第 59 卷 第 6 期 2010 年 6 月
1000-3290/2010/59(06)/3643-05
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol. 59, No. 6, June, 2010

构造 Birkhoff 表示的 Hojman 方法与 Birkhoff 对称性

丁光涛
(安徽师范大学物理与电子信息学院,芜湖 241000)
(2009 年 9 月 13 日收到;2009 年 10 月 12 日收到修改稿)

讨论了构造 Birkhoff 表示的 Hojman 方法. 利用该方法重新研究 Birkhoff 对称性,提出一种关于该对称性的新见解,给出 Birkhoff 守恒量的新证明,并对该守恒量仅与 Birkhoff 张量相关作出解释. 举例说明所得结果的应用.

关键词: Birkhoff 系统,对称性,守恒量,Hojman 方法
PACC: 0320

1. 引　　言

在数学、力学和物理学领域中,对称性和守恒量起着重要的作用. Birkhoff 系统动力学的建立和完善,是经典力学发展到新阶段的标志之一,关于 Birkhoff 系统对称性的研究已取得一系列进展[1—12]. 近年来,文献[4—6]将 Lagrange 系统的 Lagrange 对称性推广到 Birkhoff 系统,提出 Birkhoff 对称性,并证明由此可以导出一类守恒量. 另外,从已知的一阶微分方程组能用多种方法构造出对应的 Birkhoff 函数 B 和 Birkhoff 函数组 R_μ,其中就有 Hojman 方法[1,2,13,14]. 本文引入第一积分张成的空间,对 Hojman 方法作出新的阐释和导出. 在此基础上,重新研究 Birkhoff 对称性,提出一种关于该对称性的新见解,给出对 Birkhoff 守恒量的新证明,并对文献[5]中指出的该守恒量仅与 Birkhoff 张量相关的问题作出解释. 最后,举例说明得到结果的应用.

2. Birkhoff 系统和构建 Birkhoff 表示的 Hojman 方法及其新说明

Birkhoff 方程为

$$\Omega_{\mu\nu}\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} = 0 \quad (\mu,\nu = 1,\cdots,2n), \tag{1}$$

其中 $B = B(t, \boldsymbol{a})$ 称为 Birkhoff 函数,$R_\mu = R_\mu(t, \boldsymbol{a})$ 称为 Birkhoff 函数组,以下有时将 B 和 R_μ 合称为 Birkhoff 系统动力学特征函数,$\Omega_{\mu\nu}$ 称为 Birkhoff 张量,

$$\Omega_{\mu\nu} = \frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}. \tag{2}$$

满足下列条件的系统称为规则系统:

$$\det(\Omega_{\mu\nu}) \neq 0. \tag{3}$$

对规则系统由方程(1)可以得到

$$\dot{a}^\mu = \Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_\nu}{\partial t}\right), \tag{4}$$

其中 $\Omega^{\mu\nu}$ 称为 Birkhoff 逆变张量,且有

$$\Omega^{\mu\nu}\Omega_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho. \tag{5}$$

Birkhoff 方程(1)是一阶微分方程组. 反过来,如果给定一阶微分方程组

$$\dot{a}^\mu = \sigma^\mu(t,\boldsymbol{a}) \qquad (\mu = 1,\cdots,2n), \tag{6}$$

已经证明,原则上总可以表示成 Birkhoff 方程(1)的形式,其关键在于由方程组(6)构建出动力学特征函数 B 和 R_μ. 有多种方法解决此问题[1,2,13,14],其中一种方法为 Hojman 方法.

