

# 弯曲振动阶梯圆盘辐射阻抗的计算方法\*

贺西平<sup>†</sup>

(陕西师范大学应用声学研究所, 西安 710062)

(2009 年 7 月 28 日收到; 2009 年 8 月 20 日收到修改稿)

辐射阻抗是描述声学振动系统声转换效率的一个重要物理量. 具有强功率的阶梯圆盘辐射器在流体介质, 尤其是在空气中有着重要的应用. 但对阶梯圆盘的辐射阻抗而言, 运用传统理论计算时, 由于辐射面不在同一几何面, 积分上下限很难选取而无法计算. 本文从辐射声功率角度, 基于叠加原理, 提出了利用叠加法计算阶梯盘的辐射阻抗. 作为算例, 文中计算了带有一个阶梯的阶梯盘的辐射阻抗.

**关键词:** 阶梯圆盘, 辐射功率, 辐射阻抗, 叠加原理

**PACC:** 4330, 4390

## 1. 引 言

辐射阻抗是评价声振动系统声效率转换高低的一个重要参量<sup>[1,2]</sup>. 同时, 也是衡量一个振动系统好坏的一个声参数. 在工作频率、输入电功率等条件相同的情况下, 辐射阻大则说明辐射出去的声能量大, 自然辐射效率高, 反之则低. 辐射效率低会导致另一个缺点, 因能量辐射不出去, 与振动系统相连的换能器将内耗多余的能量, 这样会使换能器发热, 影响换能器的工作状态, 并将更加降低振动系统的辐射效率, 形成恶性循环, 也会降低换能器或振动系统的使用寿命. 因此, 计算各种形状振动系统辐射面的辐射阻抗, 如回转椭球体上的球冠或球环、带有法兰的管、有限长柱面等, 都引起了人们广泛的研究兴趣<sup>[3-8]</sup>. 活塞振动是振动面的一种最简单的振动形式了, 从文献[9-11]对矩形活塞、方形活塞辐射阻抗的计算可以看出, 该过程相当繁杂, 有时甚至不能得到解析解, 这时往往要借助于数值计算方法才能得到数值解.

薄圆盘作弯曲振动时, 因其辐射面积大, 利于在空气介质中产生高声强, 有着重要的应用<sup>[12-14]</sup>, 其辐射声波的频率可以在数百赫兹至数十千赫兹范围. 文献[15, 16]计算了置于无限大理想刚硬平面幕上的弯曲圆盘振动面的辐射阻抗. 薄圆盘弯振

时存有反相区, 不利于对指向性要求高的场合使用, 例如料位仪. 为改善其指向性, 可将圆盘表面设计成阶梯形式<sup>[12]</sup>, 即将位相相反的节线一侧区域凸起或下凹—高度为辐射介质中的  $1/2$  波长的阶梯, 从而避免了盘面振动节线两侧的相位相反引起的声场相消干涉. 那么, 究竟这类阶梯盘结构的辐射器的辐射阻(包括抗)为多少? 辐射阻抗与盘的几何尺寸之间具有怎样的关系, 怎样依据本身的几何尺寸来设计并提高之? 由于阶梯盘辐射面不在同一平面, 运用传统的积分方法计算其辐射阻抗将无法实现. 以前的文献也没有涉及过这个问题的计算. 本文从声功率辐射角度, 基于叠加原理, 提出了一种计算阶梯盘辐射阻抗的计算方法, 这种方法也可适用于在任何边界条件下的其他类似于阶梯盘的、有着复杂辐射面的辐射阻抗的计算, 最后本文给出了带有一个阶梯的阶梯盘辐射阻抗的计算例子.

