

# 双稳系统的频率耦合与随机共振机理\*

林 敏<sup>†</sup> 孟 莹

(中国计量学院计量测试工程学院, 杭州 310018)

(2009 年 8 月 21 日收到; 2009 年 9 月 23 日收到修改稿)

分析了处于双势阱中的粒子在单一频率信号和双频信号作用下的运动形式, 给出在双频信号作用下双稳系统的响应幅值与激励幅值的近似解析关系, 揭示了非线性系统所特有的不同频率之间的频率耦合现象和激励输入的频率能量向另一频率转移的渗透现象. 从动力学机理和频谱分布的角度进行分析, 深化了对双稳系统随机共振机理的认识. 数值仿真结果证明了理论分析的有效性.

**关键词:** 双稳系统, 频率耦合, 渗透现象, 随机共振

**PACC:** 0250, 0545, 0540

## 1. 引 言

近 30 年来, 由噪声、弱周期信号和双稳系统协同作用而产生的随机共振现象引起了人们的极大兴趣<sup>[1-6]</sup>. 特别是噪声在随机共振中所起的特殊作用更是成为研究的一个热点<sup>[7,8]</sup>. 噪声通常用强度、功率谱密度和幅度概率分布三个要素来描述. 围绕着不同功率谱密度和不同幅值概率分布的噪声, 人们对各种随机共振现象进行了深入的研究, 分别提出了广义随机共振和“真正”随机共振等<sup>[9,10]</sup>. 但更具理论意义和实际应用价值的问题是宽频或窄带的噪声具有较为丰富的频率成分, 这些不同频率成分在随机共振过程中是如何起作用的问题至今尚未完全解决.

非线性系统受到单一频率作用时, 响应中不仅有与输入同频的基频项, 而且有高次谐频项和分频项, 在复杂情况下还会出现准周期振动和混沌等现象. 当非线性系统受两种不同频率作用时, 响应中还会出现这两种频率的和频、差频等振动. 总之, 非线性存在着相互作用, 且能使频率结构发生变化. 特别是发生在非线性双稳系统中的随机共振现象, 存在着明显的不同频率间的能量转移和多种频率之间的耦合关系<sup>[11-13]</sup>.

双稳系统作为典型的非线性系统, 在物理、化

学等自然科学领域以及社会科学领域中有着广泛的应用. 传统的随机共振是以噪声强度为变量的, 而噪声强度的变化实质上就是改变宽频白噪声中各不同频率的功率大小, 从而推动粒子周期性地从一个势阱移到另一势阱, 在双稳系统中形成周期性的有序运动, 使双稳系统的输出在弱输入信号的频率处达到较大的幅值. 发生在双稳系统的随机共振, 噪声的作用在于向弱输入信号提供产生共振的能量. 如果将作用到双稳系统的弱周期信号称为主动力, 而将白噪声称为受动力, 则随机共振是由这两个主动力、受动力的协同作用而形成的. 本文用单一频率的信号取代宽频白噪声作为受动力, 从动力学机理和频谱分布的角度分析处于双势阱中的粒子在单一频率信号和双频信号作用下的运动形式, 给出了在双频信号作用下双稳系统响应幅值与激励幅值的近似解析关系, 揭示了不同频率之间的频率耦合现象和激励输入的频率能量向另一频率转移的渗透现象.

## 2. 双稳系统的频率耦合与渗透现象

作为研究随机共振的经典模型, 考虑一维动力学系统

$$\frac{dx}{dt} = ax - x^3 + A\cos(\omega_0 t) + N(t), \quad (1)$$

式中  $a$  为双稳系统参数,  $N(t)$  是均值为零、自相关

\* 国家自然科学基金(批准号: 10972207)和浙江省自然科学基金(批准号: Y7080111)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: linn@cjl. edu. cn

函数  $\langle N(t)N(0) \rangle = 2D\delta(t)$  的高斯白噪声, 其中  $D$  为噪声强度. (1) 式描述了处于双势阱中的粒子受到周期力  $A\cos(\omega_0 t)$  ( $A$  为幅值,  $\omega_0$  为频率) 和随机力  $N(t)$  共同作用时, 在过阻尼条件下的运动. 从动力学的观点分析, 随机共振是处于双势阱的粒子在周期力和随机力协同作用下产生的, 且存在着噪声能量向周期信号能量转移的机制. 从频域分析的角度看, 由于作用到双稳系统的  $A\cos(\omega_0 t)$  的功率谱是单一线谱, 而  $N(t)$  的功率谱则是平直谱, 随机共振实质上是具有单一线谱的周期信号从宽频的白噪声中获取了能量, 或者是宽频的噪声能量部分向频率  $\omega_0$  处聚集, 从而使双稳系统的输出在输入信号频率  $\omega_0$  处有更大的功率谱值.

