

# Dicke 模型的量子混沌和单粒子相干动力学特性\*

宋立军<sup>1)†</sup> 严冬<sup>1)</sup> 盖永杰<sup>2)</sup> 王玉波<sup>2)</sup>

1) (长春大学理学院, 长春 130022)

2) (长春理工大学理学院, 长春 130022)

(2009 年 8 月 16 日收到; 2009 年 11 月 27 日收到修改稿)

量子化的 Dicke 模型在非旋波近似条件下表现为量子混沌动力学特征. 利用单粒子一阶时间关联函数, 通过数值计算详细考察了 Dicke 模型中单粒子相干动力学特性. 结果表明: 当初始相干态处在混沌区域时, 一阶时间关联函数曲线衰减较快, 而当初始相干态处在规则区域时, 一阶时间关联函数曲线衰减较慢, 单粒子相干动力学对初态具有较强的敏感性, 经典混沌抑制量子相干. 考察单粒子相干动力学在相空间的平均演化性质, 得到一种较好的量子经典对应关系. 最后研究了相空间单粒子相干的整体动力学性质, 更好地揭示了相空间的混沌和规则结构.

**关键词:** Dicke 模型, 非旋波近似, 量子混沌, 单粒子相干

**PACC:** 0365, 0367, 0545, 4250

## 1. 引 言

自从上个世纪中期以来, 人们在许多非线性系统中发现了量子混沌并逐渐认识到其重要性. 关于量子混沌标识问题已经取得一些丰富的研究成果<sup>[1-3]</sup>, 这些成果揭示了量子动力学过程中混沌行为存在的本质. 近年来, 纠缠成为科研工作者的研究热点之一<sup>[4,5]</sup>. 由于纠缠是量子力学的核心和量子信息过程的一种重要资源, 因此可以将纠缠作为量子混沌的一种标识, 从而为量子混沌研究提供一种有效方法<sup>[6,7]</sup>. 除纠缠之外, 自旋压缩作为另外一种纯粹的量子力学效应, 人们最近发现二者之间具有密切关系<sup>[8,9]</sup>. 对于具有某种奇偶性的自旋态, 根据 Kitagawa 和 Ueda<sup>[10]</sup> 的定义, 如果一个态是自旋压缩的, 那么自旋压缩系数与量化两个自旋 1/2 粒子纠缠态的并发度 (concurrence) 就可以建立起一种定量的关系. 纠缠与自旋压缩的关系以及纠缠可以作为量子混沌的一种标识促使我们研究自旋压缩在量子混沌系统中所起的作用. 我们在量子受击陀螺模型描述的自旋系统和 Dicke 模型描述的光与物质相互作用系统中详细考察了自旋压缩的动力学性质, 并尝试将自旋压缩作为量子混沌的一种标识<sup>[11-13]</sup>. 此外, 保真度在有关量子混沌标识研究中

也被广泛讨论<sup>[14-18]</sup>. 文献[19]在研究两分量玻色-爱因斯坦凝聚耦合约瑟夫森系统模型中精确给出了自旋压缩和单粒子相干之间的关系, 这自然使我们想到下面一些问题: 单粒子相干的动力学性质如何? 在量子混沌系统中单粒子相干与量子混沌是否存在一定关系? 能否用单粒子相干来标识量子混沌? 基于以上考虑, 本文对 Dicke 模型的单粒子相干动力学性质进行了详细研究, 得出单粒子相干动力学对初态非常敏感, 利用单粒子相干动力学特性可以更好地揭示相空间规则和混沌结构的结论, 从而为量子混沌研究提供了一种新的有意义的标识手段.

## 2. Dicke 模型

Dicke 模型是描述原子 (单个或多个) 与光场 (单模或多模) 相互作用的典型理论模型<sup>[20]</sup>. 它在许多物理研究领域具有重要应用, 例如原子核物理、量子混沌以及量子耗散等<sup>[21-23]</sup>. 本文考虑描述  $N$  个二能级原子 (量子比特) 和一个单模辐射场相互作用的 Dicke 模型, 通过改变耦合系数来实现旋波近似和非旋波近似. 忽略原子 (量子比特) 之间的相互作用, 将原子系统作为一个大的自旋系统 ( $N = 2j$ ) 来处理. 这时 Dicke 模型的哈密顿量可以写成

\* 国家自然科学基金 (批准号: 10947019) 和吉林省教育厅科学技术研究计划 (批准号: 2009237) 资助的课题.