## 2. 计算弯曲振动板辐射阻抗的一般方法

根据振动性质的不同, 计算辐射阻抗的方法可分为两种: 对于集中参数系统来讲, 例如活塞, 由于其辐射面振动速度均匀分布, 其辐射阻抗可定义为整个活塞辐射面所克服声场作用力除以活塞振动速度; 另一类是分布参数系统, 例如弯曲振动圆盘,

\* 国家自然科学基金(批准号:10874107)和陕西省自然科学基金(批准号:2007A07)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: Hexiping@snnu.edu.cn

其振动速度分布不均匀. 这类辐射阻抗可从声功率与电功率类比出发而得出: 若辐射器表面  $(r, \varphi)$  处, 速度复数振动幅值为  $U(r, \varphi)$ , 声压振动幅值为  $p(r, \varphi)$ , 则在  $(r, \varphi)$  点附近微分面元  $ds$  振动时提供给声场的复数声功率为

$$dW = P(r, \varphi) U^*(r, \varphi) ds,$$

整个辐射面的声功率为

$$W = \iint_s P(r, \varphi) U^*(r, \varphi) ds,$$

则辐射阻抗

$$Z = \frac{W}{u_R u_R^*} = \frac{1}{u_R u_R^*} \iint_s P(r, \varphi) U^*(r, \varphi) ds, \quad (1)$$

这里的  $u_R$  为盘上一点的参考振速, 例如盘中心点的振速, 或者盘上的平均振速可选作为参考点. 计算阶梯盘的辐射阻抗当然只能用第二种方法.

假设阶梯盘分成无限多个小面元, 如图 1(a) 所示. 小面元  $ds$  在面元  $ds'$  处产生的声压为

$$dp = j \frac{k \rho_0 c_0}{2\pi h} u_a \exp(-jkl) ds,$$

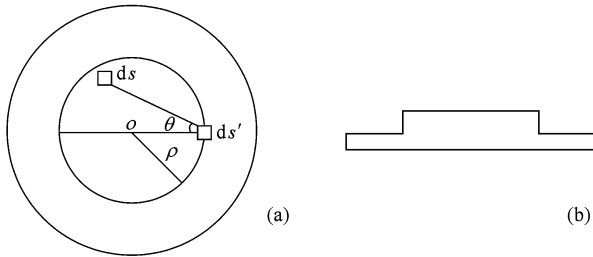


图1 阶梯盘图 (a) 积分示意图; (b) 截面图

$l$  为  $ds$  与  $ds'$  之间的距离,  $k$  为波数,  $\rho_0, c_0$  分别为空气密度和声速,  $u_a$  为振动速度幅值. 整个阶梯盘在面元  $ds'$  产生的声压为

$$p = \int dp = \iint_s j \frac{k \rho_0 c_0}{2\pi l} u_a \exp(-jkl) ds, \quad (2)$$

面元  $ds'$  产生的辐射声功率为

$$dW = pu_a ds' = \iint_s j \frac{k r_0 c_0}{2\pi l} u_a^2 \exp(-jkl) ds ds',$$

则整个阶梯盘所辐射的声功率为

$$W = \int dW = \iint_s \iint_{s'} j \frac{k r_0 c_0}{2\pi l} u_a^2 \exp(-jkl) ds \iint_{s'} ds'. \quad (3)$$

由(1)式和(3)式, 辐射阻抗应为

$$Z = \frac{W}{u_R u_R^*}. \quad (4)$$

阶梯辐射面不在同一平面, 上式中积分上下限无法

选取, 辐射阻抗将无法计算.

### 3. 均质平圆盘辐射阻抗的计算

弯曲振动的均质平圆盘上任一点的位移为  $y(\rho, t) = [AJ_0(k_n \rho) + BI_0(k_n \rho)] \exp(j\omega t)$ , (5) 式中,  $J_0, I_0$  为第一类零阶和第一类零阶修正贝塞尔函数,  $\rho, h, \omega, E, \sigma$  分别为圆盘材料的密度(考虑为各向同性的理想弹性介质)、厚度、角频率、杨氏模量、泊松比,  $A, B$  为待定系数, 可由边界条件求出.