设方程组(6)的 $2n$ 个第一积分 $I^\mu(t,\boldsymbol{a})$ 彼此无关,即

$$\begin{aligned}\dot{I}^\mu(t,\boldsymbol{a}) &= \frac{\partial I^\mu}{\partial t} + \frac{\partial I^\mu}{\partial a^\nu}\dot{a}^\nu \\ &= \frac{\partial I^\mu}{\partial t} + \frac{\partial I^\mu}{\partial a^\nu}\sigma^\nu = 0 \\ &\qquad (\mu = 1,\cdots,2n),\end{aligned} \tag{7}$$

$$\det\left(\frac{\partial I^\mu}{\partial a^\nu}\right) \neq 0. \tag{8}$$

引入 $2n$ 个函数 $G_\alpha = G_\alpha(I(t,\boldsymbol{a}))$ $(\alpha = 1,\cdots,2n)$,满足下列条件:

$$\det(\Gamma_{\alpha\beta}) \neq 0, \tag{9}$$

其中

$$\Gamma_{\alpha\beta} = \frac{\partial G_\beta}{\partial I^\alpha} - \frac{\partial G_\alpha}{\partial I^\beta} \qquad (\alpha,\beta = 1,\cdots,2n). \tag{10}$$

那么,系统的 Birkhoff 函数 B 和 Birkhoff 函数组 R_μ 分别为

$$B = -G_\alpha \frac{\partial I^\alpha}{\partial t}, \tag{11}$$

$$R_\mu = G_\alpha \frac{\partial I^\alpha}{\partial a^\mu}. \tag{12}$$

直接用 Hojman 方法构造 B 和 R_μ 会有困难,因为需要知道系统(6)的 $2n$ 个独立的第一积分. 然而,这个方法是有意义且值得深入研究的,它揭示了 B 和 R_μ 与第一积分 I^μ 之间的紧密联系. 首先,由(7)和(11)式可以证明

$$B = R_\mu \sigma^\mu. \tag{13}$$

由文献[14]可知,满足条件(13)式时,Birkhoff 函数组 R_μ 应满足

$$\frac{\partial R_\mu}{\partial t} + \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\sigma^\nu + R_\nu \frac{\partial \sigma^\nu}{\partial a^\mu} = 0. \tag{14}$$

将(12)式代入(14)式得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_\mu}{\partial t} + \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\sigma^\nu + R_\nu \frac{\partial \sigma^\nu}{\partial a^\mu} &= \frac{\partial G_\alpha}{\partial I^\beta}\frac{\partial I^\beta}{\partial t}\frac{\partial I^\alpha}{\partial a^\mu} \\ &\quad + \frac{\partial G_\alpha}{\partial I^\beta}\frac{\partial I^\beta}{\partial a^\nu}\sigma^\nu \frac{\partial I^\alpha}{\partial a^\mu} \\ &\quad + G_\alpha\Big[\frac{\partial^2 I^\alpha}{\partial t\partial a^\mu} + \frac{\partial^2 I^\alpha}{\partial a^\mu \partial a^\nu}\sigma^\nu \\ &\quad + \frac{\partial \sigma^\nu}{\partial a^\mu}\frac{\partial I^\alpha}{\partial a^\nu}\Big] \\ &= \frac{\partial G_\alpha}{\partial I^\beta}\frac{\partial I^\alpha}{\partial a^\mu}\Big(\frac{\partial I^\beta}{\partial t} + \frac{\partial I^\beta}{\partial a^\nu}\sigma^\nu\Big) \\ &\quad + G_\alpha\Big[\frac{\partial}{\partial a^\mu}\Big(\frac{\partial I^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial I^\alpha}{\partial a^\nu}\sigma^\nu\Big)\Big].\end{aligned}$$

将(7)式代入上式即证明(14)式成立. 由此得到命题 1.

命题 1 用 Hojman 方法构建的微分方程组(6)的 Birkhoff 表示是满足条件(13)式的一类特殊表示.