†E-mail: ccdxslj@126.com

下列形式<sup>[12]</sup>：

$$H = \omega J_z + \omega_0 a^\dagger a + \frac{R}{\sqrt{2j}}(J_+ a + J_- a^\dagger) + \frac{R'}{\sqrt{2j}}(J_+ a^\dagger + J_- a). \quad (1)$$

这里  $\omega$  和  $\omega_0$  分别是  $N$  个二能级原子的跃迁频率和单模光场的频率； $R$  和  $R'$  是原子与场相互作用过程中与偶极近似有关的耦合系数，一般可以通过设置  $R' = 0$  来获得旋波近似； $a$  和  $a^\dagger$  是光场的产生和湮没算符； $J_z$  和  $J_\pm$  是与原子的可观测量有关的赝自旋算符，它们满足  $SU(2)$  李代数，即

$$\begin{aligned} [J_+, J_-] &= 2J_z, \\ [J_z, J_\pm] &= \pm J_\pm. \end{aligned} \quad (2)$$

为了得到一个与(1)式相对应的经典哈密顿量，从而更直观地研究混沌动力学过程，利用 Holstein-Primakoff 变换将 Dicke 模型的量子哈密顿量转换为相应的经典哈密顿量，即采用半经典近似的方法<sup>[23]</sup>。

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{2}}(q_2 + ip_2), \\ a^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}(q_2 - ip_2), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} a^\dagger a &= \frac{1}{2}(p_2^2 + q_2^2); \\ b &= \frac{1}{\sqrt{2}}(q_1 + ip_1), \\ b^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}(q_1 - ip_1), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} b^\dagger b &= \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2); \\ J_+ &= b^\dagger \sqrt{2j - b^\dagger b}, \\ J_- &= \sqrt{2j - b^\dagger b} b, \\ J_z &= b^\dagger b - j. \end{aligned} \quad (5)$$

将(3)–(5)式代入(1)式，得到相应的经典哈密顿量方程

$$\begin{aligned} H(q_1, p_1, q_2, p_2) &= \frac{\omega}{2}(p_1^2 + q_1^2 - 2j) \\ &+ \frac{\omega_0}{2}(p_2^2 + q_2^2) \\ &+ \frac{\sqrt{4j - (p_1^2 + q_1^2)}}{4j} \\ &\times (R_+ p_1 p_2 + R_- q_1 q_2). \end{aligned} \quad (6)$$

这里  $R_\pm = R \pm R'$ 。(6)式的运动方程可以表示为

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \omega p_1 + R_- p_2 \sqrt{\frac{4j - (q_1^2 + p_1^2)}{4j}} \\ &- \frac{p_1}{\sqrt{4j}} \frac{R_- p_1 p_2 + R_+ q_1 q_2}{\sqrt{4j - (q_1^2 + p_1^2)}}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -\omega q_1 + R_+ q_2 \sqrt{\frac{4j - (q_1^2 + p_1^2)}{4j}} \\ &+ \frac{q_1}{\sqrt{4j}} \frac{R_- p_1 p_2 + R_+ q_1 q_2}{\sqrt{4j - (q_1^2 + p_1^2)}}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\dot{q}_2 = \omega_0 p_2 + R_- p_1 \sqrt{\frac{4j - (q_1^2 + p_1^2)}{4j}}, \quad (9)$$

$$\dot{p}_2 = -\omega_0 q_2 - R_+ q_1 \sqrt{\frac{4j - (q_1^2 + p_1^2)}{4j}}. \quad (10)$$

由上述经典动力学方程即可得到经典相空间的庞加莱截面图(图1)。图1显示有两个较大的大规则区，这些区域具有周期性轨道的稳定运动，区域的中心一般为不动点；规则区域外为混沌区域，在混沌区域中运动是不稳定的。

