第 59 卷 第 5 期 2010 年 5 月
1000-3290/2010/59(05)/3130-06
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol. 59, No. 5, May, 2010

具有整体代对称性的左右对称模型中的中微子质量*

张 峰[1)2)] 张春旭[1)] 黄明球[1)†]
1)(国防科学技术大学理学院物理系,长沙 410073)
2)(炮兵学院基础实验中心,合肥 230031)
(2009 年 2 月 21 日收到;2009 年 9 月 3 日收到修改稿)

本文基于具有整体 $U(1)$ 代对称性的 $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$ 模型推导了轻子的味混合矩阵,对中微子的质量问题进行了研究. 在本文的模型中,产生轻子 Dirac 质量的汤川耦合拉格朗日密度具有整体 $U(1)$ 代对称性,所以,模型中的带电轻子质量矩阵和中微子 Dirac 质量矩阵是 Fritzsch 形式的. 但是,中微子除了具有 Dirac 质量,一般还具有 Majorana 质量,在这种一般情况下,轻中微子的有效质量矩阵就不再是 Fritzsch 形式的. 为了不去处理非厄米矩阵的对角化问题,我们假设中微子 Majorana 质量矩阵的相位满足一定的关系,从而把问题简化为对一个实对称矩阵的对角化. 然后,得到了轻子的味混合矩阵,并且结合中微子混合的实验数据,对本文中得到的一系列关系式进行了数值计算,结果显示,本文中考虑的模型可能无法与现在的中微子混合实验数据相符合.

关键词: 中微子质量, 轻子味混合矩阵, 左右对称模型, 代对称性
PACC: 1460G, 1310, 1210B, 1130

1. 引 言

在实验证实中微子具有质量以后,对于中微子质量的研究就一直是物理学研究的热点之一[1]. Xing[2]假设带电轻子和中微子都具有 Fritzsch 形式的质量矩阵,对中微子质量做了研究. 但是,正如作者在文献[2]中所说,这只是一种唯象的假设. 事实上,在加上代对称性或者分离对称性的 $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$ 模型中,带电轻子的质量矩阵和中微子的 Dirac 质量矩阵是具有 Fritzsch 形式的,但是如果中微子还具有 Majorana 质量,那么轻中微子的有效质量矩阵将不再是 Fritzsch 形式的. Fukugita 等[3]考虑了这一点,但是作者在文献[3]中假设三代中微子具有相同的 Majorana 质量,从而使轻中微子的有效质量矩阵实际上是由具有 Fritzsch 形式的中微子 Dirac 质量矩阵来决定的. 在本文中,我们不假设三代中微子具有相同的 Majorana 质量,而是考虑一般的情况,这样轻中微子的有效质量矩阵就不再是 Fritzsch 形式的. 为了不去处理非厄米矩阵的对角化问题,在本文中将对中微子 Majorana 质量矩阵的相位作特定的假设,从而把问题简化为对一个实对称矩阵的对角化. 但是,由于中微子 Majorana 质量矩阵的相位对中微子-中微子振荡和反中微子-反中微子振荡都没有影响,所以这一处理不会对本文结论的普遍性产生影响.

2. 轻子味混合矩阵

假设 $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$ 模型中产生轻子 Dirac 质量的汤川耦合拉格朗日密度具有整体 $U(1)$ 代对称性:

$$\begin{pmatrix}\nu_e\\ e\end{pmatrix}_L \to e^{i\frac{5}{2}\alpha}\begin{pmatrix}\nu_e\\ e\end{pmatrix}_L,\ \begin{pmatrix}\nu_e\\ e\end{pmatrix}_R \to e^{-i\frac{5}{2}\alpha}\begin{pmatrix}\nu_e\\ e\end{pmatrix}_R,$$
$$\begin{pmatrix}\nu_\mu\\ \mu\end{pmatrix}_L \to e^{-i\frac{3}{2}\alpha}\begin{pmatrix}\nu_\mu\\ \mu\end{pmatrix}_L,\ \begin{pmatrix}\nu_\mu\\ \mu\end{pmatrix}_R \to e^{i\frac{3}{2}\alpha}\begin{pmatrix}\nu_\mu\\ \mu\end{pmatrix}_R,$$
$$\begin{pmatrix}\nu_\tau\\ \tau\end{pmatrix}_L \to e^{i\frac{1}{2}\alpha}\begin{pmatrix}\nu_\tau\\ \tau\end{pmatrix}_L,\ \begin{pmatrix}\nu_\tau\\ \tau\end{pmatrix}_R \to e^{-i\frac{1}{2}\alpha}\begin{pmatrix}\nu_\tau\\ \tau\end{pmatrix}_R,$$
$$\phi \to e^{i\alpha}\phi. \tag{1}$$