由上述讨论可对 Hojman 方法以新的解释和证明. 对给定的方程组(6)可以作如下特殊变量变换:

$$a^\mu \to \bar{a}^\mu = I^\mu(t, \boldsymbol{a}), \tag{15}$$

其中 $2n$ 个 I^μ 均为第一积分. 因而方程组(6) 在新变量 $\bar{a}^\mu$ 下变换成

$$\dot{\bar{a}}^\mu = \bar{\sigma}^\mu \equiv 0. \tag{16}$$

因此,根据命题 1 有

$$\bar{B} = \bar{R}_\mu \bar{\sigma}^\mu \equiv 0. \tag{17}$$

利用文献[14]中求 Birkhoff 表示的直接方法一,$\bar{R}_\mu$ 应满足的方程(14)化为

$$\frac{\partial \bar{R}_\mu}{\partial t} = 0, \tag{18}$$

即 $\bar{R}_\mu$ 只能为 $\bar{a}^\nu$ 的函数,而不能显含时间 t,

$$\bar{R}_\mu = G_\mu(\bar{a}) = G_\mu(I). \tag{19}$$

换言之,在变量 $\bar{a}^\mu$(即第一积分 I^μ)张成的空间中,系统(16)的 Birkhoff 表示中的 Birkhoff 函数 $\bar{B}$ 为零,而 Birkhoff 函数组为第一积分的任意函数

$$\bar{R}_\mu = G_\mu(I). \tag{20}$$

将系统的 Pfaff 形式由 $\bar{a}$ 空间换回 a 空间,即

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \bar{R}_\mu \mathrm{d}\bar{a}^\mu \\ &= G_\mu(I)\,\mathrm{d}I^\mu \\ &= R_\mu \mathrm{d}a^\mu - B\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{21}$$

就得到(11)和(12)式,亦即导出了 Hojman 方法. 下面直接把变量 $\bar{a}^\mu$ 张成的空间称为 I 空间.

3. Birkhoff 对称性与 Birkhoff 守恒量的新证明

首先,引入文献[5]中相关论述. 对系统(1),令

$$S_\mu = \Omega_{\mu\nu}\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t}. \tag{22}$$

若对另一组动力系统特征函数 $\bar{B}(t, \boldsymbol{a})$ 和 $\bar{R}_\mu(t, \boldsymbol{a})$,令

$$\bar{S}_\mu = \bar{\Omega}_{\mu\nu}\dot{a}^\nu - \frac{\partial \bar{B}}{\partial a^\mu} - \frac{\partial \bar{R}_\mu}{\partial t}, \tag{23}$$

其中

$$\bar{\Omega}_{\mu\nu} = \frac{\partial \bar{R}_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial \bar{R}_\mu}{\partial a^\nu}. \tag{24}$$

对应地,可以引入 $\bar{\Omega}^{\mu\nu}$.

定义[5] 如果从 $S_\mu = 0$ $(\mu = 1, \cdots, 2n)$ 可以得到 $\bar{S}_\nu = 0$ $(\nu = 1, \cdots, 2n)$,反之亦然,那么这种对称性就称为 Birkhoff 系统的 Birkhoff 对称性.

从上述定义出发,可以导出下列判据.

判据[5] 如果两组动力学特征函数 B, R_μ 和 $\bar{B}$, $\bar{R}_\mu$,满足

$$\Omega_{\mu\nu}\bar{\Omega}^{\nu\rho}\Big(\frac{\partial \bar{B}}{\partial a^\rho} + \frac{\partial \bar{R}_\rho}{\partial t}\Big) = \frac{\partial B}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R_\mu}{\partial t}$$

$$(\mu, \nu, \rho = 1, \cdots, 2n), \tag{25}$$

则对应的对称性是 Birkhoff 系统的 Birkhoff 对称性.