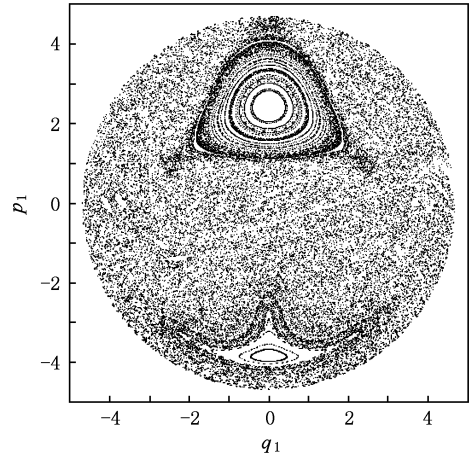


图1 经典相空间的庞加莱截面图  $\omega = \omega_0 = 1, E = 8.5, j = 11/2, q_2 = 0, p_2 > 0, R = 0.5, R' = 0.2$

### 3. 单粒子相干动力学

#### 3.1. 初态对单粒子相干动力学的影响

Dicke 模型的量子和经典动力学之间的关系可以通过选择相干态作为初态来实现，即最小不确定波包集中在与图1对应的经典相空间中。初始量子态选择如下：

$$|\psi(0)\rangle = |\mu\rangle \otimes |\nu\rangle = |\mu\nu\rangle. \quad (11)$$

这里  $|\mu\rangle$  和  $|\nu\rangle$  是原子和场相干态,

$$|\mu\rangle = (1 + \mu\mu^*)^{-j} e^{\mu J_+} |j, -j\rangle, \quad (12)$$

$$|\nu\rangle = e^{-\nu\nu^*/2} e^{\nu a_+} |0\rangle, \quad (13)$$

其中

$$\mu = \frac{p_1 + iq_1}{\sqrt{4j - (p_1^2 + q_1^2)}}, \quad (14)$$

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_2^2 + q_2^2). \quad (15)$$

这里  $|0\rangle$  是玻色场的基态, 用 1 和 2 分别作为原子子系统和辐射场子系统的标记, 则  $q_1, p_1, q_2, p_2$  描述的是系统整体相空间.

我们引入描述 Dicke 模型原子子系统中单粒子相干程度的一阶时间关联函数, 定义如下<sup>[19]</sup>:

$$\begin{aligned} g_{12}^{(1)} &= \frac{|\rho_{12}^{(1)}|}{\sqrt{\rho_{11}^{(1)}\rho_{22}^{(1)}}} \\ &= \frac{|\langle J_+ \rangle|}{\sqrt{j^2 - \langle J_z \rangle^2}}. \end{aligned} \quad (16)$$

这里  $\rho_{ij}^{(1)} = \langle a_i^\dagger a_j \rangle / N$  为单粒子密度矩阵, 其中  $i, j = 1, 2$ . 一阶时间关联函数  $g_{12}^{(1)}$  可以在实验中利用拉姆齐条纹的可视度来进行观测<sup>[24-27]</sup>, 从而使得  $g_{12}^{(1)}$  在量子光学和量子信息研究中具有更加重要的实际意义. 本文的主要目的是研究  $g_{12}^{(1)}$  随时间的动力学演化特性及其与混沌之间的关系.

首先, 选择初始相干态位于经典相空间的某一点, 把这一点对应的量子态作为初态, 研究初态对  $g_{12}^{(1)}$  动力学的影响. 为了讨论问题的方便, 我们在图 1 的庞加莱截面中  $q_1 = 0$  直线上选取  $p_1 = 2.45, p_1 = 1.0, p_1 = -0.3$  三个具有代表性的点作为初态, 即初态分别选定在规则区域的不动点处、混沌区域和规则到混沌的过渡区域.  $g_{12}^{(1)}$  随时间演化情况的数值模拟结果如图 2 所示. 由于选取的三个初态均为相干态, 所以初始时刻  $g_{12}^{(1)} = 1$ . 随着时间的演化, 当初态处于规则区域不动点处时, 一阶时间关联函数曲线呈现周期性振荡衰减, 经过较长时间衰减到一个极小值并小幅振荡; 而初态处于混沌区域时, 一阶时间关联函数曲线迅速衰减到某一极小值, 相对于初态处于不动点处的衰减曲线要快得多, 然后达到一个稳定的小幅振荡状态; 而初态处于规则区和混沌区交界处, 衰减曲线则表现为一种中间的过渡情形, 并且周期性振荡规律被破坏. 通过以上分析可以发现, 当初态集中在混沌区域时, 相同时刻的短时动力学演化行为,  $g_{12}^{(1)}$  值比初态集中在规则区域时要小得多, 粒子相干的程度较弱,