在这种对称性下,产生轻子 Dirac 质量的汤川耦合拉格朗日密度为

$$L_D = g_1\,\overline{(\nu_e\quad e)_L}\,\phi\begin{pmatrix}\nu_\mu\\ \mu\end{pmatrix}_R + g_1^*\,\overline{(\nu_\mu\quad \mu)_L}\,\phi\begin{pmatrix}\nu_e\\ e\end{pmatrix}_R$$

* 国家自然科学基金(批准号:10975184)资助的课题.
† 通讯联系人. E-mail: mqhuang@nudt.edu.cn

$$+ g_2 \overline{(\upsilon_\mu \quad \mu)_L} \tilde{\phi} \begin{pmatrix} \upsilon_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_R + g_2^* \overline{(\upsilon_\tau \quad \tau)_L} \tilde{\phi} \begin{pmatrix} \upsilon_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_R$$

$$+ g_3 \overline{(\upsilon_\tau \quad \tau)_L} \phi \begin{pmatrix} \upsilon_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_R + \text{h. c.} . \tag{2}$$

另外,产生轻子 Majorana 质量的汤川耦合拉格朗日密度为

$$\begin{aligned} L_M = &- ih_1 \left((\upsilon_{eL}^T \quad e_L^T) C\tau_2 \Delta_L \begin{pmatrix} \upsilon_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \right. \\ &\left. + (\upsilon_{eR}^T \quad e_R^T) C\tau_2 \Delta_R \begin{pmatrix} \upsilon_{eR} \\ e_R \end{pmatrix} \right) \\ &- ih_2 \left((\upsilon_{\mu L}^T \quad \mu_L^T) C\tau_2 \Delta_L \begin{pmatrix} \upsilon_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix} \right. \\ &\left. + (\upsilon_{\mu R}^T \quad \mu_R^T) C\tau_2 \Delta_R \begin{pmatrix} \upsilon_{\mu R} \\ \mu_R \end{pmatrix} \right) \\ &- ih_3 \left((\upsilon_{\tau L}^T \quad \tau_L^T) C\tau_2 \Delta_L \begin{pmatrix} \upsilon_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix} \right. \\ &\left. + (\upsilon_{\tau R}^T \quad \tau_R^T) C\tau_2 \Delta_R \begin{pmatrix} \upsilon_{\tau R} \\ \tau_R \end{pmatrix} \right) \\ &+ \text{h. c.} , \end{aligned} \tag{3}$$

其中,$\tilde{\phi} = \tau_2 \phi^* \tau_2$,$C$ 是 Dirac 电荷共轭矩阵. 需要说明的是,我们并不要求这一部分拉格朗日密度具有整体 $U(1)$ 代对称性.

取 Higgs 场的真空平均值为

$$\langle \phi \rangle_0 = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix},$$

$$\langle \tilde{\phi} \rangle_0 = \tau_2 \langle \phi \rangle_0^* \tau_2 = \begin{pmatrix} u_2 & 0 \\ 0 & u_1 \end{pmatrix},$$

$$\langle \Delta_L \rangle_0 = 0, \quad \langle \Delta_R \rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_R & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

