

基于最小二乘支持向量机的分数阶混沌系统控制*

阎晓妹[†] 刘 丁

(西安理工大学自动化与信息工程学院, 西安 710048)

(2009 年 8 月 25 日收到; 2009 年 11 月 13 日收到修改稿)

提出了基于最小二乘支持向量机 (LS-SVM) 的分数阶混沌系统控制方法. 基于分数阶线性系统稳定理论, 通过线性分离的方法将系统分解为稳定的线性部分和相应的非线性部分, 再利用支持向量机良好的非线性函数逼近和泛化能力设计了主动控制器, 对非线性部分进行补偿, 从而将分数阶混沌系统控制到平衡点. 分别以分数阶 Liu 系统和分数阶 Chen 系统为例进行了仿真研究, 表明该方法是有有效和可行的.

关键词: 分数阶, 混沌控制, 支持向量机, 最小二乘支持向量机

PACC: 0545

1. 引 言

尽管分数阶微积分理论已有 300 多年的历史, 但是直到最近十几年, 它在物理和工程上的应用才成为当前国际研究的热点. 许多学科领域中的系统都表现出分数阶动力学特性, 例如黏滞系统^[1]、电介质极化^[2]和电极-电解液极化^[3]等. 近年来, 分数阶混沌系统引起了人们广泛的兴趣和深入的研究, 在分数阶 Chen 系统^[4]、分数阶 Lorenz 系统^[5]、分数阶 Duffing 系统^[6]、分数阶 Lü 系统^[7]以及分数阶超混沌系统^[8]中, 都证明了混沌行为的存在. 同时, 分数阶混沌系统的控制与同步也受到了人们的关注, 提出了许多有效的方法, 包括简单的线性反馈法^[9]、Backstepping 方法^[10]、Active 控制方法^[11]、脉冲控制方法^[12]等.

支持向量机 (support vector machines, SVM) 是 Vapnik 等在统计学习理论上提出的一种机器学习算法^[13], 它通过采用结构风险最小化准则来提高模型的泛化能力, 较好地解决了小样本、非线性、高维数和局部极小点等实际问题. 1999 年, Suykens 等提出了一种最小二乘支持向量机 (least square support vector machines, LS-SVM)^[14], 其在优化指标中采用了平方项, 且只有等式约束, 这样将传统

支持向量机中求解二次规划问题转化成为求解线性方程组, 简化了计算的复杂性. 最近 LS-SVM 已经在混沌系统的控制中得到了一些应用. 文献[15]直接利用 LS-SVM 对混沌系统的动力学特性进行学习, 以训练好的 LS-SVM 模型进行混沌系统的控制, 实现了离散混沌系统的控制. 文献[16]通过用 LS-SVM 补偿混沌系统的非线性, 同时应用线性状态反馈方法实现了连续混沌系统的控制.

以上的例子都是 LS-SVM 在整数阶混沌系统中的应用, 本文将 LS-SVM 引入到分数阶混沌系统的控制中. 基于分数阶线性系统稳定理论, 通过线性分离的方法将分数阶混沌系统分解为所有特征根都为负的线性稳定部分和相应的非线性部分, 再利用支持向量机良好的非线性函数逼近和泛化能力, 离线辨识非线性部分, 设计主动控制器实现系统的控制. 通过对分数阶 Liu 系统和分数阶 Chen 系统的仿真研究, 表明该方法能够很好地将系统控制到平衡状态.

2. 分数阶微分及其近似计算

分数阶微积分是整数阶微积分的推广, 它的阶数不再局限于整数. 分数阶微积分算子 ${}_a D_t^\alpha$ 的定义如下:

* 国家自然科学基金 (批准号: 60804040) 资助的课题.

[†] E-mail: yxm1302@126.com

$${}_a D_t^q = \begin{cases} \frac{d^q}{dt^q}, & R(q) > 0, \\ 1, & R(q) = 0, \\ \int_a^t (d\tau)^{-q}, & R(q) < 0. \end{cases} \quad (1)$$

其中, q 为一任意实数; a 和 t 为分数阶微积分算子的上下限.