这里,  $k_n^4 = \frac{\rho_v h \omega^2}{D}$  为均质圆盘作  $n$  阶弯曲振动振动模式时对应的波数, 刚度  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}$ .

选择圆盘中心点处的振速  $u|_{\rho=0}$  为参考振速  $u_R$ , 则由(1)式可得到该均质平圆盘的辐射阻抗

$Z' = \pi \rho_0 c_0 a^2 (R' + jX')$ , 这里,

$$R' = \frac{2}{\left(1 + \frac{B}{A}\right)^2 a^2} \int_0^a \left[ J_0(k_n \rho) + \frac{B}{A} I_0(k_n \rho) \right]^2 \times [1 - J_0(2k\rho)] \rho d\rho, \quad (6)$$

$$X' = \frac{2}{\left(1 + \frac{B}{A}\right)^2 a^2} \int_0^a \left[ J_0(k_n \rho) + \frac{B}{A} I_0(k_n \rho) \right]^2 H_0(2k\rho) \rho d\rho, \quad (7)$$

$H_0(2k\rho)$  称为零阶斯特鲁夫(Struve)函数,  $H_0(2k\rho) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2k\rho \cos\theta) d\theta$ . 若盘为自由边界条件(剪

切力和弯矩为零), 由(5)式可得到  $\frac{B}{A} = -\frac{J_1(k_n a)}{I_1(k_n a)}$ , 简支和固定条件, 也可得到相应的  $B/A$  的值.

### 4. 叠加法计算阶梯圆盘的辐射阻抗

阶梯盘可以看作由两部分组成, 一为中间的中凸部分, 另一位边缘的环形平面. 这样, 整个阶梯盘的声辐射功率应为

$$W = W_1 + W_2,$$

式中的角标 1, 2 分别表示中凸部分和圆环部分. 上式两边同除以盘上参考振速的共轭积, 得

$$Z = Z_1 + Z_2.$$

也就是说, 阶梯圆盘的辐射阻和辐射抗为

$$R = \frac{R_1 S_1 + R_2 S_2}{S},$$

$$X = \frac{X_1 S_1 + X_2 S_2}{S},$$

这里  $Z, S, Z_1, S_1$  和  $S_2, Z_2$  分别为阶梯圆盘、中凸部分和环形部分的阻抗和面积. 中凸部分辐射面在同一几何平面, 其阻和抗  $R_1, X_1$  可利用(1)式来求解, 即可利用(6)和(7)式求出.

圆环部分辐射阻抗可由已求得的圆盘辐射阻抗推算出来. 对一个半径与阶梯圆盘相同的均质圆盘来说, 假设其辐射阻抗为  $Z'$ , 从结构上来说, 可以认为其由两部分组成, 一为与阶梯圆盘中凸部分的半径相同的部分, 其辐射阻抗为  $Z'_1$ , 另一为剩下的圆环部分, 其辐射阻抗为  $Z'_2$ , 即

$$Z'_2 = Z' - Z'_1.$$

对阶梯圆盘, 其节线两边部分的振动位相相同, 也就是说  $Z_1$  和  $Z_2$  都是同号为正, 现假定  $Z_2 = Z'_2$  (因两者的半径相同, 故该假定是成立的), 但  $Z_1$  和  $Z'_1$  是符号相反的, 即  $Z'_1 = -Z_1$ . 则阶梯盘的声辐射阻抗为

$$Z = Z_1 + Z_2 = Z' - 2Z'_1 = Z' - 2Z_1,$$

即

$$R = \frac{R'S - 2R_1 S_1}{S}, \tag{8}$$

$$X = \frac{X'S - 2X_1 S_1}{S}. \tag{9}$$

因此, 只要计算出弯曲振动均质圆盘面积为  $S_1$  的辐射阻抗  $Z_1$  和一个半径与阶梯圆盘相同的均质圆盘得辐射阻抗  $Z'$ , 就可得到出弯曲振动阶梯圆盘的辐射阻抗.

