第 59 卷 第 6 期 2010 年 6 月
1000-3290/2010/59(06)/3648-06
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol. 59, No. 6, June, 2010

一类相对转动非线性动力学系统周期解的唯一性与精确周期解*

王 坤[1)2)†] 关新平[2)] 乔杰敏[1)]
1)(燕山大学理学院, 秦皇岛 066004)
2)(燕山大学电气工程学院, 秦皇岛 066004)
(2009 年 6 月 6 日收到;2009 年 12 月 10 日收到修改稿)

研究了一类具有线性刚度、非线性阻尼力和强迫周期力项的相对转动非线性动力学系统周期解的唯一性和精确周期解. 讨论了一类自治系统极限环的唯一性与稳定性. 应用定性分析方法,给出了一类相对转动非线性动力学系统具有唯一周期解的必要条件,并在一定条件下得到了系统的一类精确周期解.

关键词: 相对转动, 非线性动力系统, 极限环, 周期解
PACC: 0340D

1. 引 言

在研究转动运动和转动力学过程中, Carmeli[1,2] 于 1985 年建立转动相对论力学理论, 1998 年 Luo[3] 建立转动相对论分析力学理论,人们还深入研究了转动相对论系统的代数结构与对称性[4,5],具有质量分离或并入的变质量系统的转动相对论理论[6—8]、转动相对论系统的动力学的积分理论与分析静力学理论[9,10] 等方面也取得了进展. 近年来, 转动相对论 Birkhoff 系统动力学的基本理论、几何理论及稳定性等方面的研究取得了成果[11—20]. 文献[21—27]基于相对性原理,建立了弹性转轴任意两个横截面间的相对转动线性和非线性动力学模型并对系统进行了定性和定量分析,其中文献[21—23]分别建立了线性常系数与变系数相对转动系统的动力学模型,并得到了系统的稳定性与精确积分解,文献[24—27]分别建立了相对转动非线性动力学系统的有关模型,并得到了系统的稳定性与近似解. 文献[28]系统地研究了一类相对转动非线性动力学系统的混沌运动表现.

相对转动非线性动力学系统具有复杂的非线性动力学行为,而文献[24—28]的有关研究均没有讨论相关的非线性动力学系统周期解的存在性、有界性、唯一性及精确周期解. 本文针对一类具有线性刚度、非线性阻尼力和强迫周期力项的相对转动非线性动力学系统,应用 Yoshizawa 关于非线性系统周期解唯一性的三组条件,证明了一类相对转动非线性动力学系统周期解的存在性、有界性和唯一性. 得到了该系统的一类自治系统极限环的唯一性与稳定性的必要条件,并在一定条件下得到了系统的一类精确周期解.

类似文献[28]的推导过程,在阻尼力项为齐次多项式的条件下,可以建立如下一类弹性转轴任意两端面间的相对转动系统的非线性动力学模型:

$$\ddot{x} + \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}\dot{x}^{2k+1} + bx = F(t). \tag{1}$$

这里 $x = \theta_2 - \theta_1$ 为相对转角,其中 θ_1, θ_2 分别为弹性转轴两端面的转角; $F(t) = \dfrac{6}{J}(T_2 - T_1)$,其中 J 为弹性转轴的转动惯量, T_1, T_2 分别为弹性转轴两端面的外加力矩,且假定 $F(t)$ 为连续且以 ω 为周期的函数.

本文的研究受到了文献[29]方法的启发,但该文献在应用 Yoshizawa 关于非线性系统周期解唯一性的三组条件[30] 讨论一类 Duffing 系统周期解的唯一性时,所构造的辅助函数 $\phi(x,u,y,v)$ 并不满足

* 国家杰出青年科学基金(批准号:60525303)资助的课题.
† E-mail: wangkun8992@yahoo.com.cn

Yoshizawa 关于非线性系统周期解的唯一性的第三组条件中的第一、第四和第五方面的要求，而本文讨论的要点之一就是构造了与文献[29]不同的辅助函数，从而得到了系统(1)的周期解的唯一性.

