负常数 α，满足 $\forall t \in R_+$，有

$$\| F(x_i(t), x_i(t-\tau)) - F(s(t), s(t-\tau)) \|$$

$$\leqslant \alpha (\| x_i(t) - s(t) \| + \| x_i(t-\tau) - s(t-\tau) \|),$$
$$i = 1,2,\cdots,N.$$

假设 2　假设存在非负数 β_l，满足 $\forall t \in R_+$，有

$$\| H_l(x_j(t)) - H_l(s(t)) \| \leqslant \beta_l \| x_j(t) - s(t) \|,$$
$$l = 0,1,\cdots,m-1;$$
$$j = 1,2,\cdots,N.$$

假设 3　多重边赋权复杂网络中每条边的权重非负.

引理 1　$\forall x, y \in R^n$，有

$$2X^{\mathrm{T}}Y \leqslant X^{\mathrm{T}}X + Y^{\mathrm{T}}Y.$$

3. 同步准则

本节我们将给出使网络(3)趋于同步的两个准则.

定理 1　若假设 1 与 2 成立，则在自适应控制器(9)和适应律(10)的作用下(3)式所描述的系统趋于同步.

$$u_i(t) = -d_i e_i(t),\ i = 1,2,\cdots,N, \tag{9}$$

$$\dot{d}_i(t) = k_i e_i^{\mathrm{T}}(t) e_i(t),\ i = 1,2,\cdots,N, \tag{10}$$

其中 $k_i(i=1,2,\cdots,N)$ 是正常数.

证明　考虑如下李雅普诺夫函数：

$$V(t) = \sum_{i=1}^{N} \left[e_i^{\mathrm{T}}(t) e_i(t) + \alpha \int_{t-\tau}^{t} e_i^{\mathrm{T}}(\theta) e_i(\theta) d\theta \right] + \sum_{i=1}^{N} \frac{(d_i - d^*)^2}{k_i} + \sum_{l=1}^{m-1} g_{(l)} \sigma_l N \beta_l^2 \times \int_{t-\tau_l}^{t} \sum_{i=1}^{N} e_i^{\mathrm{T}}(\theta) e_i(\theta) \mathrm{d}\theta, \tag{11}$$

其中 $g_{(l)} = \max\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant N} |g_{(l)ij}|, l = 1,2,\cdots,m-1$，$d^*$ 是待定的正常量.

V 关于时间 t 求导，并将(8)—(10)式代入(11)式可得

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) = {} & \sum_{i=1}^{N} [2e_i^{\mathrm{T}}(t)\dot{e}_i(t) + \alpha e_i^{\mathrm{T}}(t)e_i(t) - \alpha e_i^{\mathrm{T}}(t-\tau)e_i(t-\tau)] + 2\sum_{i=1}^{N} \frac{(d_i - d^*)}{k_i}\dot{d}_i \\
& + \sum_{l=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{N} g_{(l)}\sigma_l N \beta_l^2 [e_i^{\mathrm{T}}(t)e_i(t) - e_i^{\mathrm{T}}(t-\tau_l)e_i(t-\tau_l)] \\
= {} & 2\sum_{i=1}^{N} e_i^{\mathrm{T}}(t) [F(x_i(t), x_i(t-\tau)) - F(s(t), s(t-\tau)) + \sigma_0 \sum_{j=1}^{N} g_{(0)ij} h_0(e_j(t)) \\
& + \sigma_1 \sum_{j=1}^{N} g_{(1)ij} h_1(e_j(t-\tau_1)) + \sigma_2 \sum_{j=1}^{N} g_{(2)ij} h_2(e_j(t-\tau_2)) + \cdots \\
& + \sigma_{m-1} \sum_{j=1}^{N} g_{(m-1)ij} h_{m-1}(e_j(t-\tau_{m-1}))] + \sum_{i=1}^{N} [(\alpha - 2d^*) e_i^{\mathrm{T}}(t)e_i(t) \\
& - \alpha e_i^{\mathrm{T}}(t-\tau)e_i(t-\tau)] + \sum_{l=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{N} g_{(l)}\sigma_l N\beta_l^2 [e_i^{\mathrm{T}}(t)e_i(t) - e_i^{\mathrm{T}}(t-\tau_l)e_i(t-\tau_l)],
\end{aligned}$$