其次，利用 Hojman 方法构造具有 Birkhoff 对称性的两组 Birkhoff 表示. 将(12)式代入(2)式，并考虑(10)式得

$$\begin{aligned}\Omega_{\mu\nu} &= \frac{\partial G_\alpha}{\partial a^\mu}\frac{\partial I^\alpha}{\partial a^\nu} - \frac{\partial G_\alpha}{\partial a^\nu}\frac{\partial I^\alpha}{\partial a^\mu} + G_\alpha\frac{\partial^2 I^\alpha}{\partial a^\mu \partial a^\nu} - G_\alpha\frac{\partial^2 I^\alpha}{\partial a^\nu \partial a^\mu}\\ &= \frac{\partial G_\alpha}{\partial I^\beta}\frac{\partial I^\beta}{\partial a^\mu}\frac{\partial I^\alpha}{\partial a^\nu} - \frac{\partial G_\alpha}{\partial I^\beta}\frac{\partial I^\beta}{\partial a^\nu}\frac{\partial I^\alpha}{\partial a^\mu}\\ &= \left(\frac{\partial G_\beta}{\partial I^\alpha} - \frac{\partial G_\alpha}{\partial I^\beta}\right)\frac{\partial I^\alpha}{\partial a^\mu}\frac{\partial I^\beta}{\partial a^\nu}\\ &= \Gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial I^\alpha}{\partial a^\mu}\frac{\partial I^\beta}{\partial a^\nu}.\end{aligned} \tag{26}$$

类似地，由(10)—(12)式得

$$\frac{\partial B}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R_\mu}{\partial t} = -\Gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial I^\alpha}{\partial a^\mu}\frac{\partial I^\beta}{\partial t}. \tag{27}$$

对同一个 Birkhoff 系统的同一组 $2n$ 个独立的第一积分 I^μ，引入不同于 $G_\alpha(I)$ 的函数 $\bar{G}_\alpha(I)$. 设对于 $\bar{G}_\alpha$，条件(9)式仍成立，即

$$\det(\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}) = \det\left(\frac{\partial \bar{G}_\beta}{\partial I^\alpha} - \frac{\partial \bar{G}_\alpha}{\partial I^\beta}\right) \neq 0. \tag{28}$$

利用(11)和(12)式，得到另一组动力学特征函数

$$\bar{B} = -\bar{G}_\alpha\frac{\partial I^\alpha}{\partial t}, \tag{29}$$

$$\bar{R}_\mu = \bar{G}_\alpha\frac{\partial I^\alpha}{\partial a^\mu}. \tag{30}$$

同样可以导出

$$\bar{\Omega}_{\mu\nu} = \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}\frac{\partial I^\alpha}{\partial a^\mu}\frac{\partial I^\beta}{\partial a^\nu}, \tag{31}$$

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial a^\mu} + \frac{\partial \bar{R}_\mu}{\partial t} = -\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}\frac{\partial I^\alpha}{\partial a^\mu}\frac{\partial I^\beta}{\partial t}. \tag{32}$$

由(10)式可知，$\Gamma_{\alpha\beta}$是定义在由 I^μ 张成的函数空间中，类似于二阶反对称协变张量 $\Omega_{\mu\nu}$ 的量，由于满足条件(9)式，故可以引入对应的逆变形式 $\Gamma^{\alpha\beta}$，且满足条件

$$\Gamma^{\alpha\beta}\Gamma_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma. \tag{33}$$

由(26)式可以导出 Birkhoff 逆变张量为

$$\Omega^{\mu\nu} = \frac{\partial a^\mu}{\partial I^\alpha}\frac{\partial a^\nu}{\partial I^\beta}\Gamma^{\alpha\beta}. \tag{34}$$

同理，有

$$\bar{\Omega}^{\mu\nu} = \frac{\partial a^\mu}{\partial I^\alpha}\frac{\partial a^\nu}{\partial I^\beta}\bar{\Gamma}^{\alpha\beta}. \tag{35}$$

将(26)，(27)，(32)和(35)式代入(25)式，直接计算证明 Birkhoff 对称性判据成立，即由(11)和(12)式导出的 B 和 R_μ，与由(29)和(30)式导出的 $\bar{B}$ 和 $\bar{R}_\mu$ 之间构成系统的 Birkhoff 对称性. 这说明 Birkhoff 对称性可以看作系统在 I 空间中函数 $G_\alpha(I)$ 变换下的不变性.