2. 一类自治系统极限环的唯一性

取系统(1)的一类自治微扰系统

$$\ddot{x}+\varepsilon(\alpha\dot{x}+\beta\dot{x}^3)+x=0. \tag{2}$$

方程(2)等价于

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y,\\ \dot{y}&=-x-\varepsilon(\alpha y+\beta y^3).\end{aligned} \tag{3}$$

当 $\varepsilon=0$ 时，方程(3)有闭轨族 $L_h:\frac{1}{2}(x^2+y^2)=h$，$h>0$. 方程(3)的首阶 Melnikov 函数为

$$\begin{aligned}M(h)&=\oint_{L_h}-(\alpha y-\beta y^3)\mathrm{d}x\\ &=\iint_{x^2+y^2\leqslant 2h}(\alpha+3\beta y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\frac{1}{2}h(3\beta h+8\alpha).\end{aligned}$$

于是当 $\alpha\beta<0$ 时，M 有单根，即 $h_0=-\frac{8\alpha}{3\beta}$，从而当 ε 充分小时，方程(3) 在圆周 $L_{h_0}:x^2+y^2=2h_0$ 附近有唯一极限环 $L(\varepsilon)$. 由于

$$\begin{aligned}\sigma_0&=\oint_{L_{h_0}}-(\alpha+3\beta y^2)\mathrm{d}t\\ &=-2\pi\alpha-3\beta\oint_{L_{h_0}}y^2\mathrm{d}t\\ &=-2\pi\alpha+3\beta\oint_{L_{h_0}}y\mathrm{d}x\\ &=-2\pi\alpha+3\beta\iint_{x^2+y^2\leqslant 2h_0}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=-18\pi\alpha<0,\end{aligned}$$

故对充分小的 $\varepsilon>0$，且 $\alpha>0$ 时，$L(\varepsilon)$ 是稳定的极限环.

定理 1　对充分小的 $\varepsilon>0$，且 $\alpha>0,\beta<0$ 时，系统(3) 有唯一稳定的极限环 $L(\varepsilon)$.

3. 系统周期解的存在性

为了论证的简单性，同时不失一般性，针对下列系统展开讨论：

$$\ddot{x}+a_1\dot{x}+a_3\dot{x}^3+bx=F(t), \tag{4}$$

其中 $a_1>0,a_3\geqslant 0,b>0,F(t)$ 为连续且以 ω 为周期的函数.

设

$$\begin{aligned}f(y)&=a_1y+a_3y^3,\\ g(x)&=bx,\end{aligned}$$

显然有

$$\begin{aligned}\lim_{|y|\to+\infty}f(y)\operatorname{sgn}(y)&=\lim_{|y|\to+\infty}(a_1|y|+a_3|y|^3)\\ &=+\infty,\\ \lim_{|x|\to+\infty}g(x)\operatorname{sgn}(x)&=\lim_{|x|\to+\infty}(b|x|)=+\infty.\end{aligned}$$

因此，根据 Reuter 的周期解存在定理[30]，系统(4)至少存在一个以 ω 为周期的周期解.

4. 利用 Yoshizawa 关于周期解唯一性的三组条件，证明系统周期解的唯一性

系统(4)等价于方程组

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y,\\ \dot{y}&=-a_1y-a_3y^3-bx+F(t).\end{aligned} \tag{5}$$

令

$$\begin{aligned}f(t,x,y)&=y,\\ g(t,x,y)&=-a_1y-a_2y^3-bx+F(t),\end{aligned}$$

显然 f,g 在 $\Delta_1:|x|<+\infty,|y|<+\infty$ 及 $0\leqslant t<+\infty$ 上连续，Yashizawa 关于周期解唯一性定理中的第一组假设条件[30]成立.

给定方程

$$\ddot{x}+f(\dot{x})+g(x)=F(t), \tag{6}$$

其中 $g(x)$ 连续，当 $|x|\to+\infty$ 时，$g(x)\operatorname{sgn}(x)\to+\infty$；$f(y)$ 连续，当 $|y|\to+\infty$ 时，$f(y)\operatorname{sgn}(y)\to+\infty$；$F(t)$ 在$(0,+\infty)$内连续有界，则存在常数 $A>0,B>0$，使得对于方程(6)的任意解 $x=x(t)$，存在相应 T_0，当 $t>T_0$ 时，有

$$\begin{aligned}|x(t)|&<A,\\ |\dot{x}(t)|&<B.\end{aligned} \tag{7}$$

对于方程(4)，由于 $F(t)$ 连续有界并结合周期解存在的讨论，可知存在常数 $A>0,B>0$，对于方程的任意解 $x=x(t)$，存在相应 T_0，当 $t>T_0$ 时，有 $|x(t)|<A,|\dot{x}(t)|<B$.