考虑假设 1 可得

$$\begin{aligned}
& 2e_i^{\mathrm{T}}(t) [F(x_i(t), x_i(t-\tau)) - F(s(t), s(t-\tau))] \\
\leqslant {} & 2 \| e_i(t) \| \| F(x_i(t), x_i(t-\tau)) - F(s(t), s(t-\tau)) \| \\
\leqslant {} & 2\alpha \| e_i(t) \| (\| e_i(t) \| + \| e_i(t-\tau) \|) \\
\leqslant {} & 2\alpha \| e_i(t) \|^2 + \alpha(\| e_i(t) \|^2 + \| e_i(t-\tau) \|^2) \\
= {} & 3\alpha e_i^{\mathrm{T}}(t)e_i(t) + \alpha e_i^{\mathrm{T}}(t-\tau)e_i(t-\tau),
\end{aligned} \tag{12}$$

记 $g_{(0)} = \max\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant N} |g_{(0)ij}|$，$\tau_0 = 0$，利用引理 1，并考虑假设 2 有

$$\begin{aligned}
2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} g_{(l)ij} e_i^{\mathrm{T}}(t) h_l(e_j(t-\tau_l)) & \leqslant g_{(l)} \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} [e_i^{\mathrm{T}}(t)e_i(t) + h_l^{\mathrm{T}}(e_j(t-\tau_l)) h_l(e_j(t-\tau_l))] \\
& \leqslant g_{(l)} \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} [e_i^{\mathrm{T}}(t)e_i(t) + \beta_l^2 e_j^{\mathrm{T}}(t-\tau_l) e_j(t-\tau_l)]
\end{aligned}$$

$$= g_{(l)}N\sum_{i=1}^{N}[e_i^{\mathrm{T}}(t)e_i(t)+\beta_l^2 e_i^{\mathrm{T}}(t-\tau_l)e_i(t-\tau_l)],$$

$$l=0,1,\cdots,m-1. \tag{13}$$

于是

$$\begin{aligned}\dot{V}(t)\leqslant&\sum_{i=1}^{N}(4\alpha-2d^*)e_i^{\mathrm{T}}(t)e_i(t)+g_{(0)}\sigma_0 N\sum_{i=1}^{N}[e_i^{\mathrm{T}}(t)e_i(t)+\beta_0^2 e_i^{\mathrm{T}}(t)e_i(t)]\\&+g_{(1)}\sigma_1 N\sum_{i=1}^{N}[e_i^{\mathrm{T}}(t)e_i(t)+\beta_1^2 e_i^{\mathrm{T}}(t-\tau_1)e_i(t-\tau_1)]+\cdots\\&+g_{(m-1)}\sigma_{m-1}N\sum_{i=1}^{N}[e_i^{\mathrm{T}}(t)e_i(t)+\beta_{m-1}^2 e_i^{\mathrm{T}}(t-\tau_{m-1})e_i(t-\tau_{m-1})]\\&+\sum_{l=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{N}g_{(l)}\sigma_l N\beta_l^2[e_i^{\mathrm{T}}(t)e_i(t)-e_i^{\mathrm{T}}(t-\tau_l)e_i(t-\tau_l)]\\=&\sum_{i=1}^{N}\left[4\alpha-2d^*+\sum_{l=0}^{m-1}g_{(l)}\sigma_l N(\beta_l^2+1)\right]e_i^{\mathrm{T}}(t)e_i(t).\end{aligned}$$

选择 d^* 使 $4\alpha-2d^*+\sum_{l=0}^{m-1}g_{(l)}\sigma_l N(\beta_l^2+1)<0$，就有 $\dot{V}(t)<0$，根据 Lyapunov 稳定性理论可得，$\lim_{t\to\infty}\|e_i(t)\|=0,1\leqslant i\leqslant N$. 即(6)式成立，于是系统(3)在(9)与(10)式的作用下趋于同步. 证毕.