说明经典混沌抑制量子相干. 反过来, 也说明  $g_{12}^{(1)}$  动力学演化具有较强的初态敏感性, 与初态所处相空间的位置具有紧密的对应关系.

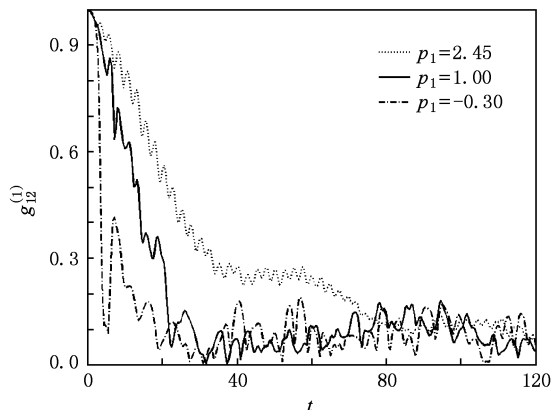


图 2 初态为三种典型情况时  $g_{12}^{(1)}$  随时间的演化

### 3.2. 单粒子相干动力学的平均演化特性

为了进一步考察 Dicke 模型单粒子相干的动力学演化性质, 我们定义平均一阶时间关联函数如下:

$$\overline{g_{12}^{(1)}} = \frac{1}{T} \int_0^T g_{12}^{(1)}(t) dt, \quad (17)$$

其中  $T$  为系统演化时间.

下面利用 (17) 式定义的  $\overline{g_{12}^{(1)}}$  来描述系统单粒子相干动力学的平均演化行为. 为了更直观地考察系统单粒子相干的动力学表现, 取庞加莱截面图中  $q_1 = 0$  直线上的所有点作为初态来进行数值模拟计算, 得到  $\overline{g_{12}^{(1)}}$  作为  $p_1$  函数的变化曲线如图 3 所示. 由图 3 的曲线变化规律可以发现, 当经典相空间中的  $p_1$  到达第一个稳定的周期性轨道中心时, 相应的平均一阶时间相关函数  $\overline{g_{12}^{(1)}}$  逐渐达到一个极大值, 大约在  $p_1 = -4$  点附近. 接着  $\overline{g_{12}^{(1)}}$  随着相空间不同区域开始减小, 当大约到达  $p_1 = -0.3$  点时,  $\overline{g_{12}^{(1)}}$  达到一个极小值, 随后开始逐渐增加, 当到达  $p_1 = 2.45$  点附近时,  $\overline{g_{12}^{(1)}}$  再次达到另外一个极大值. 这里可清楚地观察到  $\overline{g_{12}^{(1)}}$  的两个极大值恰好对应于庞加莱截面图中两个经典规则区域中的不动点, 系统单粒子相干程度最大; 而一个极小值刚好对应所讨论相空间范围的混沌最强区域, 系统单粒子相干程度最小, 曲线其他部分也十分清楚地显示出了  $\overline{g_{12}^{(1)}}$  数值变化的过渡行为. 由此可以得到一个结论,  $\overline{g_{12}^{(1)}}$  展示了一种很好的量子-经典的对应关系, 并且混沌抑制系统量子相干的发生.