对于相对转动动力学方程(4)的等价方程组(5)，显然有 $|x(t)|<A,|y(t)|=|\dot{x}(t)|<B$，Yashizawa 关于周期解唯一性定理中的第二组假设

条件成立.

对于方程组(5),在给定区域Δ_2:$|x|\leqslant A$,$|u|\leqslant A$,$|y|\leqslant B$,$|v|\leqslant B$上,构造辅助函数

$$E(x,u,y,v)=\frac{1}{2}p(x-u)^2+\frac{1}{2}q(y-v)^2 + r(x-u)(y-v), \tag{8}$$

其中p,q,r均为大于零的常数,且满足$p=bq$,$r^2<pq$.

下面证明$E(x,u,y,v)$满足Yashizawa关于周期解唯一性定理中的第三组假设条件,该组条件的论证分为五个方面进行.

(ⅰ)当$|x-u|+|y-v|>0$时,$E(x,u,y,v)>0$.

证明 当$(x-u)$和$(y-v)$不同时为零,将$E(x,u,y,v)$看作以$(x-u)$和$(y-v)$为变量的二次型,则该二次型的主子式为

$$\frac{1}{2}p>0,$$

$$\begin{vmatrix}\frac{1}{2}p & \frac{1}{2}r\\ \frac{1}{2}r & \frac{1}{2}q\end{vmatrix}=\frac{1}{4}(pq-r^2)>0.$$

故$E(x,u,y,v)$为正定二次型,得$E(x,u,y,v)>0$.

(ⅱ)当$|x-u|+|y-v|=0$时,$E(x,u,y,v)=0$.

证明 将$|x-u|+|y-v|=0$代入$E(x,u,y,v)$,得$E(x,u,y,v)=0$.

(ⅲ)满足Lipschitz条件,即存在$L>0$,使

$$|E(x,u,y,v)-E(x_1,u_1,y_1,v_1)| \leqslant L(|x-x_1|+|u-u_1|+|y-y_1|+|v-v_1|)$$

成立.

证明 由(8)式可得

$$\begin{aligned}&|E(x,u,y,v)-E(x_1,u_1,y_1,v_1)|\\ &=\Big|\frac{1}{2}p(x-u)^2+\frac{1}{2}q(y-v)^2+r(x-u)(y-v)\\ &\quad-\frac{1}{2}p(x_1-u_1)^2-\frac{1}{2}q(y_1-v_1)^2\\ &\quad-r(x_1-u_1)(y_1-v_1)\Big|\\ &=\Big|\frac{1}{2}p(x+x_1+u+u_1)(x-x_1-u+u_1)\\ &\quad+\frac{1}{2}q(y+y_1+v+v_1)(y-y_1-v+v_1)\\ &\quad+r[(x-u)(y-y_1-v+v_1)\\ &\quad+(y_1-v_1)(x-x_1-u+u_1)]\Big|\\ &\leqslant 2pA(|x-x_1|+|u-u_1|)\\ &\quad+2qB(|y-y_1|+|v-v_1|)\\ &\quad+2rA(|y-y_1|+|v-v_1|)\\ &\quad+2rB(|x-x_1|+|u-u_1|),\end{aligned}$$

令

$$L=\max(2pA,2qB,2rA,2rB),$$

则

$$\begin{aligned}&|E(x,u,y,v)-E(x_1,u_1,y_1,v_1)|\\ &\leqslant L(|x-x_1|+|u-u_1|\\ &\quad+|y-y_1|+|v-v_1|),\end{aligned}$$

满足Lipschitz条件.