### 2.1. 单一频率作用下的阈值特性

考虑(1)式中当  $A = D = 0$  时, 系统在  $x_m = \pm \sqrt{a}$  处有两个稳态. 而当(1)式中只有周期力 ( $A \neq 0$ ) 作用而不存在噪声 ( $D = 0$ ) 时, 粒子在双稳系统中的运动或者是在单一势阱平衡点  $x_m$  附近作局部的运动, 或者越过势垒在双稳系统的两势阱之间作较大范围的来回运动. 粒子在双稳系统中的运动形式取决于输入信号幅值  $A$  的大小. 引起粒子在双稳系统的两势阱之间来回运动的输入阈值  $A_c$  与频率  $\omega_0$  的依赖关系可用如下的近似式<sup>[14]</sup>表示:

$$A_c^2 \approx \frac{2a}{5} \left[ \omega_0^2 + \left( \frac{a}{2} \right)^2 \right], \quad (2)$$

式中  $a$  是双稳系统参数. (2) 式表明周期驱动 ( $\omega_0 \neq 0$ ) 时系统的阈值比常驱动 ( $\omega_0 = 0$ ) 时的阈值大, 而且  $A_c(\omega_0)$  随  $\omega_0$  单调增大. 产生这一现象的原因在于(1)式描述的是一过阻尼系统, 该系统的输出响应随着  $\omega_0$  的增大所消耗的能量越来越大, 从而需要更大的驱动幅值才能使系统从一个势阱跃迁到另一个势阱, 并能在两势阱间作来回运动. (2) 式在  $\omega_0 \ll 2a$ , 特别是  $\omega_0 = 0$  时的静态阈值  $A_{c0} = \sqrt{4a^3/27}$ , 存在着较大的偏差.

### 2.2. 双频信号作用下的响应特性

对于单一频率信号作用下的双稳系统, 当幅值小于阈值  $A_c(\omega_0)$  时, 系统的运动将局限在单一势阱内. 传统的随机共振是在白噪声的协同作用下, 使系统越过势垒在两势阱之间作周期运动而产生的. 现用频率为  $\Omega$  ( $\Omega \neq \omega_0$ ) 的单一频率信号取代宽频白噪声作用于双稳系统, 相应的动力学

方程为

$$\frac{dx}{dt} - ax + x^3 = A\cos(\omega_0 t) + B\cos(\Omega t), \quad (3)$$

式中  $B\cos(\Omega t)$  是作用到系统的第二频率信号, 称为受动力. 方程(3)要求得精确的解析解是非常困难的. 为了从频域的角度机理化地分析如图1所示双稳系统的随机共振, 假设频率为  $\omega_0$  的第一频率信号的幅值  $A \ll A_c$ , 以第二驱动信号的幅值  $B$  和频率  $\Omega$  为可控制变量, 并将双稳系统输出  $x(t)$  的功率谱在频率  $\omega_0$  处的幅值作为可观察变量, 着重研究输入频率  $\Omega$  的幅值  $B$  对输出  $x(t)$  中频率为  $\omega_0$  的幅值大小的影响, 从而揭示非线性系统所特有的不同频率之间的频率耦合现象.

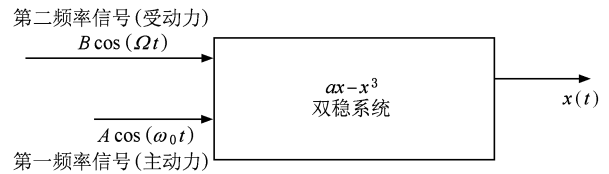


图1 双频信号作用下的双稳系统

假定(3)式有周期为  $2\pi/\omega_0$  的周期解, 且对所有的  $t$  可以展开为 Fourier 级数

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + \dots \quad (4)$$

双稳系统中的非线性项是与  $x^3$  成正比的, 由于非线性的相互作用, 双稳系统中各不同频率间存在着如下的代数和三角函数关系:

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^3 = \sum_{i=1}^n a_i^3 + 3 \sum_{i \neq j} a_i^2 a_j + 6 \sum_{i < j < k} a_i a_j a_k, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma &= [\cos(\alpha + \beta - \gamma) \\ &+ \cos(\beta + \gamma - \alpha) \\ &+ \cos(\gamma + \alpha - \beta) \\ &+ \cos(\alpha + \beta + \gamma)] / 4. \end{aligned} \quad (6)$$

在(5)和(6)式的共同作用下, 双稳系统的立方项

$$\begin{aligned} x^3(t) &= (a_0 + \dots + a_{11} \cos 11\omega_0 t + \dots \\ &+ a_{21} \cos 21\omega_0 t + \dots)^3 \end{aligned} \quad (7)$$

中有一项为

$$3a_{11}^2 a_{21} \left( \frac{1}{2} \cos 21\omega_0 t + \frac{1}{4} \cos 43\omega_0 t + \frac{1}{2} \cos \omega_0 t \right). \quad (8)$$

(7)和(8)式表明, 在不同频率之间的和与差作用下双稳系统中的频率成分出现极为复杂的因果关系, 并使有些频率成分得到加强. 随着  $n \rightarrow \infty$ , 系统中不同频率间的作用将更加复杂.

现假设  $x(t)$  中所含的谐波主要是由输入的两  
种频率成分构成, 则双稳系统输出  $x(t)$  可近似表  
示为

$$x(t) = a_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) + a_2 \cos(\Omega t + \varphi_2). \quad (9)$$

采用谐波平衡法, 将(9)式代入(3)式, 并令等式左  
右两边各阶谐波系数相等, 则有

$$\begin{aligned} 16A^2 &= a_1^2(16a^2 - 24aa_1^2 + 9a_1^4 - 48aa_2^2 \\ &\quad + 36a_1^2a_2^2 + 36a_2^4 + 16\omega_0^2), \\ 16B^2 &= a_2^2(16a^2 - 48aa_1^2 + 36a_1^4 - 24aa_2^2 \\ &\quad + 36a_1^2a_2^2 + 9a_2^4 + 16\Omega^2). \end{aligned} \quad (10)$$

(10)式反映了双稳系统输出振幅  $a_1$  和  $a_2$  对输入频  
率为  $\Omega$  的信号幅值  $B$  的依赖关系. 当  $\Omega = 7\omega_0$ , 而其  
他参数  $a = 0.3, A = 0.01, \omega_0 = 0.01\pi$  时,  $a_1$  与  $B$   
的依赖关系如图 2 所示. 图 2 表明, 对于固定频率的  
第二作用信号, 随着幅值  $B$  的变化,  $a_1$  呈现出非单  
调的变化曲线, 当  $B$  在特定的区域内变动时,  $a_1$   
的值能急剧增大, 反映了不同频率之间存在着强烈的  
耦合作用. (10)式虽然是一个十分粗糙的近似解,  
由它仍然可得出一些很有意义的结论, 反映了非线性  
双稳系统的本质与特征.

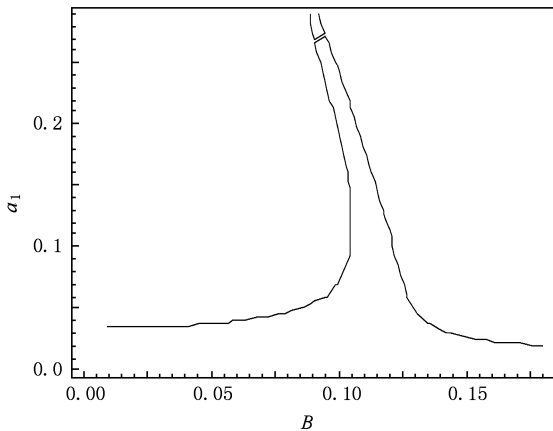


图 2 响应振幅  $a_1$  与激励幅值  $B$  的关系

### 3. 数值仿真结果与分析

对于图 1 所示的双频信号作用下的双稳系统,  
相应的动力学方程由(3)式确定, 双稳系统输出响  
应  $x(t)$  与双稳系统参数  $a$ 、第一频率信号  
 $A\cos(\omega_0 t)$  的参数  $A, \omega_0$  和第二频率信号  
 $B\cos(\Omega t)$  的参数  $B, \Omega$  有关. 本文着重研究当  $a, A, \omega_0$  和  $\Omega$   
固定时, 双稳系统输出  $x(t)$  中频率成分为  $\omega_0$  的振幅  
 $a_1$  对输入频率为  $\Omega$  的信号幅值  $B$  的依赖关系. 分析

时取系统参数  $a = 0.3$ , 数值仿真采用四阶 Runge-  
Kutta 法, 采样间隔取为  $h = 0.02$ , 并设定初始条件  
 $x(0) = 0$ .