若复杂网络中每条边的权重非负，则可以得到如下的同步准则.

定理2 若假设1—3成立，则在控制器(14)作用下(3)式所描述的系统趋于同步.

$$u_i=\left[-d-2\alpha+\sum_{l=0}^{m-1}\sigma_l(\beta_l^2 g_{(l)ii}+g_{(l)ii})\right]e_i(t),$$

$$i=1,2,\cdots,N, \tag{14}$$

其中 d 是正常数.

证明 考虑如下李雅普诺夫函数

$$\begin{aligned}V(t)=&\sum_{i=1}^{N}\left[e_i^{\mathrm{T}}(t)e_i(t)+\alpha\int_{t-\tau}^{t}e_i^{\mathrm{T}}(\theta)e_i(\theta)\mathrm{d}\theta\right]\\&-2\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{m-1}\sigma_l g_{(l)ii}\int_{t-\tau_l}^{t}h_l^{\mathrm{T}}(e_i(\theta))\\&\times h_l(e_i(\theta))\mathrm{d}\theta.\end{aligned} \tag{15}$$

由假设3可知 $g_{(l)ij}=g_{(l)ji}\geqslant 0\,(i\neq j)$，于是 $g_{(l)ii}\leqslant 0$，故 $V(t)\geqslant 0$. 将 V 关于时间 t 求导，并将(8)式与(14)式代入，可得

$$\begin{aligned}\dot{V}(t)=&\sum_{i=1}^{N}2e_i^{\mathrm{T}}(t)\Big\{F(x_i(t),x_i(t-\tau))-F(s(t),s(t-\tau))+\sigma_0\sum_{j=1}^{N}g_{(0)ij}h_0(e_j(t))\\&+\sigma_1\sum_{j=1}^{N}g_{(1)ij}h_1(e_j(t-\tau_1))+\sigma_2\sum_{j=1}^{N}g_{(2)ij}h_2(e_j(t-\tau_2))+\cdots\\&+\sigma_{m-1}\sum_{j=1}^{N}g_{(m-1)ij}h_{m-1}(e_j(t-\tau_{m-1}))+\left[-d-2\alpha+\sum_{l=0}^{m-1}\sigma_l(\beta_l^2 g_{(l)ii}+g_{(l)ii})\right]e_i(t)\Big\}\\&+\sum_{i=1}^{N}\alpha[e_i^{\mathrm{T}}(t)e_i(t)-e_i^{\mathrm{T}}(t-\tau)e_i(t-\tau)]-2\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{m-1}\sigma_l g_{(l)ii}[h_l^{\mathrm{T}}(e_i(t))h_l(e_i(t))\\&-h_l^{\mathrm{T}}(e_i(t-\tau_l))h_l(e_i(t-\tau_l))].\end{aligned} \tag{16}$$

利用假设2及 $g_{(l)ii}\leqslant 0$，我们有

$$g_{(l)ii}\beta_l^2 e_i^{\mathrm{T}}(t)e_i(t)\leqslant g_{(l)ii}h_l^{\mathrm{T}}(e_i(t))h_l(e_i(t)),\ i=1,2,\cdots,N;l=0,1,\cdots,m-1.$$

再利用(12)式，由(16)式可得

$$\dot{V}(t)\leqslant -2d\sum_{i=1}^{N}e_i^{\mathrm{T}}(t)e_i(t)+2\sigma_0\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}g_{(0)ij}e_i^{\mathrm{T}}(t)h_0(e_j(t))+2\sigma_1\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}g_{(1)ij}e_i^{\mathrm{T}}(t)h_1(e_j(t-\tau_1))+\cdots$$

$$+2\sigma_{m-1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}g_{(m-1)ij}e_i^{\mathrm{T}}(t)h_{m-1}(e_j(t-\tau_{m-1}))+2\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{i=1}^{N}\sigma_l g_{(l)ii}e_i^{\mathrm{T}}(t)e_i(t)$$

$$+2\sigma_0\sum_{i=1}^{N}g_{(0)ii}h_0^{\mathrm{T}}(e_i(t))h_0(e_i(t))+2\sum_{l=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{N}\sigma_l g_{(l)ii}h_l^{\mathrm{T}}(e_i(t-\tau_l))h_l(e_i(t-\tau_l)).$$