第三，给出利用 Birkhoff 对称性能导出守恒量的新证明[5]. 将(25)式代入(22)式得到

$$S_\mu = \Omega_{\mu\nu}\bar{\Omega}^{\nu\rho}\bar{S}_\rho. \tag{36}$$

定义

$$\Lambda^\rho_\mu = \bar{\Omega}_{\mu\nu}\Omega^{\nu\rho}, \tag{37}$$

将(31)和(34)式代入(37)式得到

$$\Lambda^\rho_\mu = \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}\Gamma^{\beta\gamma}\frac{\partial I^\alpha}{\partial a^\mu}\frac{\partial a^\rho}{\partial I^\gamma}. \tag{38}$$

由(38)式得

$$t_r\Lambda = \Lambda^\mu_\mu = \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}\Gamma^{\beta\alpha}. \tag{39}$$

将(39)式两边对时间 t 求全微商得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t_r\Lambda) = \dot{\bar{\Gamma}}_{\alpha\beta}\Gamma^{\beta\alpha} + \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}\dot{\Gamma}^{\beta\alpha}. \tag{40}$$

容易证明

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\Gamma}}_{\alpha\beta} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \bar{G}_\beta}{\partial I^\alpha} - \frac{\partial \bar{G}_\alpha}{\partial I^\beta}\right)\\ &= \left(\frac{\partial^2 \bar{G}_\beta}{\partial I^\gamma \partial I^\alpha} - \frac{\partial^2 \bar{G}_\alpha}{\partial I^\gamma \partial I^\beta}\right)\dot{I}^\gamma\\ &= 0.\end{aligned} \tag{41}$$

同理，有

$$\dot{\Gamma}_{\alpha\beta} = 0. \tag{42}$$

又由(33)和(42)式可以得到

$$\dot{\Gamma}^{\alpha\beta} = 0. \tag{43}$$

将(41)和(43)式代入(40)式得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t_r\Lambda) = 0. \tag{44}$$

进一步，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t_r\Lambda^m) = 0, \tag{45}$$

其中 m 为正整数. 由此得到命题 2.

命题 2[5]　由 Birkhoff 系统的 Birkhoff 对称性，导出守恒量

$$t_r\Lambda^m = \text{const}. \tag{46}$$

其中 m 为任意正整数.

文献[5]在结论中指出，Birkhoff 守恒量仅与 Birkhoff 张量 $\Omega_{\alpha\beta}$ 和 $\bar{\Omega}^{\alpha\beta}$ 相关，根据(39)式，Birkhoff 守恒量也仅与 I 空间中对应的二阶反对称张量 $\Gamma_{\alpha\beta}$ 和 $\bar{\Gamma}^{\alpha\beta}$ 相关. 对此问题可以给出如下说明：在(11)和

(12)式构成的 $2n+1$ 个方程中,独立的方程只有 $2n$ 个,给定 $2n$ 个 $G_\alpha(I)$,即可以求得 $2n+1$ 个 R_μ 和 B;反之,给定 $2n$ 个 R_μ,即可利用(12)式 $2n$ 个方程和第一积分 I^μ 独立性条件(8)式,解出 $2n$ 个 G_α,再代入(11)式即可求得 B,这就意味着系统 $2n+1$ 个动力学特征函数 R_μ 和 B 中,只有 $2n$ 个函数是独立的,若选定了 R_μ,则 B 可以随之确定. Birkhoff 对称性是同一个系统不同的 Birkhoff 表示之间的对称性,由以上所述可知,这种对称性只与 R_μ 和 $\bar{R}_\nu$ 相关,而不直接涉及 B 和 $\bar{B}$,这是正常的.