1) 幅值  $A \ll A_c$  的情况. 当  $B = 0$  时, 由于输入  
信号幅值较小,  $x(t)$  不可能跃过势垒进入另一势  
阱, 只能在单一势阱内运动, 因而输出信号的幅值  
极小. 如图 3 所示, 第一频率信号的幅值和频率分别  
为  $A = 0.01, \omega_0 = 0.01\pi$ . 给系统作用第二频率信  
号, 并将频率固定在  $\Omega = 0.07\pi$ , 通过改变其幅值  $B$   
的大小, 双稳系统输出  $x(t)$  中频率为  $\omega_0$  和  $\Omega$  两  
种成分的幅值  $a_1$  和  $a_2$  的大小随之而变, 如图 4 所  
示. 图 4 表明, 给双稳系统作用频率为  $\Omega$  的输入信号,  
不但影响系统输出  $x(t)$  中频率为  $\Omega$  的成分大小, 而  
且对频率为  $\omega_0$  的成分也产生明显影响, 且这种影响  
关系既非线性也非单调, 反映了两种频率间存在着  
复杂的耦合关系. 特别是当  $B$  处于 0.105—0.12 之  
间时, 频率为  $\Omega$  的输入能极大地增强输出  $x(t)$  中  
频率为  $\omega_0$  的成分.