(ⅳ)对于Δ_2内任意一点(x,u,y,v),有

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\{E[x+\varepsilon\dot{x}(t,x,y),\\ &u+\varepsilon\dot{x}(t,u,v),y+\varepsilon\dot{y}(t,x,y),\\ &v+\varepsilon\dot{y}(t,u,v)]-E(x,u,y,v)\}\leqslant 0.\end{aligned}$$

(ⅴ)对任意的$C_\varepsilon>0$,对应着一个$\mu(C_\varepsilon)$,使得对满足$|x-u|+|y-v|\geqslant C_\varepsilon$的每个点$(x,u,y,v)\in\Delta_2$,都有

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\{E[x+\varepsilon\dot{x}(t,x,y),u+\varepsilon\dot{x}(t,u,v),\\ &y+\varepsilon\dot{y}(t,x,y),\\ &v+\varepsilon\dot{y}(t,u,v)]-E(x,u,y,v)\}\leqslant\mu(C_\varepsilon)<0.\end{aligned}$$

以下对(ⅳ)与(ⅴ)两个方面的结论统一进行证明.

证明 要证明(ⅳ)和(ⅴ)两个方面的结论成立,只需证明下式是以$(x-u)$和$(y-v)$为变量的负定二次型:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial E}{\partial x}\dot{x}(t,x,y)+\frac{\partial E}{\partial u}\dot{x}(t,u,v)\\ &+\frac{\partial E}{\partial y}\dot{y}(t,x,y)+\frac{\partial E}{\partial v}\dot{y}(t,u,v)\\ &=[p(x-u)+r(y-v)](y-v)\\ &\quad+[q(y-v)+r(x-u)][-a_1(y-v)\\ &\quad-a_3(y^3-v^3)-b(x-u)]\\ &=-\{q[a_1+a_3(y^2+v^2+yv)]-r\}(y-v)^2\\ &\quad-br(x-u)^2+\{p-bq-r[a_1+a_3(y^2+v^2\\ &\quad+yv)]\}(x-u)(y-v).\end{aligned}\tag{9}$$

当$r<a_1q$时,且注意到y^2+v^2+yv的非负性,则其一阶主子式$-\{q[a_1+a_3(y^2+v^2+yv)]-r\}<0$,$-br<0$;注意到$p=bq$,且$r$很小和$p$很大时,其二阶主子式

$$\begin{vmatrix} -br & -\frac{1}{2}r[a_1+a_3(y^2+v^2+yv)] \\ -\frac{1}{2}r[a_1+a_3(y^2+v^2+yv)] & -\{q[a_1+a_3(y^2+v^2+yv)-r]\} \end{vmatrix}$$

$$=rbq[a_1+a_3(y^2+v^2+yv)-r]-\frac{1}{4}r^2[a_1+a_3(y^2+v^2+yv)]^2$$

$$>a_1rp-r^2p-\frac{1}{4}r^2[a_1+2a_3(A^2+B^2)]^2>0.$$

因此二次型(9)式为负定的二次型，故(ⅳ)和(ⅴ)两个方面的结论成立.

由以上五个方面的证明可知，解的稳定性条件成立，即 Yashizawa 关于周期解唯一性定理中的第三组假设条件成立.

综上所述，系统(4)有唯一的周期解，且其他的解都渐进趋于这个周期解. 不难看出，以上的推导过程对系统(1)也成立.

定理 2　在系统(1)中，如果 $a_1>0, a_{2k+1}\geqslant 0(k=1,2,\cdots,n)$，$b>0$，$F(t)$ 为连续的以 ω 为周期的函数，则该系统存在唯一的以 ω 为周期的稳定周期解.

5. 一类系统的精确周期解

在系统(4)中，令

$$F(t)=\mu\sin(3\omega t+3\theta_0)-\lambda\sin\omega t,$$

则得

$$\ddot{x}+a_1\dot{x}+a_3\dot{x}^3+bx =\mu\sin(3\omega t+3\theta_0)-\lambda\sin\omega t. \tag{10}$$

