

非线性电路通向混沌的演化过程*

张晓芳[†] 陈章耀 毕勤胜

(江苏大学理学院, 镇江 212013)

(2009 年 7 月 30 日收到; 2009 年 9 月 8 日收到修改稿)

给出了四阶非线性电路通向复杂性的两种演化模式, 指出这两种模式与三个共存的平衡点有关. 在第一种模式中, 不稳定的平衡点由 Hopf 分岔导致了稳定的周期运动, 经过倍周期分岔通向混沌, 其所有的吸引子都保持对称结构; 而在第二种模式中, 另两个平衡点由 Hopf 分岔产生相互对称的极限环, 并分别导致了两个混沌吸引子, 其分岔过程步调一致, 而且所有的吸引子都相互对称. 随着参数的变化, 这两个混沌吸引子相互作用形成一个扩大的混沌吸引子, 导致与第一种分岔模式中定性一致的混沌运动.

关键词: 非线性电路, 分岔集, 分岔, 混沌

PACC: 0545, 0547

1. 引 言

近几十年来, 非线性系统的动力学行为, 特别是混沌现象受到广大学者的广泛关注^[1, 2]. 来自不同领域的科研人员致力于复杂行为的研究, 如 B-Z 化学反应的振荡^[3], 电缆的内共振^[4], 以及在初相位不同的耦合系统中的混沌危机^[5]等. 由于电路系统能够方便地提供实验研究, 所以有关非线性电路的理论和实验方面的研究成果很多, 例如, 倍周期分岔导致混沌^[6], 间歇引起混沌^[7]以及具有相应吸引盆的不同的混沌吸引子之间的共存现象^[8, 9]等等.

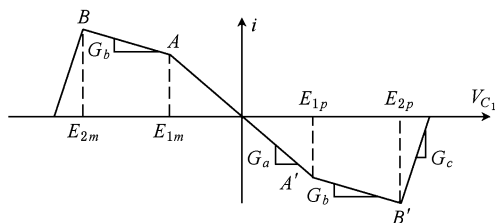


图 2 非线性电阻 R_N 中电压和电流的关系

含两个主要的元件: 一个线性的负电导和一个非线性电阻. 电阻上的电流和电压之间存在反对称的分段线性关系 (见图 2). 其动力学关系可以表示为以下形式:

$$\begin{aligned} \frac{dv_{C_1}}{dt} &= \frac{1}{C_1}(i_{L_1} - i), \\ \frac{dv_{C_2}}{dt} &= -\frac{1}{C_2}(Gv_{C_2} + i_{L_1} + i_{L_2}), \\ \frac{di_{L_1}}{dt} &= \frac{1}{L_1}(v_{C_2} - v_{C_1} - i_{L_1}R_1), \\ \frac{di_{L_2}}{dt} &= \frac{1}{L_2}(v_{C_2} - i_{L_2}R_2), \end{aligned} \quad (1)$$

流过非线性电阻 R_N 的电流 i 可表示为

$$\begin{aligned} i &= g(v_{C_1}) \\ &= G_c v_{C_1} + 0.5(G_a - G_b)(|v_{C_1} + E_{1p}| - |v_{C_1} - E_{1p}|) \end{aligned}$$

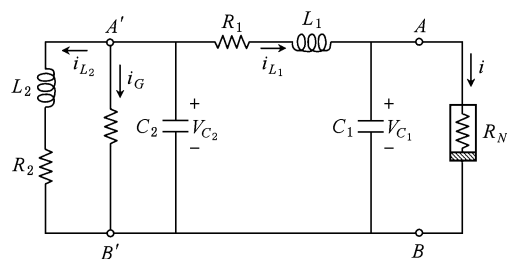


图 1 四阶自治非线性电路

最近, 在一个自治的四阶非线性电路 (见图 1) 中人们发现了由危机引起的间歇现象^[10]. 此电路包

* 国家自然科学基金 (批准号: 10872080) 资助的课题.

[†] E-mail: xfzhang@ujs.edu.cn

$$+ 0.5(G_b - G_c)(|v_{c_1} + E_{2p}| - |v_{c_1} - E_{2p}|). \quad (2)$$

通过实验时间历程及相应的相图,可以揭示向量场当中两个相互作用的子吸引子由混沌产生的间歇行为^[11,12].

然而,此电路中的一些问题并没有得到充分的研究.由于有共存的平衡点,与这些平衡点对应的就存在着通向复杂行为的不同的演化模式.此外,参数对向量场的影响,尤其是随参数变化的动力学行为的演化过程.这些问题的研究对混沌的控制具有重要的意义.所以本文将两个电阻值 R_1 和 R_2 作为控制参数,研究其变化对此电路动力学行为的影响,发现了不同的吸引子的共存现象,以及不同的通向复杂行为的演化过程.