这里,取 u_1, u_2, v_R, g_3 都为正的实数, g_1, g_2, h_1, h_2, h_3 则一般为复数. 由(2)式至(4)式可以得到

$$\begin{aligned} L = &g_1 u_2 \overline{e_L} \mu_R + g_1^* u_2 \overline{\mu_L} e_R + g_2 u_1 \overline{\mu_L} \tau_R \\ &+ g_2^* u_1 \overline{\tau_L} \mu_R + g_3 u_2 \overline{\tau_L} \tau_R \\ &+ g_1 u_1 \overline{\upsilon_{eL}} \upsilon_{\mu R} + g_1^* u_1 \overline{\upsilon_{\mu L}} \upsilon_{eR} + g_2 u_2 \overline{\upsilon_{\mu L}} \upsilon_{\tau R} \\ &+ g_2^* u_2 \overline{\upsilon_{\tau L}} \upsilon_{\mu R} + g_3 u_1 \overline{\upsilon_{\tau L}} \upsilon_{\tau R} \\ &- h_1 v_R \overline{\upsilon_{eR}^c} \upsilon_{eR} - h_2 v_R \overline{\upsilon_{\mu R}^c} \upsilon_{\mu R} - h_3 v_R \overline{\upsilon_{\tau R}^c} \upsilon_{\tau R} \\ &+ \text{h. c.} . \end{aligned} \tag{5}$$

令 $\upsilon \equiv \upsilon_L$ 代表左手中微子,$N \equiv \upsilon_R^c$ 代表右手中微子的反粒子. 利用 $C^{-1} = C^+ = C^T = -C, C\gamma^\mu C = -\gamma^{\mu T}$ 可以得到

$$\begin{aligned} L = &g_1 u_2 \overline{e_L} \mu_R + g_1^* u_2 \overline{\mu_L} e_R + g_2 u_1 \overline{\mu_L} \tau_R \\ &+ g_2^* u_1 \overline{\tau_L} \mu_R + g_3 u_2 \overline{\tau_L} \tau_R \\ &+ g_1^* u_1 N_\mu^T C \upsilon_e + g_1 u_1 N_e^T C \upsilon_\mu \\ &+ g_2^* u_2 N_\tau^T C \upsilon_\mu + g_2 u_2 N_\mu^T C \upsilon_\tau + g_3 u_1 N_\tau^T C \upsilon_\tau \\ &- h_1 v_R N_e^T C N_e - h_2 v_R N_\mu^T C N_\mu - h_3 v_R N_\tau^T C N_\tau \\ &+ \text{h. c.} . \end{aligned} \tag{6}$$

把它写成质量矩阵的形式

$$\begin{aligned} L = &(\overline{e_L} \quad \overline{\mu_L} \quad \overline{\tau_L}) M_l \begin{pmatrix} e_R \\ \mu_R \\ \tau_R \end{pmatrix} \\ &+ (\upsilon_e^T \quad \upsilon_\mu^T \quad \upsilon_\tau^T \quad N_e^T \quad N_\mu^T \quad N_\tau^T) \\ &\times \begin{pmatrix} 0 & M_D^T \\ M_D & -M_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\upsilon_e \\ C\upsilon_\mu \\ C\upsilon_\tau \\ CN_e \\ CN_\mu \\ CN_\tau \end{pmatrix} + \text{h. c.} , \end{aligned} \tag{7}$$

这里

$$M_l = \begin{pmatrix} 0 & g_1 u_2 & 0 \\ g_1^* u_2 & 0 & g_2 u_1 \\ 0 & g_2^* u_1 & g_3 u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A_l & 0 \\ A_l^* & 0 & B_l \\ 0 & B_l^* & C_l \end{pmatrix} \tag{8}$$

代表带电轻子质量矩阵;

$$M_D = \begin{pmatrix} 0 & \frac{g_1 u_1}{2} & 0 \\ \frac{g_1^* u_1}{2} & 0 & \frac{g_2 u_2}{2} \\ 0 & \frac{g_2^* u_2}{2} & \frac{g_3 u_1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A_D & 0 \\ A_D^* & 0 & B_D \\ 0 & B_D^* & C_D \end{pmatrix} \tag{9}$$

代表中微子 Dirac 质量矩阵;

$$M_M = \begin{pmatrix} h_1 v_R & 0 & 0 \\ 0 & h_2 v_R & 0 \\ 0 & 0 & h_3 v_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta'_1 & 0 & 0 \\ 0 & \eta'_2 & 0 \\ 0 & 0 & \eta'_3 \end{pmatrix} \tag{10}$$

代表中微子 Majorana 质量矩阵.

值得注意的是,这里的 C_l, C_D 都是正的实数,而 $A_l, B_l, A_D, B_D, \eta'_1, \eta'_2, \eta'_3$ 则为复数.