利用 $g_{(l)ii}=-\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}g_{(l)ij}$，可得

$$\begin{aligned}\dot{V}(t)\leqslant&-2d\sum_{i=1}^{N}e_i^{\mathrm{T}}(t)e_i(t)+2\sigma_0\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}g_{(0)ij}e_i^{\mathrm{T}}(t)h_0(e_j(t))-2\sigma_0\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}g_{(0)ij}e_i^{\mathrm{T}}(t)h_0(e_i(t))\\&-2\sigma_0\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}g_{(0)ij}e_i^{\mathrm{T}}(t)e_i(t)-2\sigma_0\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}g_{(0)ij}h_0^{\mathrm{T}}(e_i(t))h_0(e_i(t))\\&+2\sigma_1\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}g_{(1)ij}e_i^{\mathrm{T}}(t)h_1(e_j(t-\tau_1))-2\sigma_1\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}g_{(1)ij}e_i^{T}(t)h_1(e_i(t-\tau_1))\\&-2\sigma_1\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}g_{(1)ij}e_i^{T}(t)e_i(t)-2\sigma_1\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}g_{(1)ij}h_1^{\mathrm{T}}(e_i(t-\tau_1))h_1(e_i(t-\tau_1))+\cdots\\&+2\sigma_{m-1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}g_{(m-1)ij}e_i^{\mathrm{T}}(t)h_{m-1}(e_j(t-\tau_{m-1}))\\&-2\sigma_{m-1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}g_{(m-1)ij}e_i^{\mathrm{T}}(t)h_{m-1}(e_i(t-\tau_{m-1}))-2\sigma_{m-1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}g_{(m-1)ij}e_i^{\mathrm{T}}(t)e_i(t)\\&-2\sigma_{m-1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}g_{(m-1)ij}h_{m-1}^{\mathrm{T}}(e_i(t-\tau_{m-1}))h_{m-1}(e_i(t-\tau_{m-1})).\end{aligned}$$

由于 $g_{(l)ij}=g_{(l)ji}(i\neq j)$，可得

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}g_{(0)ij}h_0^{\mathrm{T}}(e_i(t))h_0(e_i(t))=\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}g_{(0)ij}h_0^{\mathrm{T}}(e_j(t))h_0(e_j(t)),\tag{17}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}g_{(l)ij}h_l^{\mathrm{T}}(e_i(t-\tau_l))h_l(e_i(t-\tau_l))=\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}g_{(l)ij}h_l^{\mathrm{T}}(e_j(t-\tau_l))h_l(e_j(t-\tau_l)).\tag{18}$$

记 $\tau_0=0$，从而

$$\begin{aligned}\dot{V}(t)\leqslant&-2d\sum_{i=1}^{N}e_i^{\mathrm{T}}(t)e_i(t)\\&-\sum_{l=0}^{m-1}\Big[\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}\sigma_l g_{(l)ij}(e_i(t)+h_l(e_i(t-\tau_l)))^{\mathrm{T}}(e_i(t)+h_l(e_i(t-\tau_l)))\Big]\\&-\sum_{l=0}^{m-1}\Big[\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}\sigma_l g_{(l)ij}(e_i(t)-h_l(e_j(t-\tau_l)))^{\mathrm{T}}(e_i(t)-h_l(e_j(t-\tau_l)))\Big].\end{aligned}$$

由于 $d>0$，$\sigma_1>0$，$g_{(l)ij}\geqslant 0\,(i\neq j)$，于是 $\dot{V}(t)<0$，根据 Lyapunov 稳定性理论可得，$\lim_{t\to\infty}\|e_i(t)\|=0$，$1\leqslant i\leqslant N$，即(6)式成立，于是系统(3)在(14)式的作用下趋于同步. 证毕.