2. 分岔分析

引入变换 $t = \sqrt{L_1 C_1} \tau, v_{c_1} = x_1, v_{c_2} = x_2, i_{L_1} = x_3, i_{L_2} = x_4$, 系统 (1) 可以转化为无量纲形式

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= \frac{\sqrt{L_1 C_1}}{C_1} [x_3 - f(x_1)], \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= -\frac{\sqrt{L_1 C_1}}{C_2} (Gx_2 + x_3 + x_4), \\ \frac{dx_3}{d\tau} &= \frac{\sqrt{L_1 C_1}}{L_1} (x_2 - x_1 - R_1 x_3), \\ \frac{dx_4}{d\tau} &= \frac{\sqrt{L_1 C_1}}{L_2} (x_2 - R_2 x_4), \end{aligned} \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} f(x_1) &= G_c x_1 + 0.5(G_a - G_b)(|x_1 + E_{1p}| - |x_1 - E_{1p}|) \\ &+ 0.5(G_b - G_c)(|x_1 + E_{2p}| - |x_1 - E_{2p}|). \end{aligned} \quad (4)$$

我们首先分析向量场的平衡点.将平衡点表示为 $X_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40})^T$, 其中

$$\begin{aligned} x_{20} &= \frac{R_2}{R_1 + R_2 + GR_1 R_2} x_{10}, \\ x_{30} &= -\frac{1 + GR_2}{R_1 + R_2 + GR_1 R_2} x_{10}, \\ x_{40} &= \frac{1}{R_1 + R_2 + GR_1 R_2} x_{10}. \end{aligned} \quad (5)$$

显然, x_{10} 满足方程

$$\begin{aligned} \frac{1 + GR_2}{R_1 + R_2 + GR_1 R_2} x_{10} + G_c x_{10} \\ + 0.5(G_a - G_b)(|x_{10} + E_{1p}| - |x_{10} - E_{1p}|) \end{aligned}$$

$$+ 0.5(G_b - G_c)(|x_{10} + E_{2p}| - |x_{10} - E_{2p}|) = 0, \quad (6)$$

当参数一旦固定下来,就可以得到 x_{10} 的个数以及其数值,从而得到平衡点的个数和在向量场中的位置.

这些平衡点的稳定性由相应的特征方程决定,写成如下形式:

$$\lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0. \quad (7)$$

由于平衡点要满足分段线性方程(6),所以对应用于不同的参数条件,(7)式中的系数 a_1, a_2, a_3, a_4 有三种不同的表达式,可以统一表示为

$$\begin{aligned} a_1 &= G_x a + Gb + R_2 e + R_1 c, \\ a_2 &= G_x a Gb + ca + cb + eb + Gb R_2 e + Gb R_1 c \\ &+ G_x a R_2 e + R_1 c R_2 e + G_x a R_1 c, \\ a_3 &= G_x a Gb R_1 c + G_x a c b + G_x a Gb R_2 e \\ &+ G_x a e b + G_x a R_1 c R_2 e + Gb R_1 c R_2 e \\ &+ c b R_2 e + e b R_1 c + c a R_2 e + c a Gb, \\ a_4 &= c e a b + G_x a Gb R_1 c R_2 e + c a Gb R_2 e \\ &+ G_x a c b R_2 e + G_x a e b R_1 c, \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $a = \sqrt{C_1 L_1} / C_1, b = \sqrt{C_1 L_1} / C_2, c = \sqrt{C_1 L_1} / L_1, e = \sqrt{C_1 L_1} / L_2$, 而 G_x 对应于 x_{10} 的取值有不同的形式.当 $x_{10} < -E_{2p}$ 或 $x_{10} > E_{2p}$ 时, $G_x = G_c$; 当 $-E_{2p} \leq x_{10} \leq -E_{1p}$ 或 $E_{1p} \leq x_{10} \leq E_{2p}$ 时, $G_x = G_b$; 当 $-E_{1p} < x_{10} < E_{1p}$ 时, $G_x = G_a$.

这样,可以得到两种形式的分岔集.一种可表示为

$$S: a_4 = 0, (a_3(a_1 a_2 - a_3) - a_1^2 a_4 > 0), \quad (9)$$

其上可以发生简单分岔,导致平衡点数目的变化.另一种表示为

$$H: a_3(a_1 a_2 - a_3) - a_1^2 a_4 = 0, (a_4 > 0), \quad (10)$$

其上可能产生 Hopf 分岔.

为了详细探讨系统的动力学行为,我们将参数设定为

$$\begin{aligned} C_1 &= 10.0 \text{ nF}, C_2 = 18.0 \text{ nF}, L_1 = 10.4 \text{ mH}, \\ L_2 &= 24.3 \text{ mH}, G = -0.5 \text{ mS}, G_a = -0.835 \text{ mS}, \\ G_b &= -0.515 \text{ mS}, G_c = 2.0 \text{ mS}, \\ E_{1p} &= 1.47 \text{ V}, E_{2p} = 9.00 \text{ V}, \end{aligned} \quad (11)$$

将 R_1 和 R_2 作为分岔参数.图3给出了 $R_2 = 0.18 \text{ k}\Omega$ 时,平衡点随 R_1 的变化.图中可以看到系统存在三个平衡点,分别表示为 E_0, E_1 和 E_2 .这里 E_0 代表平凡解 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0) = (\underline{0})$, E_1 和 E_2 则相对于原点对称.可以将(1)式中 (x_1, x_2, x_3, x_4) 变换为 $(-x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$, 向量场形式不变,从

而验证 E_1 和 E_2 确实应该存在对称关系. 数值计算显示, E_1 和 E_2 只有在 $R_1 \in [1.5670 \text{ k}\Omega, 2.1019 \text{ k}\Omega]$ 时稳定, 即说明这两个稳定的平衡点在此区域内对应于不同的初始条件共存. 值得注意的是, 这两个稳定平衡点的 x_1 绝对值都大于 E_{2p} . 下面分析 E_0 的稳定性.

