第 59 卷 第 6 期 2010 年 6 月
1000-3290/2010/59(06)/3639-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 59, No. 6, June, 2010

完整系统 Appell 方程的 Lie-Mei 对称性与守恒量

李元成[1)†] 夏丽莉[2)] 王小明[1)] 刘晓巍[1)]

1)(中国石油大学(华东)物理科学与技术学院，青岛 266555)

2)(河南教育学院物理系，郑州 450046)

(2009 年 8 月 27 日收到;2009 年 9 月 23 日收到修改稿)

研究了完整系统 Appell 方程的 Lie-Mei 对称性与守恒量. 在完整系统 Appell 方程的基础上，给出了 Appell 方程的 Lie-Mei 对称性的定义和判据，得到了 Appell 方程的 Lie-Mei 对称性导致的 Hojman 守恒量和 Mei 守恒量. 举例说明结果的应用.

关键词： 完整系统，Appell 方程，Lie-Mei 对称性，守恒量

PACC： 0320

1. 引　　言

Appell 方程[1]是分析力学中一类非常重要的方程，近二十多年来，我国学者在 Appell 方程的研究、推广及应用等方面做出了一系列的贡献. 梅凤翔[2]把分析力学中十多种形式的运动方程划分成三大体系. 其他学者也做了大量工作，取得了丰硕的成果[3—7]. 1918 年 Noether[8]揭示了对称性与守恒量之间的潜在关系. 通过几十年的研究，对称性与守恒量的研究在分析力学领域得到了快速的发展，已取得许多的研究成果[9—18]. 然而对 Appell 方程的对称性与守恒量的研究仍有许多工作要做. 近年来，对 Appell 方程的对称性研究已有初步成果[19—26]，但仅限于研究 Appell 方程的单一对称性. 对方程的联合对称性的研究尚未见报道. 本文研究完整系统 Appell 方程的 Lie-Mei 对称性，给出系统的 Lie-Mei 对称性的定义和判据，得到完整系统 Appell 方程的 Lie-Mei 对称性导致的 Hojman 守恒量和 Mei 守恒量.

2. 系统的运动微分方程

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 来确定，第 s 个广义坐标 q_s 对应的广义力 $Q_s=Q_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=Q'_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+Q''_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$，其中 $Q'_s=Q'_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为有势广义力，$Q''_s=Q''_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为非势广义力. 系统的加速度能量 S 和 Appell 方程分别表示如下：

$$S=S(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}})=\frac{1}{2}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i^2, \tag{1}$$

其中 m_i 和 $\boldsymbol{r}_i$ 分别为第 i 个质点的质量和位矢.

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s}=Q_s \quad (s=1,2,\cdots,n). \tag{2}$$

本文中均采用 Einstein 约定. 令

$$A=S-\ddot{q}_sQ'_s, \tag{3}$$

则方程(2)可改写为

$$\frac{\partial A}{\partial \ddot{q}_s}=Q''_s \quad (s=1,2,\cdots,n). \tag{4}$$

利用微分运算规则，可以得到

$$\frac{\partial A}{\partial \ddot{q}_s}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q''_s, \tag{5}$$

其中 L 为系统的 Lagrange 函数.

设方程(2)非奇异，由方程(5)可解出所有广义加速度，记作

$$\ddot{q}_s=\alpha_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \quad (s=1,2,\cdots,n). \tag{6}$$

3. 系统的 Lie-Mei 对称性

取无限小变换

$$t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),$$

† E-mail: liyuanc@upc.edu.cn

$$q_s^*(t^*) = q_s(t) + \varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}), \tag{7}$$

其中 ε 为无限小参数，ξ_0, ξ_s 为无限小变换的生成元.

由文献[25]的定义可得完整系统 Appell 方程 Lie 对称性的确定方程为

$$X^{(2)}\left(\frac{\partial A}{\partial\ddot{q}_s}\right) = X^{(1)}(Q''_s), \tag{8}$$

其中

$$X^{(1)} = \xi_0\frac{\partial}{\partial t} + \xi_s\frac{\partial}{\partial q_s} + (\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s},$$

$$X^{(2)} = X^{(1)} + (\ddot{\xi}_s - 2\ddot{q}_s\dot{\xi}_0 - \dot{q}_s\ddot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial\ddot{q}_s}.$$

由文献[26]的定义可得完整系统 Appell 方程 Mei 对称性的判据方程为

$$\frac{\partial}{\partial\ddot{q}_s}[X^{(2)}(A)] = X^{(1)}(Q''_s). \tag{9}$$

定义 如果完整系统 Appell 方程的对称性同时为 Lie 对称性和 Mei 对称性，这样的对称性称为完整系统 Appell 方程的 Lie-Mei 对称性.