令

$$x=E\cos(\omega t+\theta_0), \tag{11}$$

并代入方程(10)得

$$\begin{aligned}
&\ddot{x}+a_1\dot{x}+a_3\dot{x}^3+bx \\
&=-E\omega^2\cos(\omega t+\theta_0)-a_1E\omega\sin(\omega t+\theta_0) \\
&\quad -a_3\frac{E^3\omega^3}{4}[3\sin(\omega t+\theta_0)-\sin(3\omega t+3\theta_0)] \\
&\quad +bE\cos(\omega t+\theta_0) \\
&=\Big[(-E\omega^2+bE)\cos\theta_0 \\
&\quad -\left(a_1E\omega+\frac{3}{4}a_3E^3\omega^3\right)\sin\theta_0\Big]\cos\omega t \\
&\quad +\Big[(E\omega^2-bE)\sin\theta_0 \\
&\quad -\left(a_1E\omega+\frac{3}{4}a_3E^3\omega^3\right)\cos\theta_0\Big]\sin\omega t \\
&\quad +a_3\frac{E^3\omega^3}{4}\sin(3\omega t+3\theta_0) \\
&=\mu\sin(3\omega t+3\theta_0)-\lambda\sin\omega t.
\end{aligned} \tag{12}$$

由(12)式得

$$\begin{aligned}
&(-E\omega^2+bE)\cos\theta_0-\left(a_1E\omega+\frac{3}{4}a_3E^3\omega^3\right)\sin\theta_0=0, \\
&\left(a_1E\omega+\frac{3}{4}a_3E^3\omega^3\right)\cos\theta_0+(E\omega^2-bE)\sin\theta_0=-\lambda, \\
&\frac{1}{4}a_3E^3\omega^3=\mu.
\end{aligned} \tag{13}$$

由(13)式得

$$\begin{aligned}
&\cos\theta_0=\frac{\lambda\left(a_1E\omega+\frac{3}{4}a_3E^3\omega^3\right)}{(bE-E\omega^2)^2+\left(a_1E\omega+\frac{3}{4}a_3E^3\omega^3\right)^2}, \\
&\sin\theta_0=\frac{\lambda(bE-E\omega^2)}{(bE-E\omega^2)^2+\left(a_1E\omega+\frac{3}{4}a_3E^3\omega^3\right)^2}, \\
&E=\omega^{-1}(4a_3^{-1}\mu)^{1/3}.
\end{aligned} \tag{14}$$

因此，对于 $a_1>0, a_3>0, b>0, \mu>0$，取

$$\lambda=E\left[(b-\omega^2)^2+\left(a_1\omega+\frac{3}{4}a_3E^2\omega^3\right)^2\right]^{1/2},$$

且 θ_0 和 E 满足(14)式时，则方程(10)有唯一的稳定精确周期解

$$x=E\cos(\omega t+\theta_0).$$

例如，在方程(10)中，取

$$b=\omega^2,$$
$$E=\omega^{-1}(4a_3^{-1}\mu)^{1/3},$$
$$\lambda=a_1E\omega+\frac{3}{4}a_3E^3\omega^3,$$

此时 $\theta_0=0$，则方程

$$\ddot{x}+a_1\dot{x}+a_3\dot{x}^3+\omega^2x=\mu\sin(3\omega t)-\lambda\sin\omega t$$

有唯一的稳定周期解

$$x = \omega^{-1}(4a_3^{-1}\mu)^{1/3}\cos\omega t.$$

6. 结 论

本文针对一类具有线性刚度、非线性阻尼力和强迫周期力项的相对转动非线性动力学系统,应用Yoshizawa关于非线性系统周期解唯一性的三组条件,得到了一类相对转动非线性动力学系统周期解的存在性、有界性和唯一性.应用定性分析方法,得到了该系统的一类自治系统具有稳定的唯一性极限环的必要条件,并在一定条件下求得了系统的一类精确周期解.

[1] Carmeli M 1985 *Found. Phys.* **15** 175

[2] Carmeli M 1986 *Int. J. Theor. Phys.* **15** 89

[3] Luo S K 1998 *Appl. Math. Mech.* **19** 45

[4] Fu J L, Chen X W, Luo S K 1999 *Appl. Math. Mech.* **20** 1266

[5] Fu J L, Chen X W, Luo S K 2000 *Appl. Math. Mech.* **21** 549

[6] Fang J H 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1028 (in Chinese) [方建会 2000 物理学报 **49** 1028]

[7] Fang J H, Zhao S Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 390 (in Chinese) [方建会、赵嵩卿 2001 物理学报 **50** 390]