在分数阶微积分的研究过程中,对微分和积分概念提出了许多种定义^[17],但常用的是 Riemann-Liouville(R-L)定义,其数学表达式如下:

$${}_a D_t^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \times \frac{d^n}{dt^n} \left[\int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{q-n+1}} d\tau \right], \quad (2)$$

式中, n 为大于 q 的最小整数, $n-1 < q < n$, $\Gamma(\cdot)$ 为伽玛函数

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt.$$

3. 分数阶线性系统的稳定性理论

分数阶线性系统的稳定性已经得到了充分的研究,并且得到了分数阶线性系统稳定的充分必要条件^[18,19].考虑下面的分数阶线性系统:

$$D^q \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{x}, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (3)$$

其中, $0 < q < 1, \mathbf{x} \in R^n, \mathbf{A} \in R^{n \times n}$.如果 $|\arg(\text{eig}(\mathbf{A}))| > \frac{q\pi}{2}$,则系统(3)是渐近稳定的. q 阶线性系统的稳定性区域如图 1 所示.

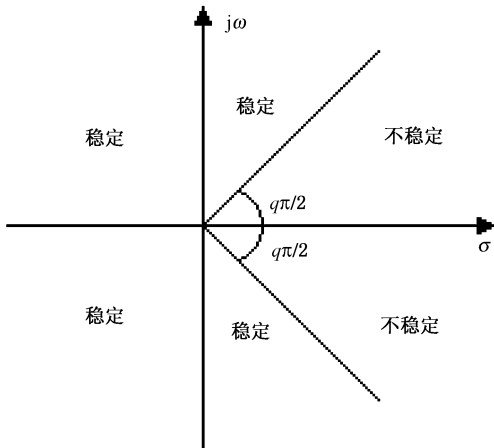


图 1 q 阶线性系统的稳定性区域

4. 分数阶混沌系统控制的最小二乘支持向量机方法

4.1. 回归型最小二乘支持向量机

设训练样本集 $\{\mathbf{x}_i, y_i\}_{i=1, \dots, l}, \mathbf{x}_i \in R^n$ 是第 i 个样本的输入向量, $y_i \in R$ 是对应于第 i 个样本的输出值, l 为训练样本数.利用高维特征空间里的最优线性回归函数

$$y(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T \varphi(\mathbf{x}) + b \quad (4)$$

来拟合样本集,其中非线性映射 $\varphi(\cdot)$ 把数据集从输入空间映射到特征空间,以便使输入空间中的非线性拟合问题变成高维特征空间中的线性拟合问题. \mathbf{w} 为超平面的权值向量, b 为偏置项.

对于 LS-SVM,优化问题描述如下:

$$\min J(\mathbf{w}, \xi) = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{w} + C \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \xi_i^2. \quad (5)$$

约束条件为

$$y_i = \mathbf{w}^T \varphi(\mathbf{x}_i) + b + \xi_i, \quad i = 1, \dots, l, \quad (6)$$

其中,常数 $C > 0$ 为惩罚参数; ξ 为松弛变量.

为求解上面的优化问题,引入 Lagrange 函数

$$L(\mathbf{w}, b, \xi, \alpha) = J(\mathbf{w}, \xi) - \sum_{i=1}^l \alpha_i (\mathbf{w}^T \varphi(\mathbf{x}_i) + b + \xi_i - y_i), \quad (7)$$

其中 α_i 为 Lagrange 乘子.根据 Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 最优条件,可得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} = 0 &\rightarrow \mathbf{w} = \sum_{i=1}^l \alpha_i \varphi(\mathbf{x}_i), \\ \frac{\partial L}{\partial b} = 0 &\rightarrow \sum_{i=1}^l \alpha_i = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \xi} = 0 &\rightarrow \alpha_i = C \xi_i, \\ \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0 &\rightarrow \mathbf{w}^T \varphi(\mathbf{x}_i) + b - y_i + \xi_i = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

消元去掉 w 和 ξ ,得到如下的线性方程组:

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}^T \\ \mathbf{1} & K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) + C^{-1} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}, \quad (9)$$

其中, $y = [y_1; \dots; y_l]^T, \mathbf{1} = [1; \dots; 1]^T, \alpha = [\alpha_1; \dots; \alpha_l]^T, K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ 为满足 Mercer 条件的核函数,解方程组(9)得最小二乘支持向量机回归模型如下:

$$y(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \alpha_i K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) + b, \quad (10)$$

其中 α_i, b 是线性方程组(9)的解, $K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ 表示由

输入空间 \mathbf{x} 非线性映射而来的高维特征空间. 本文选取最常用的径向基函数

$$K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \exp\left(\frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2}{-\delta^2}\right), \quad (11)$$

作为核函数, 式中的 δ 是一正的实际常数.