判据 对于完整系统 Appell 方程，如果无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足

$$\left\{X^{(2)}\left(\frac{\partial A}{\partial\ddot{q}_s}\right) - X^{(1)}(Q''_s)\right\}^2 + \left\{\frac{\partial}{\partial\ddot{q}_s}[X^{(2)}(A)] - X^{(1)}(Q''_s)\right\}^2 = 0, \tag{10}$$

则相应的对称性为完整系统 Appell 方程的 Lie-Mei 对称性.

完整系统 Appell 方程的 Lie-Mei 对称性在一定条件下可导致 Hojman 守恒量和 Mei 守恒量.

命题 1 对于完整系统 Appell 方程，在无限小变换下，如果存在函数 $\mu = \mu(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足

$$\frac{\partial\alpha_s}{\partial\dot{q}_s} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\mu = 0, \tag{11}$$

则完整系统 Appell 方程的 Lie-Mei 对称性可导致如下广义 Hojman 守恒量：

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{H}} &= \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial t}(\mu\xi_0) + \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial q_s}(\mu\xi_s) \\ &\quad + \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}[\mu(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)] - \dot{\xi}_0 \\ &= \mathrm{const.} \end{aligned} \tag{12}$$

证明 因为完整系统 Appell 方程的 Lie-Mei 对称性一定是 Lie 对称性，必须满足确定方程(8)，利用方程(8)和(11)式，根据系统广义 Hojman 守恒量的证明方法，能证明系统存在守恒量(12)式.

命题 2 对于完整系统 Appell 方程，如果存在规范函数 $G_{\mathrm{M}} = G_{\mathrm{M}}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足广义结构方程

$$\begin{aligned} &X^{(2)}(A)\dot{\xi}_0 + X^{(1)}[X^{(2)}(A)] \\ &+ E_s[X^{(2)}(A)](\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) \\ &+ X^{(1)}(Q''_s)\xi_0\dot{\alpha}_s + \dot{G}_{\mathrm{M}} = 0, \end{aligned} \tag{13}$$

则完整系统 Appell 方程的 Mei 对称性可导致如下 Mei 守恒量：

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{M}} &= X^{(2)}(A)\xi_0 + \frac{\partial X^{(2)}(A)}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G_{\mathrm{M}} \\ &= \mathrm{const.} \end{aligned} \tag{14}$$

证明 因为完整系统 Appell 方程的 Lie-Mei 对称性一定是 Mei 对称性，必须满足 Mei 对称性判据方程(9)，将(14)式两边对 t 求导，利用方程(9)和(13)式能够证明系统存在 Mei 守恒量(14)式.

4. 算 例

假设力学系统的加速度能量为 $S = \frac{1}{2}(\ddot{q}_1^2 + \ddot{q}_2^2)$，系统受到的非势广义力为 $Q''_1 = \dot{q}_1$，$Q''_2 = \dot{q}_2$，试研究系统的 Lie-Mei 对称性导致的守恒量.

取生成元

$$\xi_0 = 0,\quad \xi_1 = t,\quad \xi_2 = -t \tag{15}$$

满足方程(10)，则该对称性是完整系统 Appell 方程的 Lie-Mei 对称性.

将生成元(15)式代入(11)式可得函数

$$\mu = (q_1 - \dot{q}_1)(q_2 - \dot{q}_2)\exp(-2t). \tag{16}$$

由(12)式可得完整系统 Appell 方程 Lie-Mei 对称性对应的广义 Hojman 守恒量为

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{H}} &= t(q_1 - \dot{q}_1)^{-1} - t(q_2 - \dot{q}_2)^{-1} \\ &\quad - (q_1 - \dot{q}_1)^{-1} + (q_2 - \dot{q}_2)^{-1} \\ &= \mathrm{const.} \end{aligned} \tag{17}$$

将生成元(15)式代入(13)式可得规范函数

$$G_{\mathrm{M}} = \dot{q}_1 - q_1. \tag{18}$$

由(14)式可得完整系统 Appell 方程 Lie-Mei 对称性对应的 Mei 守恒量为

$$I_{\mathrm{M}} = \dot{q}_1 - q_1 = \mathrm{const.} \tag{19}$$

5. 结 论

研究力学系统的联合对称性的目的之一是寻

找系统更多的守恒量.本文研究完整系统 Appell 方程的 Lie-Mei 对称性,给出了定义和判据,由 Lie-Mei 对称性,在一定条件下可以找到 Hojman 守恒量和 Mei 守恒量.本文的结果包含了文献[20,23,26]的结果,所以本文的结果具有更普遍的意义,有可能推广到其他类型的约束系统.