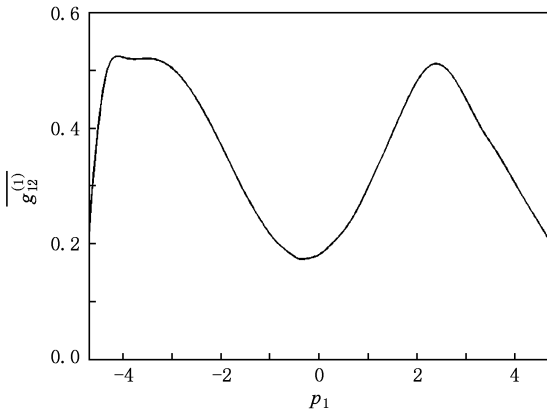


图3 取  $q_1 = 0$  直线上所有点为初态时  $\overline{g_{12}^{(1)}}$  随时间的演化

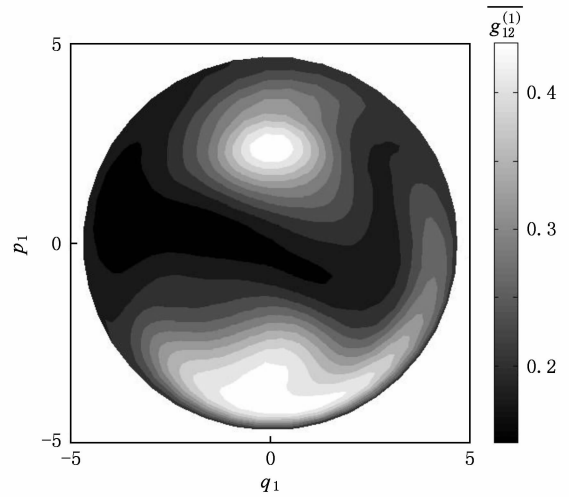


图4 取经典相空间上所有点为初态时  $\overline{g_{12}^{(1)}}$  随时间的演化 截断时间  $t = 30$

### 3.3. 单粒子相干动力学的整体演化特性

为了考察 Dicke 模型中单粒子相干动力学的整体演化情况,这里将相空间(图1)上的全体点作为初态进行演化,结果也验证了上述结论.图4所示为截断时间  $t = 30$  (从图2可以看出,在  $t < 30$  条件下不同初态的  $\overline{g_{12}^{(1)}}$  演化有明显的区别,所以时间截断满足  $t = 30$  就可以较好地揭示其相空间结构)并取经典相空间上所有点为初态时  $\overline{g_{12}^{(1)}}$  随时间的演化.从图4可以发现,  $\overline{g_{12}^{(1)}}$  的分布结构与经典相空间(图1)非常近似,两个较大的规则区域明显.这种近似的分布结构说明系统经典动力学与量子系统单粒子相干动力学之间存在一定的联系,二者具有较好的对应关系.在经典相空间中除了两个大的规则区域外,我们很难判断其他混沌区域的强弱程度.但我们通过  $\overline{g_{12}^{(1)}}$  灰度图可以十分清楚地给出空间不同区域混沌的强弱程度,从而更好地揭示相空间结构.这也说明在一个非线性量子系统中  $\overline{g_{12}^{(1)}}$  包含了更多的信息,可以作为描述 Dicke 模型中量子混沌的更一般物理量.

## 4. 结 论

本文研究了非旋波近似条件下 Dicke 模型的单粒子相干动力学性质,并讨论了它与量子混沌之间的关系.通过定义一阶时间关联函数和平均一阶时间关联函数,数值计算结果表明:随着时间演化,初态处于混沌区域时一阶时间关联函数曲线衰减较快;相反,初态处于规则区域不动点时曲线衰减较慢,单粒子相干动力学对初态具有较强的敏感性,经典混沌抑制量子相干.我们也得到一种较好的量子经典对应关系,利用相空间的整体单粒子相干动力学特性,可以更好地揭示相空间的混沌和规则结构.

感谢浙江大学王晓光教授和马健博士对本文工作的有益指导和帮助.

- [1] Haake F 1991 *Quantum Signature of Chaos* (Berlin: Springer - Verlag)
- [2] Heller E J 1984 *Phys. Rev. Lett.* **53** 1515
- [3] Schack R, D'Ariano G M, Caves C M 1994 *Phys. Rev. E* **50** 972
- [4] Lu P, Wang S J 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 5955 (in Chinese)  
[卢 鹏、王顺金 2009 物理学报 **58** 5955]
- [5] Guo L, Liang X T 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 50 (in Chinese)  
[郭 亮、梁先庭 2009 物理学报 **58** 50]