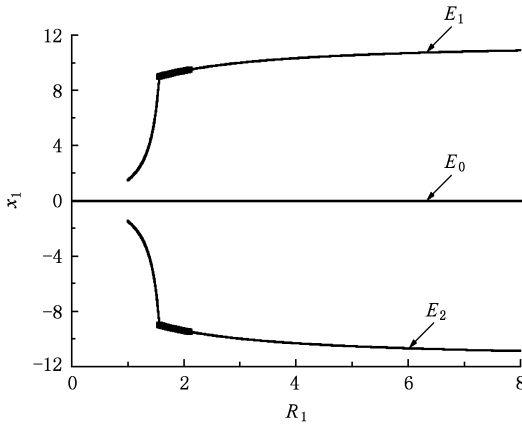


图3 $R_2 = 0.18 \text{ k}\Omega$ 时的平衡点 ($x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40}$), 其中粗线代表稳定的平衡点, 细线代表不稳定的平衡点

平衡点的特征方程(7)中, 由于 E_0 对应的 $x_{10} = 0$, 则系数表达式(8)中的 $G_x = G_a$. 由 Routh-Hurwitz 准则, 方程(7)所有根有负实部等价于 $a_1 > 0, a_1 a_2 - a_3 > 0, a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4 > 0$ 及 $a_4 > 0$ 同时满足. 将给定的参数代入后发现, 由 $a_1 > 0$ 可得 $R_1 > 1.0803 \text{ k}\Omega$, 而 $a_4 > 0$ 要求 $R_1 < 0.9998 \text{ k}\Omega$. 可见, 不能同时满足, 则说明在给定的参数条件下, E_0 总是不稳定的.

根据以上分析, 由(9)式和(10)式定义的所有分岔集都可以表示成 R_1 和 R_2 的方程, 它们将参数空间($R_1 - R_2$)划分成不同的区域, 分别对应于不同的运动(见图4).

注意: 图4中的极限线 L 代表 $|x_1| = E_{2p}$ 的精确

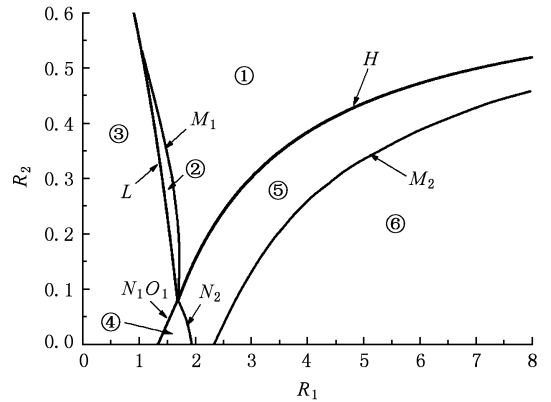


图4 ($R_1 - R_2$) 平面上的分岔集

条件(从图3可以观察到, 随着 R_1 的减少, 稳定平衡点的 x_1 绝对值也逐渐减少, 最终将小于 E_{2p} 失去其稳定性). H 表示 Hopf 分岔集. 分界线 M_1 表示与不稳定平衡点 E_0 有关的周期运动的临界条件. 分界线 N_1, N_2 和 M_2 代表了基于数值计算无解的条件.

在区域①中存在着两个对称的平衡点, 其 $|x_1| > E_{2p}$. 当参数穿越分岔集 H , 产生 Hopf 分岔, 在区域⑤ H 线附近得到周期运动. 将 $\lambda = i\omega$ 代入方程(7), 由实部和虚部同时为零, 可以求得 Hopf 分岔

$$\text{产生的频率 } \omega_H = \sqrt{\frac{a_3}{a_1}}. \text{ 在分岔集 } H \text{ 附近取 } (R_1, R_2) = (2.1020 \text{ k}\Omega, 0.18 \text{ k}\Omega), \text{ 则 } \omega_H = \sqrt{\frac{a_3}{a_1}} = 0.5020. \text{ 这一结果通过数值计算予以了验证. 例如, 区域⑤ } H \text{ 线附近 } (R_1, R_2) = (2.1026 \text{ k}\Omega, 0.18 \text{ k}\Omega) \text{ 时 } \omega_H = 0.5061.$$

在区域②中这两个平衡点仍然保持稳定, 并和一个周期运动共存(见图5). 数值分析可知, E_1, E_2 稳定且所对应的初始条件区域很小, 而 E_0 始终不稳定, 从 E_0 附近出发的轨线无法进入 E_1, E_2 所对应的稳定区域, 加之分段函数的制约, 从而导致包含 E_0 ,

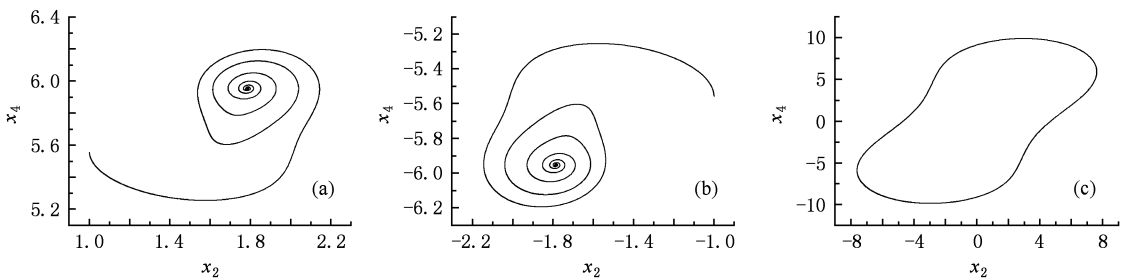


图5 $R_1 = 1.43 \text{ k}\Omega, R_2 = 0.30 \text{ k}\Omega$ 时的相图 (a) 稳定的平衡点 E_1 : 初始条件为 $(9.02, 1.0, -5.06, 5.56)$; (b) 稳定的平衡点 E_2 : 初始条件为 $(-9.02, -1.0, 5.06, -5.56)$; (c) 平衡点 E_0 失稳产生的周期解: 初始条件为 $(0.01, 0.01, 0.01, 0.01)$

E_1 及 E_2 的较大幅值的极限环.