当 $M_M \gg M_D$ 时,

$$M_v = M_D^T M_M^{-1} M_D = \begin{pmatrix} \frac{(A_D^*)^2}{\eta'_2} & 0 & \frac{A_D^* B_D}{\eta'_2} \\ 0 & \frac{(A_D)^2}{\eta'_1} + \frac{(B_D^*)^2}{\eta'_3} & \frac{B_D^* C_D}{\eta'_3} \\ \frac{A_D^* B_D}{\eta'_2} & \frac{B_D^* C_D}{\eta'_3} & \frac{(B_D)^2}{\eta'_2} + \frac{(C_D)^2}{\eta'_3} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

其中，M_v 代表轻中微子的有效质量矩阵. 可以看到 M_l 是 Fritzsch 形式的，但是 M_v 却不是.

M_l，M_v 可以表示成下面的形式：

$$\begin{aligned} M_l &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi_l} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i(\varphi_l+\delta_l)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & |A_l| & 0 \\ |A_l| & 0 & |B_l| \\ 0 & |B_l| & C_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_l} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i(\varphi_l+\delta_l)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi_l} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i(\varphi_l+\delta_l)} \end{pmatrix} \overline{M_l} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_l} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i(\varphi_l+\delta_l)} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{12}$$

其中，$\varphi_l = \arg A_l$，$\delta_l = \arg B_l$；

$$\begin{aligned} M_v = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi_D} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i(\varphi_D+\delta_D)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & |A_D| & 0 \\ |A_D| & 0 & |B_D| \\ 0 & |B_D| & C_D \end{pmatrix} \\ & \times \begin{pmatrix} (\eta'_1)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (\eta'_2 e^{-2i\varphi_D})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & (\eta'_3 e^{-2i(\varphi_D+\delta_D)})^{-1} \end{pmatrix} \\ & \times \begin{pmatrix} 0 & |A_D| & 0 \\ |A_D| & 0 & |B_D| \\ 0 & |B_D| & C_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi_D} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i(\varphi_D+\delta_D)} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{13}$$

其中，$\varphi_D = \arg A_D^*$，$\delta_D = \arg B_D^*$.

这里，η'_1，$\eta'_2 e^{-2i\varphi_D}$，$\eta'_3 e^{-2i(\varphi_D+\delta_D)}$ 不能通过调节右手中微子的反粒子场 N 的相位而全部变成实数，这体现了 PMNS 矩阵与 CKM 矩阵的区别.

对中微子 Majorana 质量矩阵的相位作如下假设：

$$\begin{aligned} &\arg\eta'_1 \approx 2m\pi, \arg\eta'_2 \approx 2\varphi_D + 2m\pi, \\ &\arg\eta'_3 \approx 2(\varphi_D + \delta_D) + 2m\pi, \end{aligned} \tag{14}$$

其中，$m = 0,1,2,3,\cdots$. 在这种相位关系下有

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\,\eta'_1 \gg \mathrm{Im}\,\eta'_1,\ \mathrm{Re}\,\eta'_2 e^{-2i\varphi_D} \gg \mathrm{Im}\,\eta'_2 e^{-2i\varphi_D}, \\ &\mathrm{Re}\,\eta'_3 e^{-2i(\varphi_D+\delta_D)} \gg \mathrm{Im}\,\eta'_3 e^{-2i(\varphi_D+\delta_D)}. \end{aligned} \tag{15}$$

这样就可以只保留其实部，从而得到

$$\begin{aligned} M_v = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi_D} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i(\varphi_D+\delta_D)} \end{pmatrix} \\ & \times \begin{pmatrix} |A_D|^2\eta_2^{-1} & 0 & |A_D||B_D|\eta_2^{-1} \\ 0 & |A_D|^2\eta_1^{-1} + |B_D|^2\eta_3^{-1} & |B_D| C_D\eta_3^{-1} \\ |A_D||B_D|\eta_2^{-1} & |B_D| C_D\eta_3^{-1} & |B_D|^2\eta_2^{-1} + (C_D)^2\eta_3^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
\times\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & e^{-i\varphi_D} & 0\\ 0 & 0 & e^{-i(\varphi_D+\delta_D)}\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & e^{-i\varphi_D} & 0\\ 0 & 0 & e^{-i(\varphi_D+\delta_D)}\end{pmatrix}\overline{M_v}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & e^{-i\varphi_D} & 0\\ 0 & 0 & e^{-i(\varphi_D+\delta_D)}\end{pmatrix}, \tag{16}
$$