[8] Fang J H 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1001 (in Chinese) [方建会 2001 物理学报 **50** 1001]

[9] Luo S K, Guo Y X, Chen X W 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2053 (in Chinese) [罗绍凯、郭永新、陈向炜 2001 物理学报 **50** 2053]

[10] Jia L Q 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1039 (in Chinese) [贾利群 2003 物理学报 **52** 1039]

[11] Luo S K 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 449

[12] Luo S K, Chen X W, Guo Y X 2002 *Chin. Phys.* **11** 429

[13] Luo S K, Chen X W, Guo Y X 2002 *Chin. Phys.* **11** 523

[14] Luo S K, Fu J L, Chen X W 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 383 (in Chinese) [罗绍凯、傅景礼、陈向炜 2001 物理学报 **50** 383]

[15] Fu J L, Chen L Q, Xue Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 256 (in Chinese) [傅景礼、陈立群、薛 纭 2003 物理学报 **52** 256]

[16] Zhang K, Feng J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2985 (in Chinese) [张 凯、冯 俊 2005 物理学报 **54** 2985]

[17] Luo S K 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 5 (in Chinese) [罗绍凯 2004 物理学报 **53** 5]

[18] Luo S K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 712 (in Chinese) [罗绍凯 2002 物理学报 **51** 712]

[19] Luo S K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1416 (in Chinese) [罗绍凯 2002 物理学报 **51** 1416]

[20] Luo S K, Chen X W, Fu J L 2001 *Chin. Phys.* **10** 271

[21] Dong Q L, Liu B 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2191 (in Chinese) [董全林、刘 彬 2002 物理学报 **51** 2191]

[22] Dong Q L, Wang K, Zhang C X, Liu B 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 337 (in Chinese) [董全林、王 坤、张春熹、刘 彬 2004 物理学报 **53** 337]

[23] Wang K 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5530 (in Chinese) [王 坤 2005 物理学报 **54** 5530]

[24] Wang K 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3987 (in Chinese) [王 坤 2005 物理学报 **54** 3987]

[25] Zhao W, Liu B 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4543 (in Chinese) [赵 武、刘 彬 2005 物理学报 **54** 4543]

[26] Zhao W, Liu B, Shi P M, Jiang J S 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3852 (in Chinese) [赵 武、刘 彬、时培明、蒋金水 2006 物理学报 **55** 3852]

[27] Shi P M, Liu B 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3678 (in Chinese) [时培明、刘 彬 2007 物理学报 **56** 3678]

[28] Shi P M, Liu B, Hou D X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1321 (in Chinese) [时培明、刘 彬、侯东晓 2008 物理学报 **57** 1321]

[29] Li Y, Yang B J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1994 (in Chinese) [李 月、杨宝俊 2005 物理学报 **54** 1994]

[30] Sansone G, Conti R 1983 *Nonlinear Differential Equations* (Beijing: Science Press) p394 (in Chinese) [桑森 G, 康蒂 R 1983 非线性微分方程(中译本)(北京:科学出版社)第394页]

Precise periodic solutions and uniqueness of periodic solutions of some relative rotation nonlinear dynamic system*

Wang Kun[1)2)†]　Guan Xin-Ping[2)]　Qiao Jie-Min[1)]

1)(*College of Science*, *Yanshan University*, *Qinhuangdao*　066004, *China*)

2)(*College of Electrical Engineering*, *Yanshan University*, *Qinhuangdao*　066004, *China*)

(Received 6 June 2009; revised manuscript received 10 December 2009)

Abstract

The precise periodic solution and uniqueness of periodic solutions of some relative rotation nonlinear dynamical system possessing linear rigidity and nonlinear damping force and forcing periodic force is investigated. Firstly, the stability and uniqueness of limit cycles of a kind of autonomous nonlinear dynamical system are discussed. Secondly, the necessary condition of uniqueness of periodic solutions of the system is presented by using qualitative analysis method. The precise periodic solution of the system is obtained under certain conditions.

Keywords: relative rotation, nonlinear dynamic system, limit cycles, periodic solution

PACC: 0340D

* Project supported by the National Natural Science Foundation for Distinguished Young Scholors of China (Grant No. 60525303).

† E-mail: wangkun8992@yahoo.com.cn