### 5. 算 例

取带有阶梯的圆盘, 其半径  $a = 15$  cm, 泊松比  $\sigma = 0.28$ , 现计算自由边界阶梯盘的辐射阻抗. 根据自由边界圆盘振动频率方程

$$\frac{J_0(k_n a)}{J_1(k_n a)} + \frac{I_0(k_n a)}{I_1(k_n a)} = \frac{2(1 - \sigma)}{k_n a},$$

以及振动位移公式

$$y(\rho, t) = [AJ_0(k_n \rho) + BI_0(k_n \rho)] \exp(j\omega t),$$

$$\rho \in (0, a).$$

根据以上两式可以计算出一阶振动模式的  $k_n a$  值及节圆半径  $a_1, k_n a = k_1 a = 2.99306, a_1 = 0.68a$ . 由(6)和(7)式, 以及自由边界条件, 可得到均质圆盘辐射阻抗

$$Z' = \pi \rho_0 c a^2 (R' + jX'),$$

其中

$$R' = \frac{2}{\left(1 - \frac{J_1(k_n a)}{I_1(k_n a)}\right)^2 a^2} \int_0^a \left[ J_0(k_n \rho) - \frac{J_1(k_n a)}{I_1(k_n a)} I_0(k_n \rho) \right]^2 [1 - J_0(2k\rho)] \rho d\rho,$$

$$X' = \frac{2}{\left(1 - \frac{J_1(k_n a)}{I_1(k_n a)}\right)^2 a^2} \int_0^a \left[ J_0(k_n \rho) - \frac{J_1(k_n a)}{I_1(k_n a)} I_0(k_n \rho) \right]^2 H_0(2k\rho) \rho d\rho,$$

中间凸起的阶梯部分, 其边界条件为  $\rho = a_1$  处位移为零, 即  $\frac{B}{A} = -\frac{J_0(k_n \rho)}{I_0(k_n \rho)}$ , 将其代入(6), (7)式中, 得

$$R_1 = \frac{2}{\left(1 - \frac{J_0(k_n \rho)}{I_0(k_n \rho)}\right)^2 a^2} \int_0^{a_1} \left[ J_0(k_n \rho) - \frac{J_0(k_n \rho)}{I_0(k_n \rho)} I_0(k_n \rho) \right]^2 [1 - J_0(2k\rho)] \rho d\rho,$$

$$X_1 = \frac{2}{\left(1 - \frac{J_0(k_n \rho)}{I_0(k_n \rho)}\right)^2 a^2} \int_0^{a_1} \left[ J_0(k_n \rho) - \frac{J_0(k_n \rho)}{I_0(k_n \rho)} I_0(k_n \rho) \right]^2 H_0(2k\rho) \rho d\rho,$$

式中  $k_n \rho = k_1 a_1 = 2.035$ . 将以上四个式子代入(8)和(9)式中, 并利用高斯数值积分, 可求得自由边界阶梯盘相对辐射阻抗  $R$  和  $X$  随  $ka$  的变化关系, 如图 2 所示.

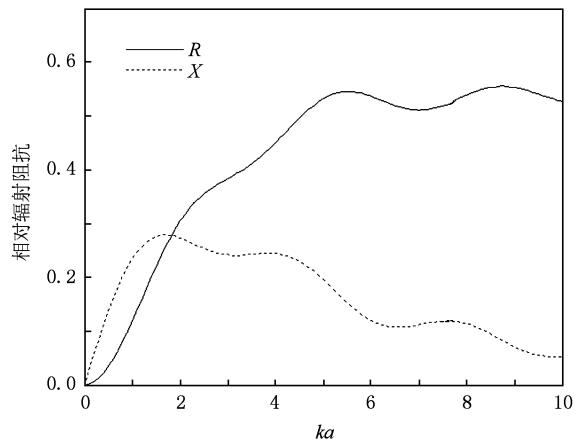


图 2 自由边界阶梯盘相对辐射阻抗随  $ka$  变化关系

由上图可知, 阶梯圆板的辐射阻抗是波数  $k$  和圆板半径  $a$  的函数, 辐射阻在高频段比低频段大. 当

$ka > 2$  时辐射阻大于辐射抗, 声转换效率相对较高.