其中，$\eta_1 = \mathrm{Re}\,\eta'_1, \eta_2 = \mathrm{Re}\,\eta'_2 e^{-2i\varphi_D}, \eta_3 = \mathrm{Re}\,\eta'_3 e^{-2i(\varphi_D+\delta_D)}$.

实对称矩阵 $\overline{M_l}, \overline{M_v}$ 可以利用幺正矩阵对角化

$$
U_l^{\mathrm{T}}\,\overline{M_l}U_l = \begin{pmatrix} m_e & 0 & 0\\ 0 & m_\mu & 0\\ 0 & 0 & m_\tau\end{pmatrix}, \tag{17}
$$

$$
U_v^{\mathrm{T}}\,\overline{M_v}U_v = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0\\ 0 & m_2 & 0\\ 0 & 0 & m_3\end{pmatrix}, \tag{18}
$$

这里 $m_e, m_\mu, m_\tau; m_1, m_2, m_3$ 分别代表三代带电轻子和三代中微子的质量.

对于 U_l，利用三次方程根与系数的关系可以得到下面的关系[2,3]：

$$
U_l(1,1) = \sqrt{\frac{m_e m_\tau(m_\tau - m_\mu)}{(m_\mu + m_e)(m_\tau - m_\mu + m_e)(m_\tau - m_e)}},
$$

$$
U_l(1,2) = -i\sqrt{\frac{m_e m_\tau(m_\tau + m_e)}{(m_\mu + m_e)(m_\tau - m_\mu + m_e)(m_\tau + m_\mu)}}
$$

$$
U_l(1,3) = \sqrt{\frac{m_e m_\mu(m_\mu - m_e)}{(m_\tau - m_e)(m_\tau - m_\mu + m_e)(m_\tau + m_\mu)}},
$$

$$
U_l(2,1) = \sqrt{\frac{m_e(m_\tau - m_\mu)}{(m_\mu + m_e)(m_\tau - m_e)}},
$$

$$
U_l(2,2) = i\sqrt{\frac{m_\mu(m_\tau + m_e)}{(m_\mu + m_e)(m_\tau + m_\mu)}},
$$

$$
U_l(2,3) = \sqrt{\frac{m_\tau(m_\mu - m_e)}{(m_\tau + m_\mu)(m_\tau - m_e)}},
$$

$$
U_l(3,1) = -\sqrt{\frac{m_e(m_\mu - m_e)(m_\tau + m_e)}{(m_\tau - m_e)(m_\tau - m_\mu + m_e)(m_\mu + m_e)}},
$$

$$
U_l(3,2) = -i\sqrt{\frac{m_\mu(m_\mu - m_e)(m_\tau - m_\mu)}{(m_\tau + m_\mu)(m_\tau - m_\mu + m_e)(m_\mu + m_e)}},
$$

$$
U_l(3,3) = \sqrt{\frac{m_\tau(m_\tau + m_e)(m_\tau - m_\mu)}{(m_\tau + m_\mu)(m_\tau - m_\mu + m_e)(m_\tau - m_e)}}, \tag{19}
$$

U_l 的第二列是虚数，这是为了使 m_2 为正数.