在 $(x_2 - x_4)$ 平面上, 周期解的相轨迹相对于原

点对称(见图5(c)), 随参数变化分裂成两个对称的周期运动, 表示为 PS_1 和 PS_2 (见图6).

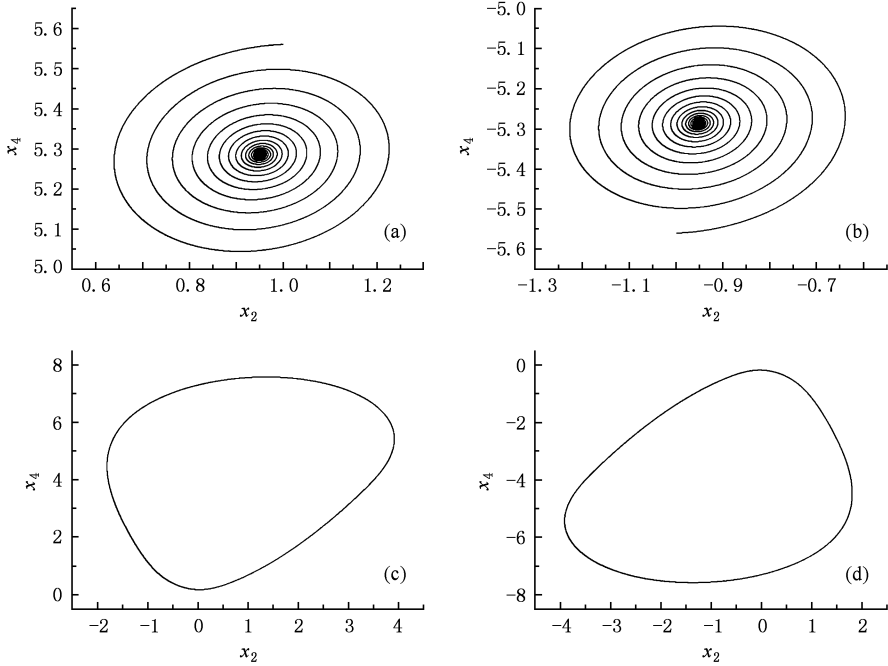


图6 $R_1 = 1.704 \text{ k}\Omega, R_2 = 0.18 \text{ k}\Omega$ 时的相图 (a) 稳定的平衡点 E_1 : 初始条件为 $(9.0, 1.0, -5.06, 5.56)$; (b) 稳定的平衡点 E_2 : 初始条件为 $(-9.0, -1.0, 5.06, -5.56)$; (c) 周期解 PS_1 : 初始条件为 $(0.01, 0.01, 0.01, 0.01)$; (d) 周期解 PS_2 : 初始条件为 $(-0.01, -0.01, -0.01, -0.01)$

当参数接近区域②中的 O_1 时, 周期运动的幅值快速增加, 最终在区域④中趋于无穷, 区域④中无有界解.

因为分段线性函数的影响, 当参数穿过分界线 L , 两个稳定平衡点的 x_1 绝对值均小于 E_{2p} , 所以区域③中两个稳定平衡点消失, 只有一个稳定的周期解.

同样, 当参数处于区域⑥中, 所有的变量趋于无穷, 无有界解. 在区域⑤中, 经 Hopf 分岔产生的周

期运动经过不同形式的分岔将会得到复杂的动力学行为, 以下将作详细的探讨.

3. 数值计算

在获得参数平面 (R_1, R_2) 上的分岔集后, 我们采用数值分析分别对 $R_2 = 0$ 和 $R_2 = 0.18 \text{ k}\Omega$ 两种情况下系统随参数 R_1 变化的动力学行为的演化过程进行研究.