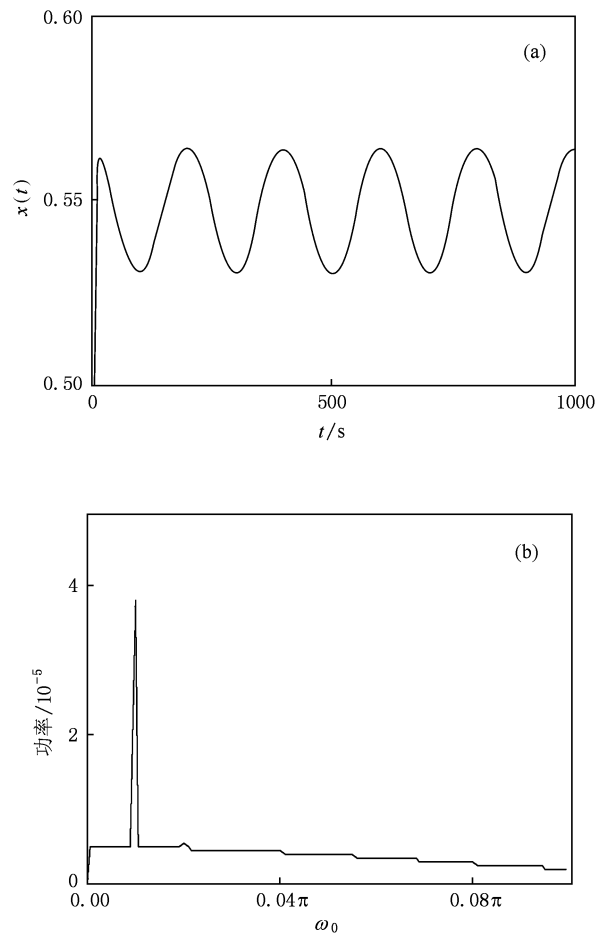


图 3  $A = 0.01, B = 0$  时的输出波形和功率谱 (a) 时域波形,  
(b)  $x(t)$  的功率谱

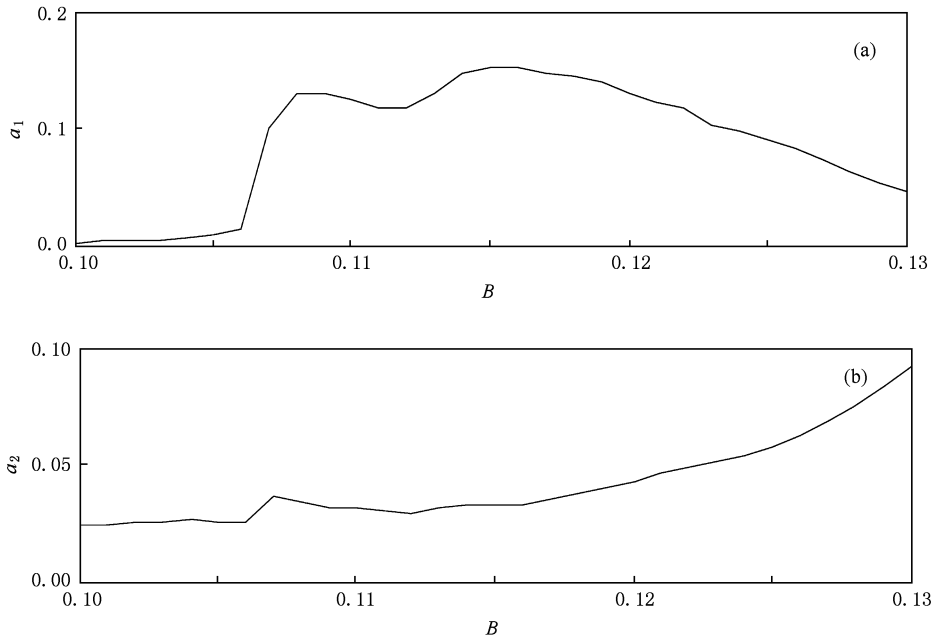


图4  $A = 0.01$  时响应幅值与第二激励幅值  $B$  的关系 (a)  $a_1$  与  $B$  的关系, (b)  $a_2$  与  $B$  的关系

2) 幅值  $A$  略小于  $A_c$  的情况. 第一频率信号的幅值和频率分别为  $A = 0.065$ ,  $\omega_0 = 0.01\pi$ , 由  $a = 0.3$  可求得静态阈值  $A_{c0} = 0.0632$ , 而当驱动频率  $\omega_0 = 0.01\pi$  时经数值模拟得到的阈值  $A_c(\omega_0) \approx 0.06924$ . 当  $\Omega = 0.07\pi$  时, 随着幅值  $B$  的变化, 输出  $x(t)$  中频率成分为  $\omega_0$  和  $\Omega$  的信号幅值也随之而变, 如图 5 所

示. 图 5 表明, 随着  $B$  的变化,  $a_1$  和  $a_2$  之间存在着强弱互补的关系, 反映了不同频率的信号之间存在着能量转移的渗透现象. 由于  $A$  略小于  $A_c$ , 较小的  $B$  值就能使系统在双势阱之间来回运动而产生较大幅值的振动. 传统的随机共振就是从宽频的白噪声中获取能量产生共振而形成大幅值的振动.

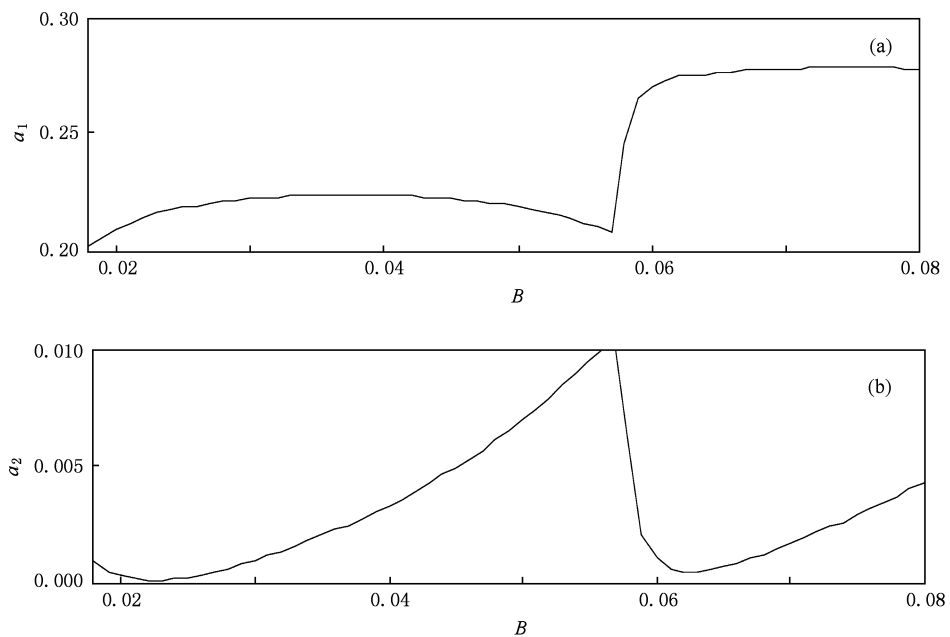


图5  $A = 0.065$  时响应幅值与第二激励幅值  $B$  的关系 (a)  $a_1$  与  $B$  的关系, (b)  $a_2$  与  $B$  的关系