在得到 U_v 之前，可以先得到下面的关系：

$$
\begin{aligned}
U'_v(1,1) &= |A_D|^3|B_D|\eta_1^{-1}\eta_2^{-1} + |A_D||B_D|^3\eta_2^{-1}\eta_3^{-1} - |A_D||B_D|\eta_2^{-1}m_1,\\
U'_v(1,2) &= |A_D|^3|B_D|\eta_1^{-1}\eta_2^{-1} + |A_D||B_D|^3\eta_2^{-1}\eta_3^{-1} - |A_D||B_D|\eta_2^{-1}m_2,\\
U'_v(1,3) &= |A_D|^3|B_D|\eta_1^{-1}\eta_2^{-1} + |A_D||B_D|^3\eta_2^{-1}\eta_3^{-1} - |A_D||B_D|\eta_2^{-1}m_3,\\
U'_v(2,1) &= |A_D|^2|B_D|C_D\eta_2^{-1}\eta_3^{-1} - |B_D|C_D\eta_3^{-1}m_1,\\
U'_v(2,2) &= |A_D|^2|B_D|C_D\eta_2^{-1}\eta_3^{-1} - |B_D|C_D\eta_3^{-1}m_2,\\
U'_v(2,3) &= |A_D|^2|B_D|C_D\eta_2^{-1}\eta_3^{-1} - |B_D|C_D\eta_3^{-1}m_3,\\
U'_v(3,1) &= -(|A_D|^4\eta_1^{-1}\eta_2^{-1} + |A_D|^2|B_D|^2\eta_2^{-1}\eta_3^{-1} - |A_D|^2\eta_1^{-1}m_1 - |A_D|^2\eta_2^{-1}m_1 - |B_v|^2\eta_3^{-1}m_1 + m_1^2),\\
U'_v(3,2) &= -(|A_D|^4\eta_1^{-1}\eta_2^{-1} + |A_D|^2|B_D|^2\eta_2^{-1}\eta_3^{-1} - |A_D|^2\eta_1^{-1}m_2 - |A_D|^2\eta_2^{-1}m_2 - |B_D|^2\eta_3^{-1}m_2 + m_2^2),\\
U'_v(3,3) &= -(|A_D|^4\eta_1^{-1}\eta_2^{-1} + |A_D|^2|B_D|^2\eta_2^{-1}\eta_3^{-1} - |A_D|^2\eta_1^{-1}m_3 - |A_D|^2\eta_2^{-1}m_3 - |B_v|^2\eta_3^{-1}m_3 + m_3^2).
\end{aligned} \tag{20}
$$

定义

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \sqrt{U'^2_v(1,1) + U'^2_v(2,1) + U'^2_v(3,1)},\\
E_2 &= \sqrt{U'^2_v(1,2) + U'^2_v(2,2) + U'^2_v(3,2)},\\
E_3 &= \sqrt{U'^2_v(1,3) + U'^2_v(2,3) + U'^2_v(3,3)},
\end{aligned} \tag{21}
$$

它们是归一化系数.

这样, U_v 为

$$
\begin{aligned}
U_v(1,1) &= \frac{1}{E_1}U'_v(1,1),\\
U_v(1,2) &= \frac{1}{E_2}U'_v(1,2),\\
U_v(1,3) &= \frac{1}{E_3}U'_v(1,3),\\
U_v(2,1) &= \frac{1}{E_1}U'_v(2,1),\\
U_v(2,2) &= \frac{1}{E_2}U'_v(2,2),\\
U_v(2,3) &= \frac{1}{E_3}U'_v(2,3),\\
U_v(3,1) &= \frac{1}{E_1}U'_v(3,1),\\
U_v(3,2) &= \frac{1}{E_2}U'_v(3,2),\\
U_v(3,3) &= \frac{1}{E_3}U'_v(3,3).
\end{aligned}
\tag{22}
$$

另外, $|A_D|$, $|B_D|$, C_D, η_1^{-1}, η_2^{-1}, η_3^{-1}, m_1, m_2, m_3 并不是完全独立的,而是有下列关系:

$$
\begin{aligned}
&|A_D|^2\eta_1^{-1} + |A_D|^2\eta_2^{-1} + |B_D|^2\eta_2^{-1}\\
&+ |B_D|^2\eta_3^{-1} + (C_D)^2\eta_3^{-1} = m_1 + m_2 + m_3,\\
&(|A_D|^4 + |A_D|^2|B_D|^2)\eta_1^{-1}\eta_2^{-1}\\
&+ |A_D|^2(C_D)^2\eta_1^{-1}\eta_3^{-1}\\
&+ (|A_D|^2|B_D|^2 + |A_D|^2(C_D)^2\\
&+ |B_D|^4)\eta_2^{-1}\eta_3^{-1}\\
&= m_1m_2 + m_2m_3 + m_1m_3,\\
&|A_D|^4(C_D)^2\eta_1^{-1}\eta_2^{-1}\eta_3^{-1} = m_1m_2m_3.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

原则上讲,可以通过求解方程组(23)用 $|A_D|$, $|B_D|$, C_D, m_1, m_2, m_3 来表示 η_1^{-1}, η_2^{-1}, η_3^{-1},也就是说,在 U_v 中有 6 个自由参数.