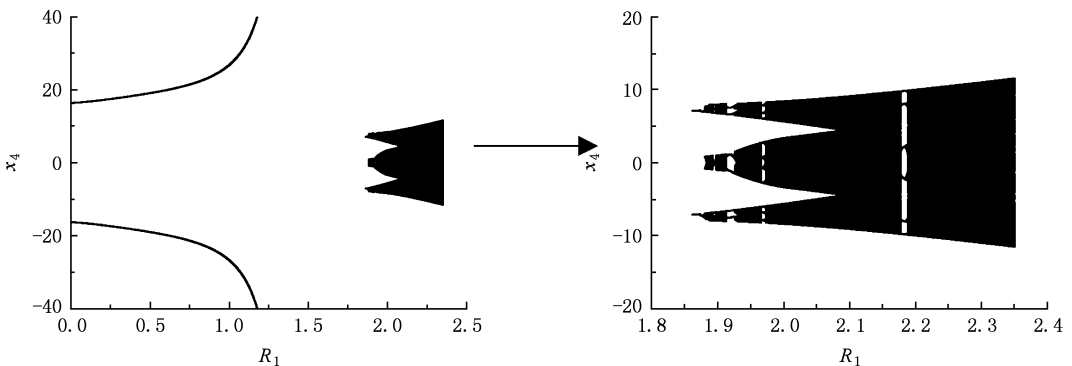


图7 $R_2 = 0$ 时的分岔图, 这里 x_4 表示穿过 $x_2 = 0$ 面时 x_4 的值

图 7 给出了 $R_2 = 0$ 的分岔图,从图中可以观察到,在 $R_1 \in [0, 1.3587 \text{ k}\Omega]$ 范围内存在与不稳定的平衡点 E_0 有关周期解(见图 8(a)). 并且,周期运动的幅值随 R_1 的增加快速增加,在 R_1 接近 1.3587

$\text{k}\Omega$ 时趋于无穷,即穿过分界线 N_1 进入图 4 中的区域④. 在 $R_1 \in (1.3587 \text{ k}\Omega, 1.8679 \text{ k}\Omega)$ 中没有有界解,也即无稳定的解存在(见图 8(b)). 而当 $R_1 > 1.8679 \text{ k}\Omega$ 时,一个新的周期解出现(见图 8(c)),

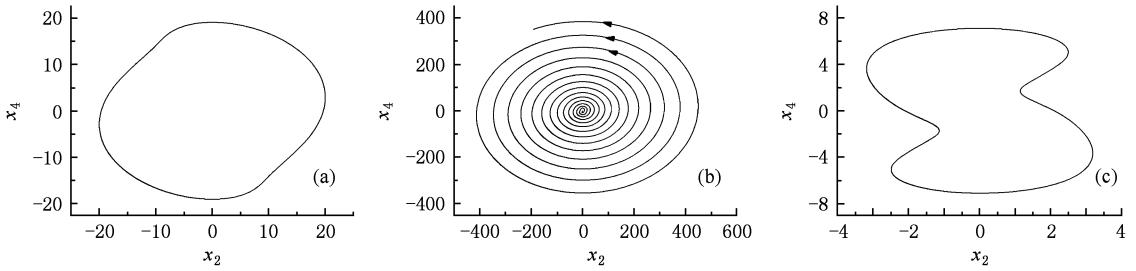


图 8 $R_2 = 0$ 时的相图 (a) $R_1 = 0.5 \text{ k}\Omega$; (b) $R_1 = 1.6 \text{ k}\Omega$; (c) $R_1 = 1.87 \text{ k}\Omega$

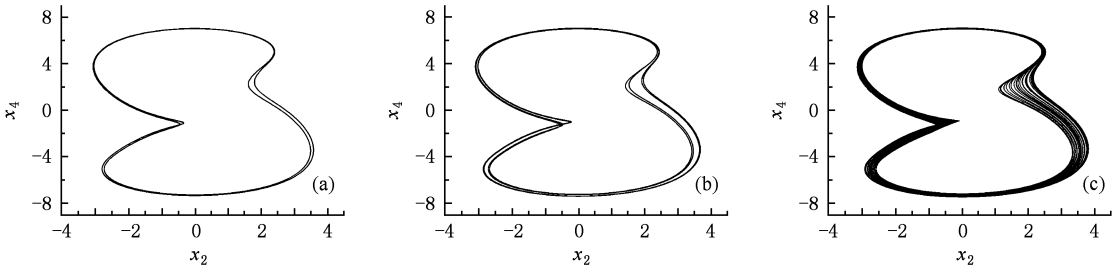


图 9 $R_2 = 0$ 时的相图 (a) $R_1 = 1.878 \text{ k}\Omega$; (b) $R_1 = 1.879 \text{ k}\Omega$; (c) $R_1 = 1.88 \text{ k}\Omega$

经过倍周期分岔进入混沌(见图 9).

值得注意的是,随着 R_1 的增加围绕着两个中心运动的混沌轨迹占据了更多相空间,混沌吸引子逐渐成长,最终在 $(x_2 - x_4)$ 面上左右两边轨迹相互交

叉形成了一个更为复杂的混沌解,此时仍然围绕着原先的两个中心在运动(见图 10(a)). 这一现象可以通过相应的时间历程进行证实. 比较图 10(b), (c) 发现,在同样的时间内, $R_2 = 1.91 \text{ k}\Omega$ 时变量 x_2

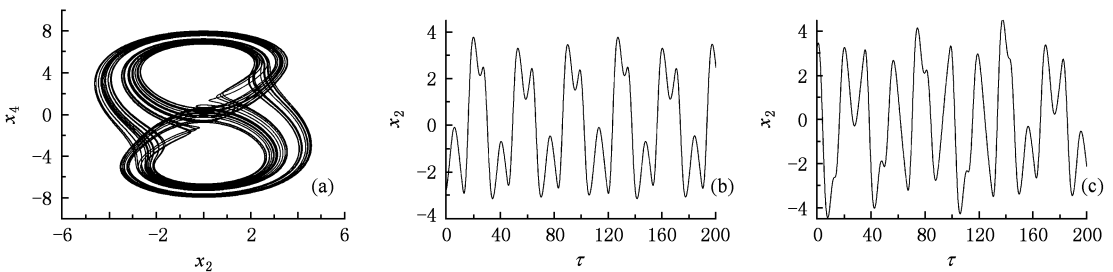


图 10 $R_2 = 0$ 时的相图和时间历程 (a) $R_1 = 1.91 \text{ k}\Omega$; (b) $R_1 = 1.88 \text{ k}\Omega$; (c) $R_1 = 1.91 \text{ k}\Omega$

经过 $x_2 = 0$ 这条线的次数明显较多.