4. 数值仿真

考虑含有 50 个相同节点的复杂动态网络，其中每个节点的动力学方程为

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bf(x(t))+Cf(x(t-\tau)),\tag{19}$$

其中

$$x(t)=(x_1(t),x_2(t))^{\mathrm{T}},$$

$$f(x(t))=(\tanh(x_1(t)),\tanh(x_2(t)))^{\mathrm{T}},$$

$$A=\begin{pmatrix}-1.0 & 0\\ 0 & -1.0\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}2.1 & -0.1\\ -5.0 & 3.0\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}-1.5 & -0.1\\ -0.2 & -2.5\end{pmatrix},$$

$$\tau=1.$$

网络按延时被拆分成环状和星形两个子网络,整个动态网络的状态方程为

$$\dot{x}_i=Ax_i(t)+Bf(x_i(t))+Cf(x_i(t-\tau))+\sigma_0\sum_{j=1}^{50}g_{(0)ij}H_0(x_j)+\sigma_1\sum_{j=1}^{50}g_{(1)ij}H_1(x_j(t-\tau_1)),$$
$$i=1,2,\cdots,50,\tag{20}$$

其中$G_{(l)}=(g_{(l)ij})_{50\times50}(l=0,1)$是对称矩阵,定义如第二节所述,假设环状子网络的连接过程是$1\to2\to\cdots\to50\to1$,每条边的权重为1,$g_{(0)ii}=-2$,$i=1,\cdots,50$;星形子网络的中心节点为1,$g_{(1)1,5}=2$,$g_{(1)1,23}=8$,$g_{(1)1,50}=12$,$g_{(1)1j}=1$,$j=2,\cdots,49$,且$j\neq5,23$,则$g_{(1)1,1}=-68$,$g_{(1)5,5}=-2$,$g_{(1)23,23}=-8$,$g_{(1)50,50}=-12$,$g_{(1)ii}=-1$,$i=2,\cdots,49$,且$i\neq5,23$. 假设耦合强度为$\sigma_0=0.1$,$\sigma_1=0.2$,时滞$\tau=0.3$,$\tau_1=0.5$. 各个节点状态变量之间的内部耦合函数为

$$H_0(x_j(t))=\begin{pmatrix}5\arctan x_{j1}(t)\\ \arctan x_{j2}(t)\end{pmatrix},$$

$$H_1(x_j(t))=\begin{pmatrix}\cos x_{j2}(t)\\ \cos x_{j1}(t)\end{pmatrix},$$

$$j=1,2,\cdots,50.$$

注意系统(19)实际是一个混沌时滞 Hopfield 神经网络[21,22](见图1).

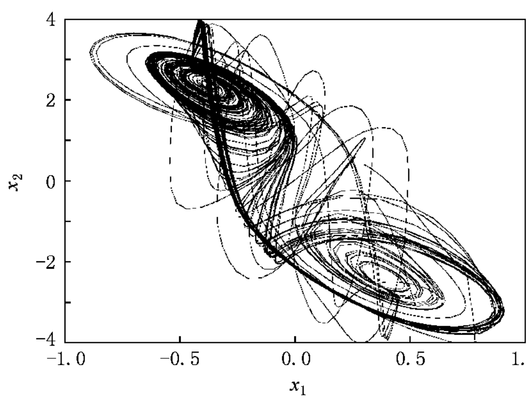
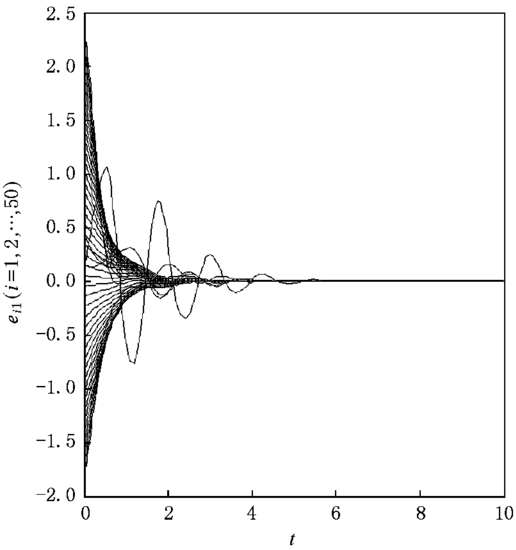