对于采用径向基核的 LS-SVM 的主要参数是惩罚参数 C 和核参数 δ , 这两个参数在很大程度上决定了 LS-SVM 的学习和泛化能力. 惩罚参数 C 控制对超出误差样本的惩罚的程度, 较小的 C 有提高泛化能力的作用, 而较大的 C 可提供更好的模型精度. 核参数 δ 越大, 则辨识曲线越平滑, 但不适合逼近变化较大的函数. 本文采用网格搜索法来选择参数 C 和 δ , 用交叉验证法对目标函数(均方差最小)进行寻优, 直至找到最佳的参数.

4.2. 用最小二乘支持向量机实现分数阶混沌系统控制

给定分数阶混沌系统为

$$D^q \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad (12)$$

其中 q 为阶数, $0 < q < 1$, $\mathbf{x} \in R^3$ 表示系统的状态变量, $\mathbf{A} \in R^{3 \times 3}$ 代表了系统的线性部分, $\mathbf{g}: R^3 \rightarrow R^3$ 是非系统的非线性部分. 利用线性分离的方法, 将分数阶混沌系统(12)分解为

$$\begin{aligned} D^q \mathbf{x} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{A}_m \mathbf{x} + (\mathbf{A} - \mathbf{A}_m)\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{A}_m \mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (13)$$

其中, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (\mathbf{A} - \mathbf{A}_m)\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x})$, \mathbf{A}_m 为预先设计的矩阵, 使其满足分数阶线性系统稳定条件

$$|\arg(\text{eig}(\mathbf{A}_m))| > \frac{q\pi}{2}.$$

假设 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 数学模型未知, 但是其输入和输出可以通过测量得到. 因此可以通过构造支持向量机来近似 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$. 引入非线性函数逼近器 $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$, 用 $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$ 补偿和削弱原系统中的 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, 即设计主动控制器 $\mathbf{u} = -\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$, 原系统变为

$$\begin{aligned} D^q \mathbf{x} &= \mathbf{A}_m \mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{u} \\ &= \mathbf{A}_m \mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{A}_m \mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ 为近似误差

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x}). \quad (15)$$

若 LS-SVM 能很好地逼近 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, 则有 $(\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x})) \rightarrow 0$, 即 $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ 趋近于零. 根据分数阶线性系

统稳定性定理, 系统(14)稳定, 从而将分数阶混沌系统(12)控制到平衡点.

如果不能忽略近似误差 $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$, 只要 $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ 足够小, 即系统(14)的非线性很弱, 这时可以通过选择合适的 \mathbf{A}_m 使极点远离虚轴, 从而使系统(14)稳定.

5. 数值仿真

为了验证提出的基于 LS-SVM 的分数阶混沌系统的控制方法, 本文分别对分数阶 Liu 系统和分数阶 Chen 系统进行了仿真研究. 对于每个系统, 首先应用 LS-SVM 对其非线性部分进行离线辨识, 然后将训练好的 LS-SVM 加入到原混沌系统以补偿和削弱系统的非线性, 控制混沌系统到达平衡状态.

5.1. 分数阶 Liu 系统控制

分数阶 Liu 系统描述如下:

$$\begin{aligned} \frac{d^q x}{dt^q} &= a(y - x), \\ \frac{d^q y}{dt^q} &= bx - kxz, \\ \frac{d^q z}{dt^q} &= -cz + hx^2, \end{aligned} \quad (16)$$

其中, a, b, c, k, h 为系统参数, q 为分数阶. 当 $a = 10, b = 40, c = 2.5, k = 1, h = 4$ 时, 系统处于混沌状态, 其动力学特性如图 2 所示.

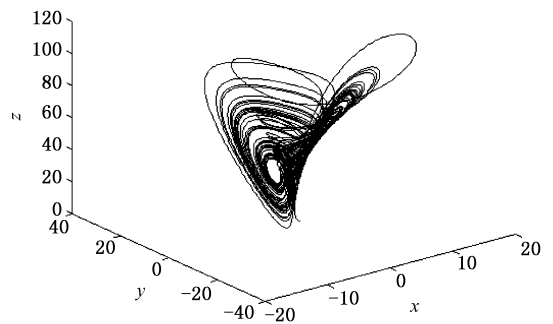


图2 分数阶 Liu 系统的混沌吸引子 ($q = 0.86$)