进一步增加 R_1 的值到 $1.9134 \text{ k}\Omega$ 时,混沌吸引子失稳导致周期运动,再经过连续的倍周期分岔回到混沌状态(见图 11). 随着参数 R_1 的变化,可以观察到混沌吸引子具有不同的结构(见图 12),在此中间观察到几种类型的周期窗口(见图 13),说明这些混沌运动是从不同的周期运动分岔产生. 当 $R_1 =$

$2.3483 \text{ k}\Omega$ 时,轨线突然趋于无穷,再增加 R_1 值,都没有有界解存在.

需要强调的是, $R_2 = 0$ 的情况下,由于动力学行为都与不稳定平衡点 E_0 的分岔有关,因此所有的吸引子保持对称性质.

当我们将参数固定在 $R_2 = 0.18 \text{ k}\Omega$,从两个稳定的平衡点 E_1 和 E_2 分岔产生了不同的非线性行

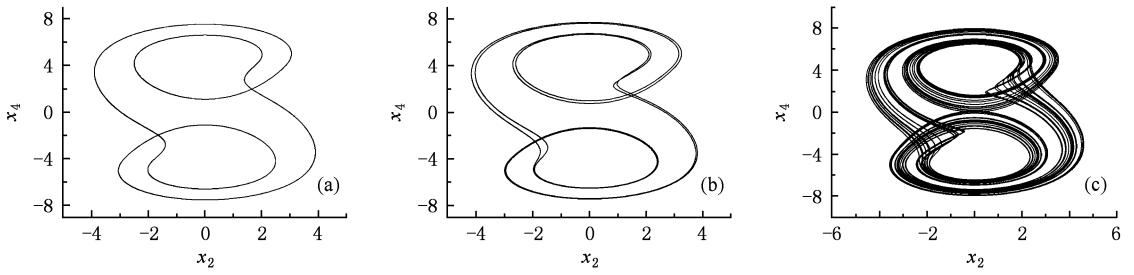


图 11 $R_2 = 0$ 时的相图 (a) $R_1 = 1.918 \text{ k}\Omega$; (b) $R_1 = 1.925 \text{ k}\Omega$; (c) $R_1 = 1.93 \text{ k}\Omega$

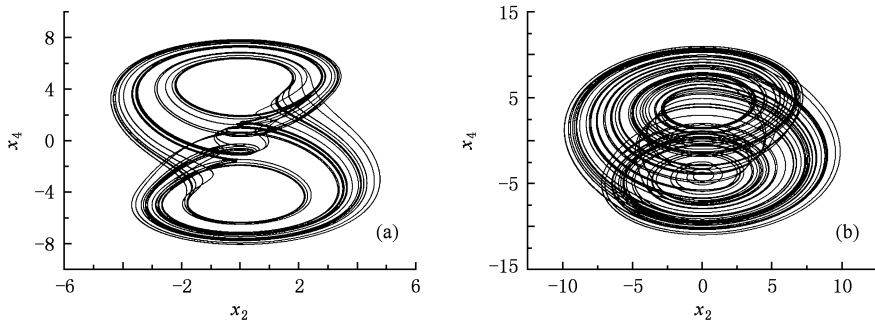


图 12 $R_2 = 0$ 时的相图 (a) $R_1 = 1.94 \text{ k}\Omega$; (b) $R_1 = 2.30 \text{ k}\Omega$

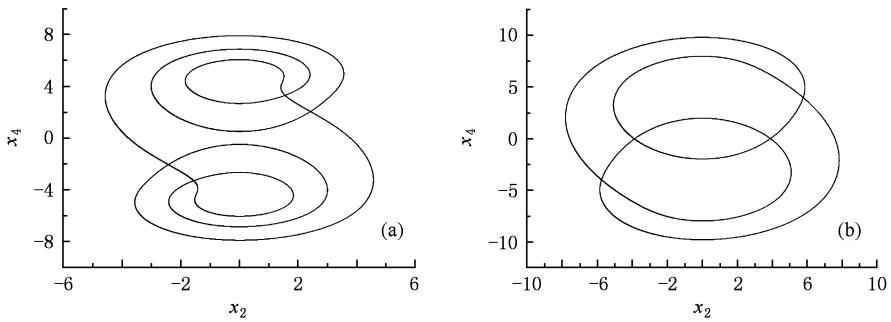


图 13 $R_2 = 0$ 时的相图 (a) $R_1 = 1.966 \text{ k}\Omega$; (b) $R_1 = 2.18 \text{ k}\Omega$

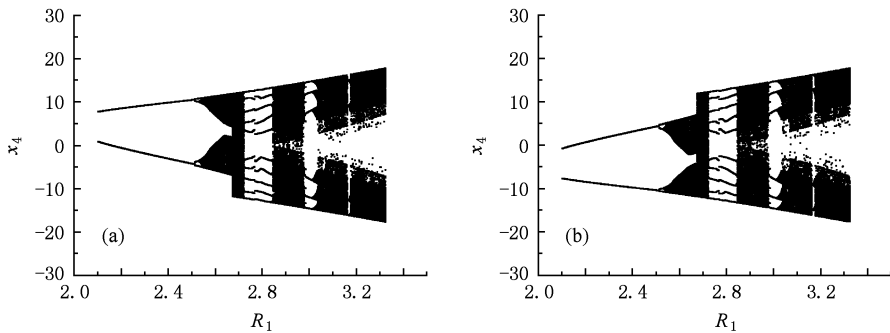


图 14 $R_2 = 0.18 \text{ k}\Omega$ 时的分岔图,这里 x_4 表示穿过 $x_2 = 0$ 面时 x_4 的值 (a) 与 E_1 有关的分岔; (b) 与 E_2 有关的分岔

为. 为了详细探讨其演化过程, 图 14 给出了 $R_2 = 0.18 \text{ k}\Omega$ 时的分岔图.