图1 系统(19)的混沌吸引子

例1 使用系统(20),显然$F=Ax(t)+Bf(x(t))+Cf(x(t-\tau))$满足假设1[12],$H_0$,$H_1$满足假设2,于是,采用定理1中的控制器,取$d_i=k_i=1(i=1,\cdots,50)$;初值$x_i(0)=(-2+i\times0.05,1+i\times0.05)^{\mathrm{T}}$,$i=1,\cdots,25$,$x_i(0)=(-2+(i-90)\times0.05,1+(i-90)\times0.05)^{\mathrm{T}}$,$i=26,\cdots,50$,$s(0)=(-2,1)^{\mathrm{T}}$. 图2给出了误差曲线,可以得出,复杂网



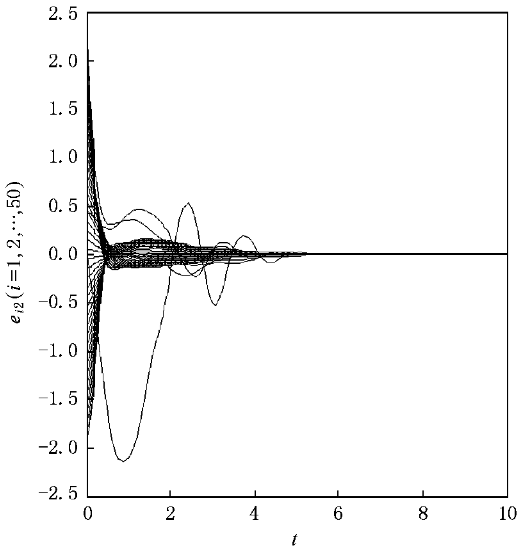


图2 例1的同步误差曲线

络(20)在定理 1 的控制器作用下可趋于同步.

例 2　仍使用系统(20)，按定理 2 给出控制器，

$$u_i = \Big[-d - 2\alpha + \sum_{l=0}^{m-1} \sigma_l \big(\beta_l^2 g_{(l)ii} + g_{(l)ii}\big) \Big] e_i(t),$$
$$i = 1, 2, \cdots, N,$$

其中 $N = 50, m = 2, d = 1, \alpha = 9, \beta_1 = 5, \beta_2 = 1$，初值 $x_i(0)$ 与 $s(0)$ 的取值同例 1，图 3 给出了误差曲线，即有(20)式在定理 2 的控制器作用下可趋于同步.

比较图 2 与图 3 可知，在定理 2 中控制器的作用下复杂网络(20)趋于同步的速度更快些.