## 4. 结 论

本文采用近似解析和数值仿真方法研究了双稳系统在单一频率、双频信号作用下的响应特性, 并从动力学机理和频谱分析的角度对随机共振产生的机理进行了较为深入的分析. 双稳系统的随机共振是受到以弱周期信号为主动动力、白噪声为受动

力的协同作用而产生的, 受动力所起的作用是实现主动力的同步和增强. 结果表明, 在双稳系统中产生共振所需的受动力并不限于宽频的白噪声, 这是由于非线性双稳系统存在着复杂的频率耦合和渗透现象. 本文的研究工作进一步深化了对随机共振机理的认识, 为随机共振的控制与应用提供了新的理论方法.

- 
- [1] Gammaitoni L, Hanggi P, Jung P, Marchesoni F 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 223
- [2] Babinec P 1997 *Phys. Lett. A* **225** 179
- [3] Nozaki D, Mar D J, Grigg P, Collins J J 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 2402
- [4] Qin G R, Gong D C, Hu G, Wen X D 1992 *Acta Phys. Sin.* **41** 360 (in Chinese) [秦光戎、龚德纯、胡 岗、温孝东 1992 物理学报 **41** 360]
- [5] Zhu H J, Li R, Wen X D 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2404 (in Chinese) [祝恒江、李 蓉、温孝东 2003 物理学报 **52** 2404]
- [6] Lin M, Huang Y M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3277 (in Chinese) [林 敏、黄咏梅 2006 物理学报 **55** 3277]
- [7] Jin Y F, Xu M, Fang T 2005 *J. Phys. A* **38** 3733
- [8] Guo F, Zhou Y R, Jiang S Q, Gu T X 2006 *Chin. Phys.* **15** 947
- [9] Berdichevsky V, Gitterman M 1999 *Phys. Rev. E* **60** 1494
- [10] Dan D, Jayannavar A M 2005 *Physica A* **345** 404
- [11] Lin M, Mao Q M, Zheng Y J, Li D S 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5021 (in Chinese) [林 敏、毛谦敏、郑永军、李东升 2007 物理学报 **56** 5021]
- [12] Hu G 1994 *Stochastic Forces and Nonlinear Systems* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) (in Chinese) [胡 岗 1994 随机力与非线性系统 (上海: 上海科技教育出版社)]
- [13] Lin M, Fang L M 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2136 (in Chinese) [林 敏、方利民 2009 物理学报 **58** 2136]
- [14] Wang J F, Liu F, Wang J Y, Chen G, Wang W 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 2305 (in Chinese) [王嘉赋、刘 锋、王均义、陈 光、王 炜 1997 物理学报 **46** 2305]

# Frequency coupling in bistable system and the mechanism of stochastic resonance<sup>\*</sup>

Lin Min<sup>†</sup> Meng Ying

(*College of Metrology and Measurement Engineering, China Jiliang University, Hangzhou 310018, China*)

(Received 21 August 2009; revised manuscript received 23 September 2009)

## Abstract

We study the motion of a particle in a bistable potential in the presence of single frequency signal and dual-frequency signal, and give the approximate analytical relationship between response peak-to-peak value and driven peak-to-peak value of the bistable system under the control of dual-frequency signal. The paper also reveals a peculiar phenomenon of the non-linear system, that is frequency coupling of different frequencies and the energy infiltration from the frequency of input to the other. The analysis is carried out from the view point of dynamics mechanism and the frequency spectrum distribution. It deepens the understanding of the mechanism of stochastic resonance in the bistable system. The results of numerical simulation prove the validity of theoretical analysis.

**Keywords:** bistable system, frequency coupling, infiltration phenomenon, stochastic resonance

**PACC:** 0250, 0545, 0540

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 10972207 ) and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China ( Grant No. Y7080111 ).

<sup>†</sup> E-mail: linnm@cjlu.edu.cn