- [6] Wang X G, Ghose S, Sanders B C, Hu B 2004 *Phys. Rev. E* **70** 016217
- [7] Hou X W, Chen J H, Hu B 2005 *Phys. Rev. A* **71** 034302
- [8] Sørensen A, Duan L M, Cirac J I, Zoller P 2001 *Nature* **409** 63
- [9] Sørensen A 2002 *Phys. Rev. A* **65** 043610
- [10] Kitagawa M, Ueda M 1993 *Phys. Rev. A* **47** 5138
- [11] Song L J, Wang X G, Yan D, Zong Z G 2006 *J. Phys. B* **39** 559
- [12] Song L J, Yan D, Ma J, Wang X G 2009 *Phys. Rev. E* **79**

- 046220
- [13] Yan D, Song L J, Chen D W 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3679 (in Chinese) [严冬、宋立军、陈殿伟 2009 物理学报 **58** 3679]
- [14] Emerson J, Weinstein Y S, Lloyd S, Cory D G 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 284102
- [15] Weinstein Y S, Hellberg C S 2005 *Phys. Rev. E* **71** 016209
- [16] Liu J, Wang W G, Zhang C W, Niu Q, Li B W 2005 *Phys. Rev. A* **72** 063623
- [17] Liu J, Wang W G, Zhang C W, Niu Q, Li B W 2006 *Phys. Rev. Lett.* **A 353** 216
- [18] Zhang D Y, Guo P, Gao F 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1906 (in Chinese) [张登玉、郭萍、高峰 2007 物理学报 **56** 1906]
- [19] Jin G R, Law C K 2008 *Phys. Rev. A* **78** 063620
- [20] Dicke R H 1954 *Phys. Rev.* **93** 99
- [21] Furuya K, Nemes M C, Pellegrino G Q 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5524
- [22] Fang Y C, Yang Z A, Yang L Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 661 (in Chinese) [房永翠、杨志安、杨丽云 2008 物理学报 **57** 661]
- [23] Zhang W M, Feng D H, Gilmore R 1990 *Rev. Mod. Phys.* **62** 867
- [24] Shin Y, Sanner C, Jo G B, Pasquini T A, Saba M, Ketterle W, Pritchard D E, Vengalattore M, Prentiss M 2005 *Phys. Rev. A* **72** 021604
- [25] Chuu C S, Schreck F, Meyrath T P, Hanssen J L, Price G N, Raizen M G 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 260403
- [26] Jo G B, Shin Y, Will S, Pasquini T A, Saba M, Ketterle W, Pritchard D E 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 030407
- [27] Widera A, Trotzky S, Cheinet P, Fölling S, Gerbier F, Bloch I 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 140401

## Quantum chaos and the dynamic properties of single-particle coherence in Dicke model\*

Song Li-Jun<sup>1)†</sup> Yan Dong<sup>1)</sup> Gai Yong-Jie<sup>2)</sup> Wang Yu-Bo<sup>2)</sup>

1) (School of Science, Changchun University, Changchun 130022, China)

2) (School of Science, Changchun University of Science and Technology, Changchun 130022, China)

(Received 16 August 2009; revised manuscript received 27 November 2009)

### Abstract

The Dicke model displays quantum chaotic dynamic properties in the without-rotating-wave approximation. We explore the dynamic properties of the single-particle coherence in Dicke model by using the first-order temporal correlation function and numerical simulation. The results reveal that the first-order temporal correlation function decays very rapidly when the initial coherent state is centered in chaotic regions, but rather slowly when the initial coherent state is centered in regular regions. This indicates that the single-particle coherence is highly sensitive to initial states, and the classical chaos suppresses quantum coherence. The mean single particle coherence during the evolution is studied, and a better quantum-classical correspondence is obtained. Finally, the dynamics of single-particle coherence in the whole phase space is investigated, which reveals the chaotic and regular structures of the phase space more clearly.

**Keywords:** Dicke model, without-rotating-wave approximation, quantum chaos, single-particle coherence

**PACC:** 0365, 0367, 0545, 4250

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10947019) and the Science and Technology Research Program of the Education Bureau of Jilin Province, China (Grant No. 2009237).

† E-mail: ccdxslj@126.com