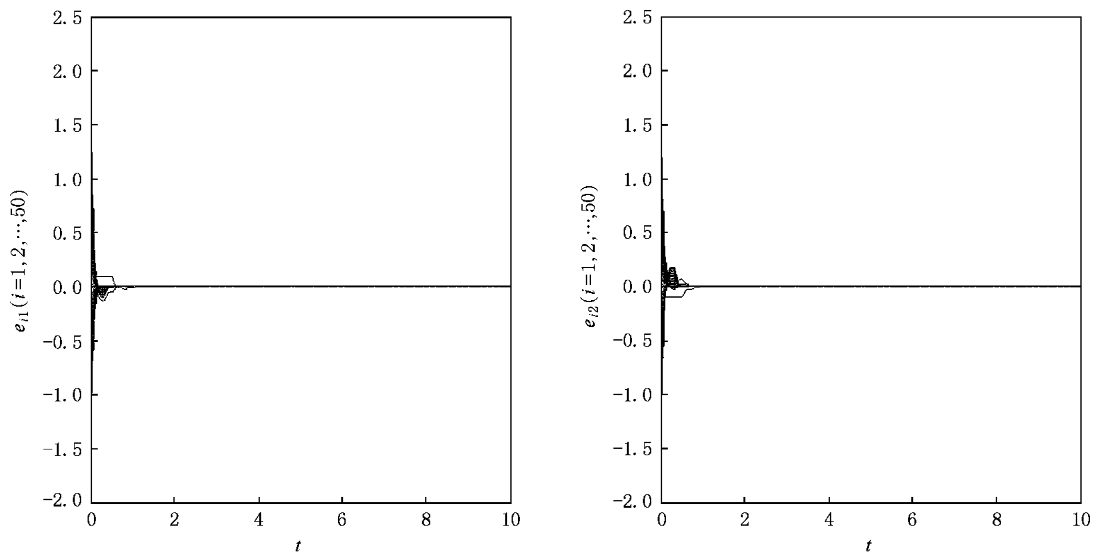


图 3　例 2 的同步误差曲线

5. 结　论

本文研究了一类具有非线性耦合的多重边赋权复杂网络，首先基于网络拆分思想建立数学模型，然后运用 Lyapunov 稳定性理论给出了两个网络同步准则，最后通过带时滞的 Hopfield 神经网络系统进行数值仿真，仿真结果验证了所提出的控制器的有效性.

[1] Wu C W 2005 *IEEE Trans. Circuits Syst.* II **52** 282
[2] Zhou C S, Motter A E, Kurths J 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 034101
[3] Cao J D, Li P, Wang W W 2006 *Phys. Lett.* A **353** 318
[4] Zou Y L, Zhu J, Chen G R 2006 *Phys. Rev.* E **74** 046107
[5] Wang W W, Cao J D 2006 *Physica* A **366** 197
[6] Wang X G, Lai Y C, Lai C H 2007 *Phys. Rev.* E **75** 056205
[7] Hua C C, Wang Q G, Guan X P 2007 *Phys. Lett.* A **368** 281
[8] Luo Q, Wu W, Li L X, Yang Y X, Peng H P 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1529 (in Chinese) [罗　群、吴　薇、李丽香、杨义先、彭海朋 2008 物理学报 **57** 1529]
[9] Gao Y, Li L X, Peng H P, Yang Y X , Zhang X H 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2081 (in Chinese) [高　洋、李丽香、彭海朋、杨义先、张小红 2008 物理学报 **57** 2081]
[10] He G M, Yang J Y 2008 *Chaos Soliton. Fract.* **38** 1254
[11] Wang Q Y, Duan Z S, Chen G R, Feng Z S 2008 *Physica* A **387** 5616
[12] Cai S M, Zhou J, Xiang L, Liu Z R 2008 *Phys. Lett.* A **372** 4990
[13] Sorrentino F, Ott E 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 114101
[14] Yu W W, Cao J D, Lü J H 2008 *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* **7** 108
[15] Shang Y, Chen M Y, Kurths J 2009 *Phys. Rev.* E **80** 027201
[16] Zhang Z, Fu Z Q,Yan G 2009 *Chin. Phys.* B **18** 2209
[17] Liu T, Zhao J, Hill D J 2009 *Chaos Soliton. Fract.* **40** 1506
[18] Hao B B, Yu H, Jing Y W, Zhang S Y 2009 *Physica* A **388** 1939
[19] Lü L, Zhang C, 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1462 (in Chinese) [吕　翎、张　超 2009 物理学报 **58** 1462]
[20] Wei D Q, Luo X S, Qin Y H 2009 *Chin. Phys.* B **18** 2184
[21] Chen G R, Zhou J, Liu Z R 2004 *Int. J. Bifur. Chaos* **14** 2229
[22] Li P, Cao J D, Wang Z D 2007 *Physica* A **373** 261

Synchronization of weighted complex networks with multi-links and nonlinear coupling*

Bian Qiu-Xiang[1)2)†] Yao Hong-Xing[1)]

1) (*Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang* 212013, *China*)

2) (*Faculty of Mathematics and Physics, Jiangsu University of Science and Technology, Zhenjiang* 212003, *China*)

(Received 9 July 2009; revised manuscript received 24 September 2009)

Abstract

In this paper, we study a class of weighted complex networks with multi-links and nonlinear coupling. Based on a method of network split, network synchronization criteria are deduced by using Lyapunov stability theory. Numerical simulations verify the validity of the conclusions.

Keywords: nonlinear coupling, network split, delayed, synchronization

PACC: 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 70871056).

† E-mail: bianqx_1@sohu.com