最后,讨论系统规范等效变换对 Birkhoff 对称性的影响. 设系统存在规范等效变换

$$\begin{aligned} R_\mu \to R'_\mu &= R_\mu + \frac{\partial F(t,\boldsymbol{a})}{\partial a^\mu}, \\ B \to B' &= B - \frac{\partial F(t,\boldsymbol{a})}{\partial t}. \end{aligned} \tag{47}$$

在此变换下, Birkhoff 张量 $\Omega_{\mu\nu}$ 不变, Birkhoff 方程(1)或(4)也不变,Birkhoff 对称性仅与 Birkhoff 张量有关,表明这种对称性以及相关的守恒量也与规范变换无关.

命题 3 Birkhoff 系统的规范等效变换对系统的 Birkhoff 对称性以及由此导出的守恒量没有影响.

4. 应用举例

已知二阶 Birkhoff 系统两个独立的第一积分

$$\begin{aligned} I^1 &= a^2 + \gamma a^1, \\ I^2 &= a^2 e^{\gamma t}, \end{aligned} \tag{48}$$

取 I^1 和 I^2 的两个函数

$$\begin{aligned} G_1 &= I^2, \\ G_2 &= 0 \end{aligned} \tag{49}$$

满足条件(9)式,由(11)和(12)式得

$$\begin{aligned} B &= 0, \\ R_1 &= \gamma a^2 e^{\gamma t}, \\ R_2 &= a^2 e^{\gamma t}. \end{aligned} \tag{50}$$

Birkhoff 张量为

$$(\Omega_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma e^{\gamma t} \\ \gamma e^{\gamma t} & 0 \end{pmatrix}. \tag{51}$$

逆变张量为

$$(\Omega^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\gamma} e^{-\gamma t} \\ -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma t} & 0 \end{pmatrix}. \tag{52}$$

根据(10)式,有

$$(\Gamma_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{53}$$

由(33)式得到逆变形式

$$(\Gamma^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{54}$$

引入 I^1 和 I^2 的另外两个函数

$$\begin{aligned} \bar{G}_1 &= 0, \\ \bar{G}_2 &= I^1 I^2, \end{aligned} \tag{55}$$

则

$$\begin{aligned} (\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}) &= \begin{pmatrix} 0 & I^2 \\ -I^2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & a^2 e^{\gamma t} \\ -a^2 e^{\gamma t} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{56}$$

也满足条件(9)式,由(11)和(12)式得

$$\begin{aligned} \bar{B} &= -\gamma a^2 I^1 I^2 e^{\gamma t} \\ &= -\gamma (a^2)^2 (a^2 + \gamma a^1) e^{2\gamma t}, \\ \bar{R}_1 &= 0, \\ \bar{R}_2 &= I^1 I^2 e^{\gamma t} \\ &= a^2 (a^2 + \gamma a^1) e^{2\gamma t}. \end{aligned} \tag{57}$$

Birkhoff 张量为

$$(\bar{\Omega}_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma a^2 e^{2\gamma t} \\ -\gamma a^2 e^{2\gamma t} & 0 \end{pmatrix}. \tag{58}$$

Birkhoff 逆变张量为

$$(\bar{\Omega}^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\gamma a^2} e^{-2\gamma t} \\ \frac{1}{\gamma a^2} e^{-2\gamma t} & 0 \end{pmatrix}. \tag{59}$$

由(56)式可以得到

$$(\bar{\Gamma}^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{a^2} e^{-\gamma t} \\ \frac{1}{a^2} e^{-\gamma t} & 0 \end{pmatrix}. \tag{60}$$

由(37)式得到

$$(\Lambda_\mu^\rho) = \begin{pmatrix} -a^2 e^{\gamma t} & 0 \\ 0 & -a^2 e^{\gamma t} \end{pmatrix}, \tag{61}$$

$$\begin{aligned} t_r \Lambda &= -2a^2 e^{\gamma t} \\ &= \mathrm{const}. \end{aligned} \tag{62}$$

将(54)和(56)式代入(39)式可得

$$\begin{aligned} t_r \Lambda &= \bar{\Gamma}_{\alpha\beta} \Gamma^{\beta\alpha} \\ &= -2a^2 e^{\gamma t}. \end{aligned} \tag{63}$$

(63)式与(62)式相同.