应用上述控制方法, 首先将分数阶 Liu 系统分解为

$$D^q \mathbf{x} = \mathbf{A}_m \mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 10x_2 \\ 40x_1 - x_1x_3 + x_2 \\ 4x_1^2 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

利用 LS-SVM 对 $F(\mathbf{x})$ 进行离线辨识,为了消除初值对非线性特性的影响,仿真时去除掉前 2000 对 $F(\mathbf{x})$ 的输入、输出数据,选用其后的 1000 对数据,其中前 700 对作为 LS-SVM 的训练集,后 300

对作为测试集. 最小二乘支持向量机的参数选为 $C = [c_1 \ c_2 \ c_3] = [10000 \ 200000 \ 200000]$, $[\delta_1^2 \ \delta_2^2 \ \delta_3^2] = [0.5 \ 10 \ 10]$, 训练后的 LS-SVM 模型对测试数据的均方根误差为 $MSE = \{0.0001, 0.0045, 0.0030\}$. 在 $t = 5\text{s}$ 时加入控制,系统状态可以很好的被控制到平衡点 $(0,0,0)$,图 3 所示为 LS-SVM 控制时的状态响应曲线.

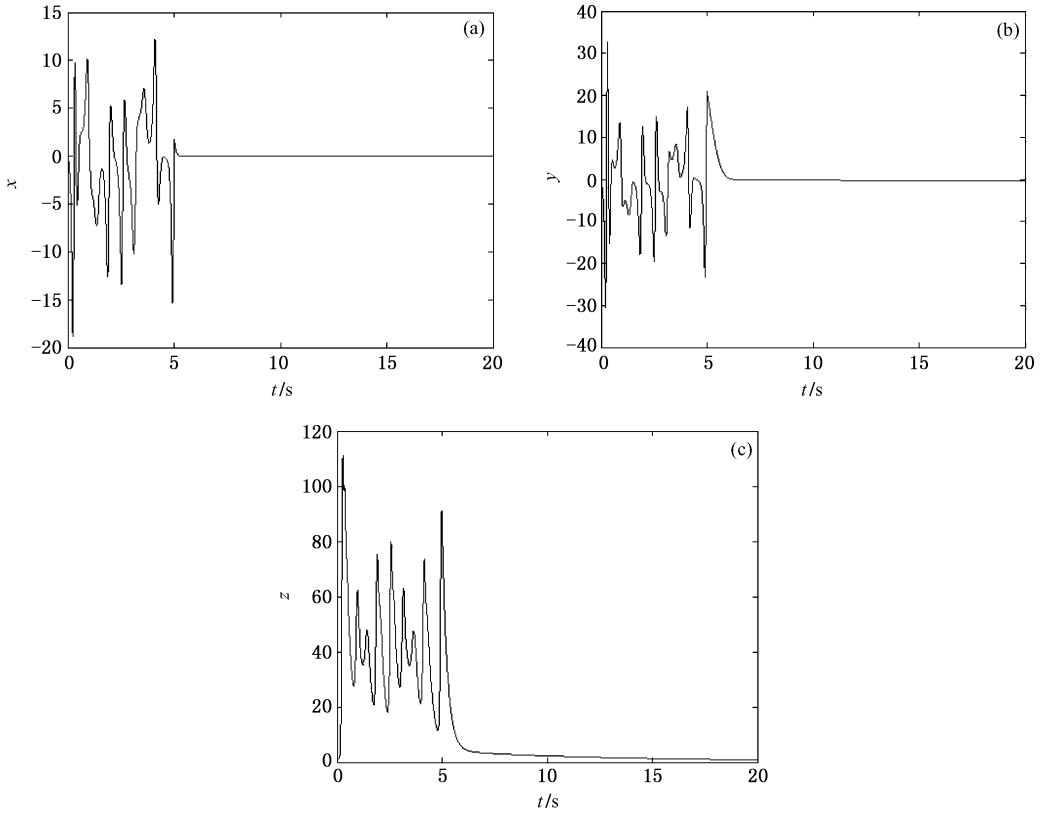


图 3 分数阶 Liu 混沌系统的状态控制响应曲线 (a) x 的响应曲线; (b) y 的响应曲线; (c) z 的响应曲线

5.2. 分数阶 Chen 系统控制

分数阶 Chen 系统描述如下:

$$\begin{aligned} \frac{d^q x}{dt^q} &= a(y - x), \\ \frac{d^q y}{dt^q} &= (c - a)x - xz + cy, \\ \frac{d^q z}{dt^q} &= xy - bz, \end{aligned} \quad (18)$$

其中, a, b, c 为系统参数, q 是分数阶. 当 $a = 35, b = 3, c = 28$ 时,系统处于混沌状态,其动力学特性如图 4 所示.