## 6. 结 论

本文从辐射声功率角度出发, 提出了阶梯盘辐射阻抗算法——叠加法. 即将阶梯盘沿着节线分为

中心凸起和外围圆环两部分, 分别计算出这两部分辐射阻抗并将其进行叠加, 就可计算出阶梯盘的辐射阻抗. 对于中心下凹的阶梯盘, 同样可用本文算法进行计算. 本文提出的辐射阻抗计算方法, 也可适用于其他类似于阶梯盘的、复杂的辐射面的辐射阻抗计算.

- [1] Morse P M, Ingard K U 1968 *Theoretical Acoustics* (New York: McGraw-Hill) p315.
- [2] Zhang H L 2007 *Theoretical acoustics* (Beijing: Higher Education Press) p231 (in Chinese) [张海澜 2007 理论声学 (北京: 高等教育出版社) 第 231 页]
- [3] Vojnovic M 2005 *Applied Acoustics* **66** 481
- [4] Van Buren A L 1971 *J. Acoust. Soc. Am* **51** 705
- [5] Dalmont J P 2001 *J. Sound. Vib.* **244** 505
- [6] Shao W, Kmechefske C 2005 *J. Sound. Vib.* **286** 363
- [7] Robey D H 1955 *J. Acoust. Soc.* **27** 706
- [8] Wang Z H, Hu Y M, Meng Zh, Ni M 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7022 [王泽锋、胡永明、孟 洲、倪 明 2008 物理学报 **27** 706]

- [9] Arase E M 1964 *J. Acoust. Soc. Am.* **36** 1521
- [10] Burneet D S, Soroka W W 1972 *J. Acoust. Soc. Am.* **51** 1618
- [11] Lee J, Seo I 1996 *J. Sound. Vib.* **198** 299
- [12] Gallego-Juárez J A, Rodriguez-corrall G, Gaete-Garretón. L 1978 *Ultrasonics* **11** 267
- [13] Gallego-Juárez J A, Rodriguez-Corral 2000 *Ultrasonics* **38** 331
- [14] Gallego-Juárez J A 2002 *Ultrasonics* **40** 889
- [15] Porter D R 1964 *J. Acoust. Soc. Am.* **36** 1154
- [16] He Z y, Zhao Y F 1981 *Theoretical basis of acoustics* (Beijing: National Defense Industry Press) p266 (in Chinese) [何祚镛、赵玉芳编 1981 声学理论基础 (北京: 国防工业出版社), 第 266 页]

# Calculation method of the radiation impedance of stepped circular plate \*

He Xi-Ping<sup>†</sup>

(Applied Acoustics Institute, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)

(Received 28 July 2009; revised manuscript received 20 August 2009)

## Abstract

Radiation impedance is an important parameter for evaluation of acoustic conversion efficiency of a sound and vibration system. The high power flexural vibration circular plate with stepped thickness has important applications in fluid, especially in air due to its large radiation area. The classical theory has difficulty in calculating the radiation impedance of the stepped circular plate due to the fact that the radiation surface is not coplanar, so the domain of integration is difficult to choose. From the point of view of radiation acoustic power, and based on superposition principle, a method is proposed to calculate the radiation impedance of a stepped circular plate in this work. As an example, calculation of the radiation impedance of a circular plate with one step is given.

**Keywords:** stepped circular plate, radiated power, radiation impedance, superposition principle

**PACC:** 4330, 4390

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10874107) and the Natural Science Foundation of Shaanxi Province, China (Grant No. 2007A07).

<sup>†</sup> E-mail: Hexiping@snnu.edu.cn