[1] Appell P 1899 *C. R. Acad. Sci. Paris* **129** 317

[2] Mei F X 1985 *Foundations of Mechanics of Nonholonomic Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) p214 (in Chinese)[梅凤翔 1985 非完整力学基础(北京:北京工业学院出版社)第 214 页]

[3] Mei F X, Liu D, Luo Y 1991 *Advanced Analytical Mechanics* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) p131 (in Chinese)[梅凤翔、刘　端、罗　勇 1991 高等分析力学(北京:北京理工大学出版社)第 131 页]

[4] Xue W X 1987 *Acta Mech. Sin.* **19** 156 (in Chinese)[薛问西 1987 力学学报 **19** 156]

[5] Yuan S J, Mei F X 1987 *Acta Mech. Sin.* **19** 165 (in Chinese)[袁士杰、梅凤翔 1987 力学学报 **19** 165]

[6] Luo S K 1996 *Appl. Math. Mech.* **17** 683

[7] Luo S K 1998 *Appl. Math. Mech.* **19** 43

[8] Noether A E 1918 *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math. Phys.* **KI** 235

[9] Li Z P 1993 *Classical and Quantal Dynamics of Constrained Systems and Their Symmetrical Properties* (Beijing: Beijing Polytechnic University Press) pp1—52 (in Chinese)[李子平 1993 经典和量子约束系统及其对称性质(北京:北京工业大学出版社)第 1—52 页]

[10] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese)[梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用(北京:科学出版社)]

[11] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese)[梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量(北京:北京理工大学出版社)]

[12] Luo S K, Zhang Y F 2008 *Advances in the Study of Dynamics of Constrained Systems* (Beijing: Science Press) pp288—415 (in Chinese)[罗绍凯、张永发 2008 约束系统动力学研究进展(北京:科学出版社)第 288—415]

[13] Hojman S A 1992 *J. Phys.* A **25** L291

[14] Mei F X 2000 *J. Beijing Inst. Techn.* **9** 120

[15] Mei F X, Shang M 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1901 (in Chinese)[梅凤翔、尚　玫 2000 物理学报 **49** 1901]

[16] Mei F X, Xu X J, Zhang Y F 2004 *Acta Mech. Sin.* **20** 668

[17] Wang S Y, Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 373

[18] Qiao Y F, Zhao S H, Li R J 2004 *Chin. Phys.* **13** 292

[19] Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 177

[20] Luo S K 2002 *J. Changsha Univ.* **16** 1 (in Chinese)[罗绍凯 2002 长沙大学学报 **16** 1]

[21] Li R J, Qiao Y F, Meng J 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1 (in Chinese)[李仁杰、乔永芬、孟　军 2002 物理学报 **51** 1]

[22] Luo S K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 712 (in Chinese)[罗绍凯 2002 物理学报 **51** 712]

[23] Zhang Y Y, Jia L Q, Zheng S W 2007 *J. Henan Normal Univ.* **35** 77 (in Chinese)[张耀宇、贾利群、郑世旺 2007 河南师范大学学报 **35** 77]

[24] Jia L Q, Zhang Y Y, Zheng S W 2007 *J. Yunnan Univ.* **29** 589 (in Chinese)[贾利群、张耀宇、郑世旺 2007 云南大学学报 **29** 589]

[25] Jia L Q, Cui J C, Zhang Y Y, Luo S K 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 16 (in Chinese)[贾利群、崔金超、张耀宇、罗绍凯 2009 物理学报 **58** 16]

[26] Jia L Q, Zhang Y Y, Cui J C 2009 *J. Yunnan Univ.* **31** 52[贾利群、张耀宇、崔金超 2009 云南大学学报 **31** 52]

Lie-Mei symmetry and conserved quantities of Appell equation for a holonomic mechanical system

Li Yuan-Cheng[1)†] Xia Li-Li[2)] Wang Xiao-Ming[1)] Liu Xiao-Wei[1)]

1)(*College of Physics Science and Technology, China University of Petroleum (East China), Qingdao* 266555, *China*)

2)(*Department of Physics, Henan Institute of Education, Zhengzhou* 450046, *China*)

(Received 27 August 2009; revised manuscript received 23 September 2009)

Abstract

The Lie-Mei symmetry and conserved quantities of Appell equation for a holonomic mechanical system are studied. On the basis of the Appell equation, we first obtain the Lie symmetry and the Mei symmetry for the equation and the conserved quantities deduced from them, then the definition and the criterion for Lie-Mei symmetry of Appell equation are presented. Lastly, the Mei conserved quantity and the Hojman conserved quantity are deduced from the Lie-Mei symmetry. An example is given to illustrate the application of the result.

Keywords: holonomic mechanical system, Appell equation, Lie-Mei symmetry, conserved quantity

PACC: 0320

† E-mail: liyuanc@upc.edu.cn