最后应当指出,若将(50),(51),(57)和(59)式代入(25)式,可以直接证明 B,R_μ 和 $\bar{B},\bar{R}_\mu$ 满足 Birkhoff 对称性判据.

5. 结 论

本文对构造 Birkhoff 表示的 Hojman 方法进行了研究. 利用该方法对 Birkhoff 对称性和守恒量给出了新的证明和相关说明. 引入由 $2n$ 个独立的第一积分 I^μ 张成的空间以及由 a^μ 到 I^μ 的变换(15)式,并利用文献[14]的结果,对 Hojman 方法给出了新的证明和说明. 指出利用 Hojman 方法构建的 Birkhoff 表示是满足条件(13)式的一类特殊表示,并根据 Hojman 方法以及引入的 I 空间概念,说明 Birkhoff 对称性可以看作系统在 I 空间中 Birkhoff 函数组 $G_\alpha(I)$ 变换下的不变性,同时给出 Birkhoff 守恒量的一个新证明. 利用 Hojman 方法说明 Birkhoff 系统 $2n+1$ 个动力学特征函数 R_μ 和 B 中只有 $2n$ 个函数是独立的,如果给定 $2n$ 个 R_μ,则 B 可以导出,从而对文献[5]中指出的 Birkhoff 守恒量仅与 Birkhoff 张量相关的问题作出了一种解释. 同时,还指出了 Birkhoff 对称性和守恒量在 Birkhoff 规范变换下是不变的.

[1] Santilli R M 1983 *Foundations of Theoretical Mechanics* (Ⅱ) (New York: Springer-Verlag)

[2] Mei F X, Shi R C, Zhang Y F, Wu H B 1996 *Dynamics of Birkhoffian System* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔、史荣昌、张永发、吴惠彬 1996 Birkhoff 系统动力学 (北京:北京理工大学出版社)]

[3] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量 (北京:北京理工大学出版社)]

[4] Luo S K, Zhang Y F 2008 *Advances in the Study of Dynamics of Constrained Systems* (Beijing: Science Press) pp288—415 (in Chinese) [罗绍凯、张永发 2008 约束系统动力学研究进展 (北京:科学出版社) 第 288—415 页]

[5] Mei F X, Gang T Q, Xie J F 2006 *Chin. Phys.* **15** 1678

[6] Mei F X 2009 *Adv. Mech.* **39** 37 (in Chinese) [梅凤翔 2009 力学进展 **39** 37]

[7] Mei F X 1993 *Sci. China* A **36** 1456

[8] Zhang Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 461 (in Chinese) [张　毅 2002 物理学报 **51** 461]

[9] Gu S L, Zhang H B 2004 *Chin. Phys.* **13** 979

[10] Zhang R C, Chen X W, Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 12

[11] Xu X J, Mei F X, Qin M C 2004 *Chin. Phys.* **13** 1999

[12] Zhang Y 2002 *Chin. Phys.* **11** 437

[13] Hojman S, Urrutia L F 1981 *J. Math. Phys.* **22** 1986

[14] Ding G T 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7415 (in Chinese) [丁光涛 2008 物理学报 **57** 7415]

Hojman method for construction of Birkhoffian representation and the Birkhoff symmetry

Ding Guang-Tao

(*College of Physics and Electronic Information, Anhui Normal University, Wuhu* 241000, *China*)

(Received 13 September 2009; revised manuscript received 12 October 2009)

Abstract

The Hojman method for construction of the Birkhoffian representation is discussed. By using Hojman method, the Birkhoff symmetry is restudied. A new idea of this symmetry is presented. A new proof of the Birkhoff conserved quantity is given. It is shown that the Birkhoff symmetry depends only on the Birkhoff tensors. An example is given to show the application of the result.

Keywords: Birkhoffian system, symmetry, conserved quantity, Hojman method

PACC: 0320