经数值计算发现 $R_1 < 1.5670 \text{ k}\Omega$ 时, 向量场存在与不稳定的 E_0 有关的周期解, 且相对于原点对

称,这与 $R_2 = 0$ 的情况一致,不作详细讨论. 而以下的分岔过程则和上一种情况有很大区别. 当 $R_1 \in [1.5670 \text{ k}\Omega, 1.7063 \text{ k}\Omega]$ 时,此周期解对应于不同的初始条件,和两个稳定的平衡点共存(见图 6). 当 $R_1 > 1.7063 \text{ k}\Omega$,周期解消失,只存在两个稳定的平衡点. 因为两个平衡点共存,这两个平

衡点失稳后将分别产生两种分岔模式(见图 14). 在 $R_1 = 2.1020 \text{ k}\Omega$ 时,两个平衡点同时经 Hopf 分岔得到共存的周期解,进而经过不断的倍周期分岔导致两个共存的混沌吸引子,相互对称(见图 15).

这两个混沌运动随着 R_1 的进一步增加相互作用

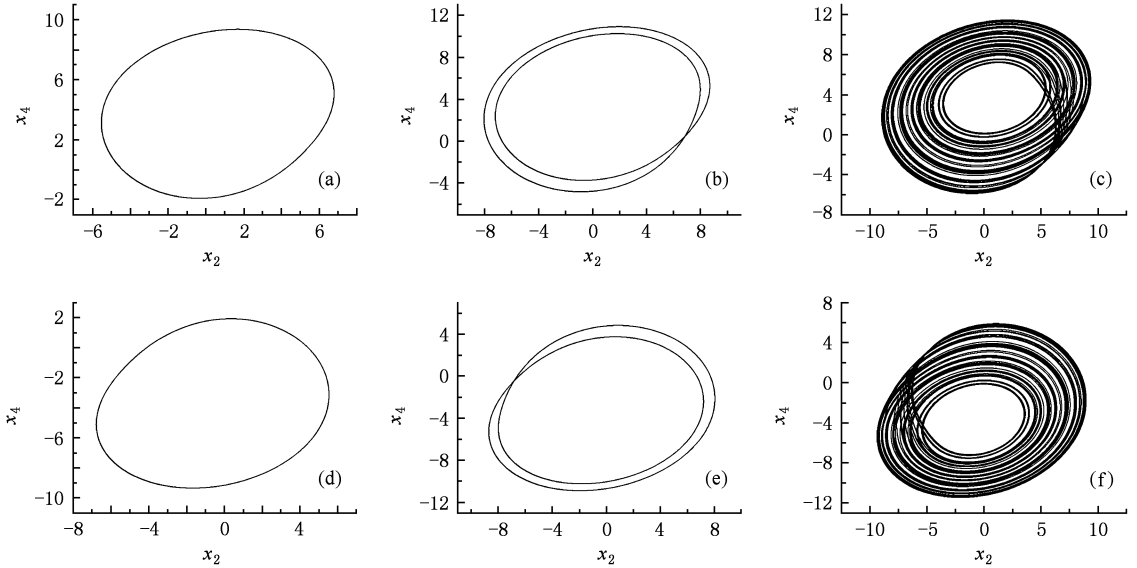


图 15 $R_2 = 0.18 \text{ k}\Omega$ 时的相图 (a),(d) $R_1 = 2.3 \text{ k}\Omega$; (b),(e) $R_1 = 2.524 \text{ k}\Omega$; (c),(f) $R_1 = 2.6 \text{ k}\Omega$

用,合并形成一个扩大了混沌吸引子,包含了原先的两个混沌的结构(见图 16(a),(b)). 此混沌吸引子的结构随着 R_1 的变化而产生变化(见图 16

(c),(d)),在 $R_1 = 3.3271 \text{ k}\Omega$ 时突然失稳,导致向量场无解.