轻子的味混合矩阵为

$$
\begin{aligned}
V &= \begin{pmatrix} V_{e1} & V_{e2} & V_{e3}\\ V_{\mu1} & V_{\mu2} & V_{\mu3}\\ V_{\tau1} & V_{\tau2} & V_{\tau3}\end{pmatrix}\\
&= U_l^{\mathrm T}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & e^{i(\varphi_l+\varphi_D)} & 0\\ 0 & 0 & e^{i(\varphi_l+\delta_l+\varphi_D+\delta_D)}\end{pmatrix}U_v\\
&= U_l^{\mathrm T}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & e^{i\beta} & 0\\ 0 & 0 & e^{i\gamma}\end{pmatrix}U_v,
\end{aligned}
\tag{24}
$$

其中, $\beta = \varphi_l + \varphi_D$, $\gamma = \varphi_l + \delta_l + \varphi_D + \delta_D$. 因为带电轻子的质量在实验上已经被测定的比较精确,所以,我们认为 U_l 中的参数是确定的,而不是自由的. 这样, V 中的自由参数有 8 个.

为了与已有的实验数据相符合,模型中的参数需要满足下列关系[2—4]:

$$
\begin{aligned}
\Delta m_{21}^2 &= m_2^2 - m_1^2,\\
\Delta m_{32}^2 &= m_3^2 - m_2^2,\\
\sin^2 2\theta_{12} &= 4|V_{e1}|^2|V_{e2}|^2,\\
\sin^2 2\theta_{23} &= 4|V_{\mu3}|^2(1 - |V_{\mu3}|^2),\\
\sin^2 2\theta_{13} &= 4|V_{e3}|^2(1 - |V_{e3}|^2).
\end{aligned}
\tag{25}
$$

3. 数值计算

带电轻子的质量为

$$
\begin{aligned}
&m_e = 0.51\ \mathrm{MeV}, m_\mu = 105.66\ \mathrm{MeV},\\
&m_\tau = 1776.99\ \mathrm{MeV}.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

由此可以得到 U_l 的具体形式

$$
U_l = \begin{pmatrix} 0.997586 & -0.0694303i & 0.00100666\\ 0.0672257 & 0.969336i & 0.236364\\ -0.0173867 & -0.235726i & 0.971664\end{pmatrix}.
\tag{27}
$$

另外,还能得到

$$
\begin{aligned}
|A_l| &\approx \sqrt{m_e m_\mu} = 7.34075\ \mathrm{MeV},\\
|B_l| &\approx \sqrt{m_\mu m_\tau} = 433.309\ \mathrm{MeV},\\
C_l &\approx m_\tau = 1776.99\ \mathrm{MeV}.
\end{aligned}
\tag{28}
$$

令 Higgs 场 ϕ 的真空平均值的两个分量之间的关系为 $u_1 = nu_2$, n 为非负实数,则有

$$
\begin{aligned}
|A_D| &= \frac{n|A_l|}{2} = 3.67037\ \mathrm{nMeV},\\
|B_D| &= \frac{|B_l|}{2n} = \frac{216.655}{n}\ \mathrm{MeV},\\
C_D &= \frac{nC_l}{2} = 888.495\ \mathrm{nMeV}.
\end{aligned}
\tag{29}
$$

可以看到 $|A_D|$, $|B_D|$, C_D 其实并不是 3 个独立的自由变量,所以, V 中的自由参数实际上只有 6 个.