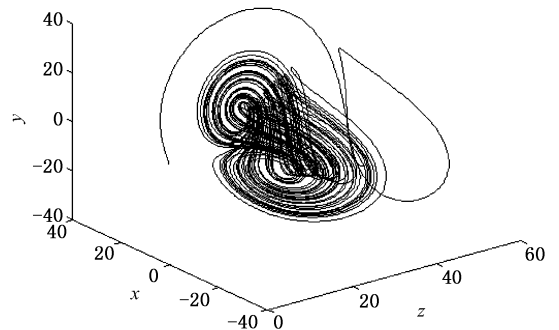


图 4 分数阶 Chen 系统的混沌吸引子 ($q = 0.9$)

应用上述控制方法,首先将分数阶 Chen 系统分

解为

$$D^q \mathbf{x} = \mathbf{A}_m \mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -35 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 35x_2 \\ -7x_1 - x_1x_3 + 30x_2 \\ x_1x_2 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

利用 LS-SVM 对 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 进行离线辨识, 在仿真中 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 输入、输出数据的选取与 5.1 相同, 去除掉前

2000 对数据, 再随后选取 700 对和 300 对数据, 分别作为 LS-SVM 的训练集和测试集. 最小二乘支持向量机的参数选为

$$C = [c_1 \quad c_2 \quad c_3] = [10000 \quad 200000 \quad 200000],$$

$$[\delta_1^2 \quad \delta_2^2 \quad \delta_3^2] = [0.5 \quad 60 \quad 10],$$

训练后的 LS-SVM 模型对测试数据的均方根误差为 $MSE = \{0.0009, 0.0098, 0.0006\}$. 在 $t = 5s$ 时加入控制, 系统状态可以很好的被控制到平衡点 $(0, 0, 0)$, 图 5 所示为 LS-SVM 控制时的状态响应曲线.