从图 16 给出的时间历程中容易发现 $R_2 = 2.68$

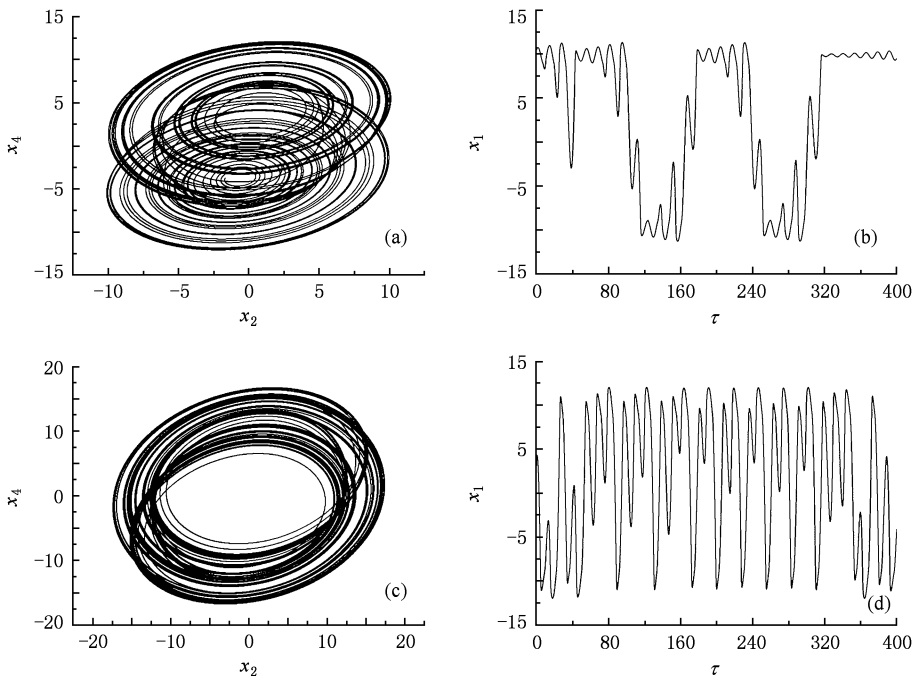


图 16 $R_2 = 0.18 \text{ k}\Omega$ 时的相图和时间历程 (a),(b) $R_1 = 2.68 \text{ k}\Omega$; (c),(d) $R_1 = 3.2 \text{ k}\Omega$

$k\Omega$ 时, 轨迹大多时候围绕着原先的混沌吸引子运动, 而 $R_2 = 3.2 k\Omega$ 时, 则较为频繁地在两个子吸引子之间来回运动, 这说明随着 R_1 的增加, 两个子混沌吸引子之间的相互作用增强了.

4. 结 论

对这样一个电流具有分段线性性质的四阶非

线性电路, 由于不同类型的平衡点共存, 因此导致了不同的通向复杂行为的演化过程, 经过倍周期分岔得到不同的混沌吸引子结构. 具有对称特征的吸引子经分岔产生的混沌仍具有对称性质. 而相互对称的两个周期解各自经过连续的倍周期分岔得到相互对称的混沌吸引子, 其分岔的过程步调保持一致. 这两个混沌吸引子可相互合并成一个扩大了混沌吸引子.

-
- [1] Liu F C, Zang X F, Song J Q 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3765 (in Chinese) [刘福才、臧秀凤、宋佳秋 2009 物理学报 **58** 3765]
- [2] Liu M H, Feng J C 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4457 (in Chinese) [刘明华、冯久超 2009 物理学报 **58** 4457]
- [3] Li Y N, Chen L, Cai Z S, Zhao X Z 2004 *Chaos, Solitons & Fractals* **22** 767
- [4] Yu P 1997 *ASME J. Appl. Mech* **64** 957
- [5] Bi Q S 2007 *Phys. Lett. A* **369** 418
- [6] Cang S J, Chen Z Q, Yuan Z Z 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1493 (in Chinese) [仓诗建、陈增强、袁著祉 2008 物理学报 **57** 1493]
- [7] Zhang H, Ma X K, Xue B L, Liu W Z 2005 *Chaos, Solitons & Fractals* **23** 431
- [8] Chen Z Y, Zhang X F, Bi Q S 2008 *Nonlin. Analysis: Real World Appl.* **9** 1158
- [9] Bi Q S 2004 *Int. J. Non-linear Mech.* **39** 33
- [10] Koliopoulos C L, Kyprianidis I M, Stouboulos I N, Anagnostopoulos A N, Magafas L 2003 *Chaos, Solitons & Fractals* **16** 173
- [11] Stouboulos I N, Miliou A N, Valaristos A P, Kyprianidis I M, Anagnostopoulos A N 2007 *Chaos, Solitons & Fractals* **33** 1256
- [12] Karagiannopoulos C G 2007 *Journal of Electrostatics* **65** 535

Evolution from regular movement patterns to chaotic attractors in a nonlinear electrical circuit *

Zhang Xiao-Fang[†] Chen Zhang-Yao Bi Qin-Sheng

(*Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang, Jiangsu 212013, China*)

(Received 30 July 2009; revised manuscript received 8 September 2009)

Abstract

For a fourth-order autonomous nonlinear electric circuit, we present two evolution patterns to complexity associated with the three coexisting equilibrium points. In the first pattern, stable periodic movement with symmetric structure can be observed by Hopf bifurcation from the unstable equilibrium point, which may lead to chaos via cascading of period-doubling bifurcations. All the attractors, including the chaos, keep the symmetric property. While in the second evolution pattern, two limit cycles symmetric to each other may occur via Hopf bifurcations from the other two stable equilibrium points, which may also lead to two chaotic attractors, respectively. Comparing with the two evolution procedures associated with the two stable equilibrium points, not only the bifurcations keep the same pace, but also the attractors including the two final chaotic attractors are still symmetric to each other. With further variation of the parameters, the two chaotic attractors may interact with each other to form another enlarged chaotic attractor, which is qualitatively equivalent to the chaos in the first evolution pattern.

Keywords: nonlinear electric circuit, transition boundary, bifurcation, chaos

PACC: 0545, 0547

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10872080).

[†] E-mail: xfzhang@ujs.edu.cn