中微子混合的实验数据为[4]

$$
\begin{aligned}
7.7\times10^{-5}\ \mathrm{eV}^2 \leqslant \Delta m_{21}^2 &\leqslant 8.4\times10^{-5}\ \mathrm{eV}^2,\\
1.9\times10^{-3}\ \mathrm{eV}^2 \leqslant \Delta m_{32}^2 &\leqslant 3.0\times10^{-3}\ \mathrm{eV}^2,\\
0.82 \leqslant \sin^2 2\theta_{12} &\leqslant 0.89,\\
\sin^2 2\theta_{23} &> 0.92,\\
\sin^2 2\theta_{13} &< 0.19,
\end{aligned}
\tag{30}
$$

这里，我们假设 $\Delta m_{32}^2>0$，即本文考虑的是 Normal Hierarchy 模型.

我们把 m_1, m_2, m_3 的取值范围分别定为 $[0.01—90]\times10^{-3}$ eV, $[0.01—90]\times10^{-2}$ eV, $[0.01—90]\times10^{-2}$ eV，把 $\eta_1^{-1}, \eta_2^{-1}, \eta_3^{-1}$ 的取值范围分别定为 $[0.001—90]\times10^{-5}$ $(\mathrm{GeV})^{-1}$, $[0.001—90]\times10^{-9}(\mathrm{GeV})^{-1}$, $[0.001—90]\times10^{-10}(\mathrm{GeV})^{-1}$，把（29）式中 n 的取值范围定为 $[0.01—90]$，以上这些变量在数值计算中采用变步长的方法进行处理. 对于（24）式中的 β 和 γ，我们把取值范围定为 $[0°—350°]$，步长取为 10°.

通过数值计算，我们发现没有一组取值能够既满足实验结果（30）式，同时又让方程组（23）式严格成立. 虽然在数值计算中我们没有让 $m_1, m_2, m_3, \eta_1^{-1}, \eta_2^{-1}, \eta_3^{-1}, n, \beta, \gamma$ 取到所有可能的值，而且 $\eta_1^{-1}, \eta_2^{-1}, \eta_3^{-1}, n$ 可能的取值范围本来应该是很宽的，但是我们发现在所有能满足实验结果（30）式的取值中，能使方程组（23）式最接近成立的一组取值是在我们考虑的取值范围的中间而不是边缘，这似乎说明即使进一步扩大取值范围可能也找不到一组数值能够既满足实验结果（30）式，同时又让方程组（23）式严格成立. 所以，我们认为本文中考虑的模型可能无法与现在的中微子混合实验数据相符合.

非常感谢国防科学技术大学物理系余同普、孟从森、李永强在编写程序和数值计算方面给予的巨大帮助.

[1] Huang X J, Wang Y J 2004 *Chin. Phys.* **13** 1588
[2] Xing Z Z 2002 *Phys. Lett. B* **550** 178
[3] Fukugita M, Tanimoto M, Yanagida T 2003 *Phys. Lett.* B **562** 273
[4] Yao W M, Particle Data Group 2006 *J. Phys.* G **33** 1

Neutrino masses in the left-right symmetry model with a family symmetry*

Zhang Feng[1)2)]　Zhang Chun-Xu[1)]　Huang Ming-Qiu[1)†]
1)(*Department of Physics, National University of Defense Technology, Changsha* 410073, *China*)
2)(*Experiment Centre, Artillery Academy, Hefei* 230031, *China*)
(Received 21 February 2009; revised manuscript received 3 September 2009)

Abstract

Based on the $SU(2)_L\times SU(2)_R\times U(1)$ model with an $U(1)$ family symmetry, we obtain the lepton flavor mixing matrix and research on the neutrino masses. In the model we consider, the Lagragian density which yields the Dirac masses for the leptons is $U(1)$ family invariant, so both the mass matrix for the charge leptons and the Dirac mass matrix for the neutrinos are of the Fritzsch-type. But, generally speaking, neutrinos may have also Majorana masses. In that situation, the effective mass matrix for the light neutrinos is no longer of the Fritzsch type. We make some assumptions on the phases of the neutrino Majorana mass matrix to avoid diagonalizing the non-hermitian matrix. Then, we obtain the lepton flavor mixing matrix. The numerical calculation which is based on the lepton flavor mixing matrix shows that the model we consider may not fit the present result of the neutrino mixing experiment.

Keywords: neutrino masses, lepton flavor mixing matrix, left-right symmetry, family symmetry
PACC: 1460G, 1310, 1210B, 1130

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10975184).
† Corresponding author. E-mail: mqhuang@nudt.edu.cn