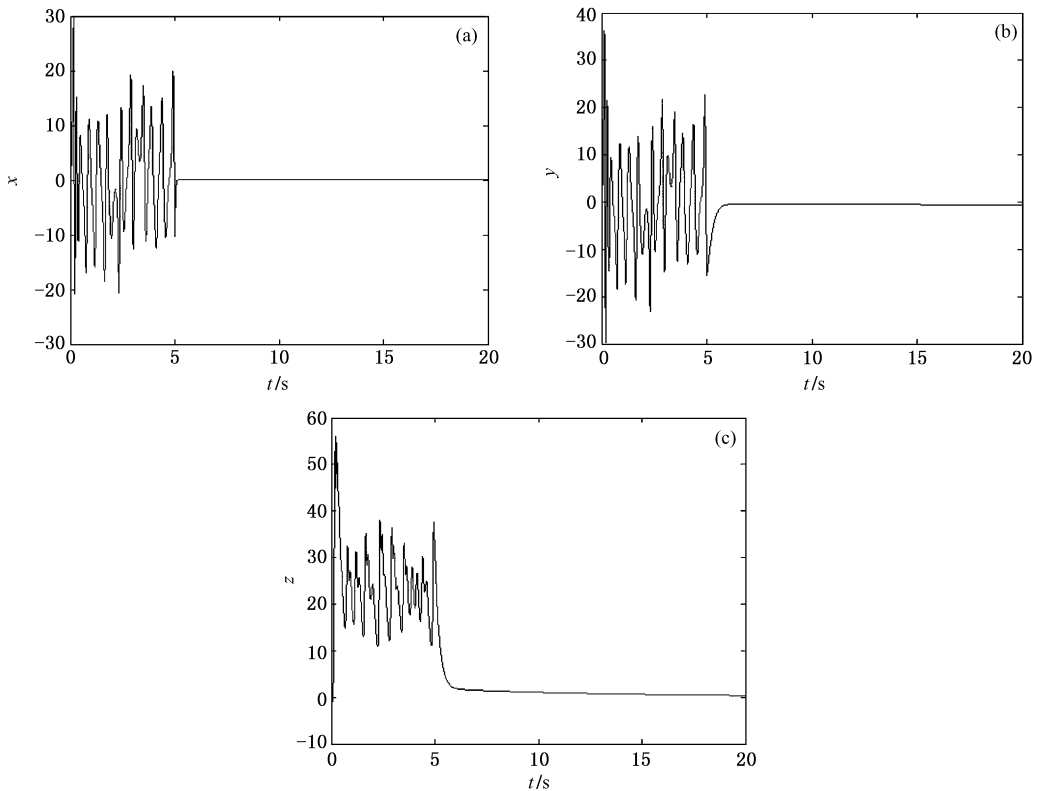


图 5 分数阶 Chen 混沌系统的状态控制响应曲线 (a) x 的响应曲线; (b) y 的响应曲线; (c) z 的响应曲线

6. 结 论

本文提出了一种分数阶混沌控制的新方法. 通过线性分离的方法, 利用最小二乘支持向量机离线辨识分数阶混沌系统的非线性部分, 并用辨识模型对系统进行主动控制. 由于 LS-SVM 利用结构风险

最小化原理来提高泛化能力, 通过解一组线性方程组得到全局最优解, 且拓扑结构由支持向量决定, 在训练结束时自动获得, 因此本文提出的基于 LS-SVM 的分数阶混沌系统控制方法有较高的可靠性. 对分数阶 Liu 系统和分数阶 Chen 系统的仿真研究表明, 所提出的方法能有效地将混沌系统控制到平衡状态.

[1] Bagley R L, Calico R A 1991 *J. Guid. Control Dyn.* **14** 304

[2] Sun H H, Abdelwahad A A, Onaral B 1984 *IEEE Trans.*

Automat. Control. **29** 441

[3] Ichise M, Nagayanagi Y, Kojima T 1971 *J. Electro - Anal.*

- Chem.* **33** 253
- [4] Li C P, Peng G J 2004 *Chaos Soliton. Fract.* **22** 443
- [5] Grigorenko I, Grigorenko E 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 034101
- [6] Ge Z M, Ou C Y 2007 *Chaos Soliton. Fract.* **34** 262
- [7] Lu J G 2006 *Phys. Lett. A* **354** 305
- [8] Liu C X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6865 (in Chinese) [刘崇新 2007 物理学报 **56** 6865]
- [9] Li C G, Chen G R 2004 *Chaos Soliton. Fract.* **22** 549
- [10] Gao X, Yu J B 2005 *Chin. Phys.* **14** 908
- [11] Zhang C F, Gao J F, Xu L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5124 (in Chinese) [张成芬、高金峰、徐磊 2007 物理学报 **56** 5124]
- [12] Zhong Q S, Bao J F, Yu Y B, Liao X F 2009 *Chin. Phys. Lett.* **25** 2812
- [13] Vapnik V N 2000 *The nature of statistical learning theory* (2nd ed) (New York: Springer-Vedag) p125
- [14] Suykens J A K, Vandewalle J 1999 *Int. J. Circ. Theor. Appl.* **27** 605
- [15] Ye M Y 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 30 (in Chinese) [叶美盈 2005 物理学报 **54** 30]
- [16] Liu H, Liu D, Ren H P 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4019 (in Chinese) [刘涵、刘丁、任海鹏 2005 物理学报 **54** 4019]
- [17] Podlubny I 1999 *Fractional differential equations* (1st ed) (New York: Academic Press) p41
- [18] Matignon D 1996 *IMACS- SMC Proceedings*, Lille, France, July, 1996 p963
- [19] Ahmed E, El-Sayed A M A, El-Saka H A A 2007 *J. Math. Anal. Appl.* **325** 542

Control of fractional order chaotic system based on least square support vector machines

Yan Xiao-Mei[†] Liu Ding

(School of Automation and Information Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

(Received 25 August 2009; revised manuscript received 13 November 2009)

Abstract

A new method based on least square support vector machines (LS-SVM) is proposed for chaos control of fractional order system. Based on the stability theory of fractional order linear system, the system is decomposed into stable linear parts and the corresponding nonlinear parts. The active controller is designed to compensate the nonlinear parts by using the excellent nonlinearity approximation ability and better generalization capacity of LS-SVM. Thus fractional order chaotic system is suppressed to the equilibrium point. Fractional order Liu system and fractional order Chen system are illustrated respectively. The simulation results verify the effectiveness and feasibility of the proposed method.

Keywords: fractional order, chaos control, support vector machines, least square support vector machines

PACC: 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60804040).

[†] E-mail: yxm1302@126.com