第 59 卷 第 6 期 2010 年 6 月
1000-3290/2010/59(06)/3700-04
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol. 59, No. 6, June, 2010

五维时空中度规的计算*

邵 亮[1)] 李 苗[1)] 秦正辉[1)] 韩金柱[1)†] 邵 丹[2)]

1)(武汉科技大学理学院, 武汉 430065)

2)(江汉大学物理与信息工程学院, 武汉 430056)

(2009 年 7 月 2 日收到;2009 年 11 月 30 日收到修改稿)

在四维 $R+R^2$ 引力理论中给出了 Wheeler-Dewitt (W-D)方程,通过分离变量法得到了 W-D 方程的解. 利用 Kaluza-Klein 理论将 Robertson-Walker 度规推广到五维时空,结合时空中的场方程得到宇宙项与能量之间的关系.

关键词: Wheeler-Dewitt 方程, 宇宙项, 五维时空, 度规

PACC: 0420F

1. 引 言

$R+R^2$ 引力理论在经典意义上与爱因斯坦理论相关,其方法是利用等角变换使标量场作为引力源,同样的关系也存在于万有引力中的标量-张量定理[1,2]中. Kasper[3] 已经利用这种关系获得了四维时空中的纯量子宇宙论.

标量-张量理论是一种比广义相对论更符合马赫原理的理论,它不是一个纯几何的引力理论,它认为引力是由几何的度规和非几何的标量场共同组成[4—6]. 标量-张量理论最显著的特点是认为宇宙常数是可变的,并且由物质分布决定. Brans-Dicke 理论[7] 是标量-张量理论的代表性理论,其中的宇宙项及其变形最近几年已给出了较详细的研究[8].

本文通过分离变量法得到四维时空中 Wheeler-Dewitt (W-D)方程的解,利用高维时空 Kaluza-Klein 理论关于从四维时空增加维数的方法,将 Robertson-Walker 度规推广到五维时空,并根据时空中的场方程得到宇宙项与能量之间的关系.

2. 四维 $R+R^2$ 引力理论中的 W-D 方程

在 $R+R^2$ 引力理论中, R^2 项等同于 $m^2=(6\gamma)^{-1}$ 的标量场[3],将曲率 R 看作一个新的自由度, R 和度规的关系看成是一种约束,则宇宙中的波函数将依赖于度规和标量曲率,即 $\psi=\psi(a,R)$. 在各向同性的宇宙中,W-D 方程在四维时空中的形式为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}-12\mathrm{e}^{6\alpha+3\beta}+144\mathrm{e}^{4\alpha+2\beta}\right)\psi(\alpha,\beta)=0, \tag{1}$$

其中 $\alpha=\ln a$, $\beta=\ln R$, a 为宇宙空间尺度.

为了得出(1)式的解,令

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{e}^{2\alpha+\beta}=a^2R, \\ y &= \alpha+\beta=\ln(aR), \end{aligned} \tag{2}$$

则(1)式可化简为

$$\left(x\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}+12x^2-144x\right)\psi(x,y)=0. \tag{3}$$

将波函数分离变量

$$\psi(x,y)=F(x)G(y). \tag{4}$$

将(4)式代入(3)式可得

$$G'=kG, \tag{5}$$

$$xF''+(k+1)F'+(-144x+12x^2)F=0, \tag{6}$$

其中 k 为分离常数.

由(5)式可知

$$G=G_0\mathrm{e}^{ky}, \tag{7}$$

其中 G_0 为常数.

当 $k\neq-1$ 时, F 有无限多个解;当 $k=-1$ 时,(6)式转化为

$$F''+(-144+12x)F=0, \tag{8}$$

令 $u=-12^{4/3}+12^{1/3}x$, 则(8)式的解为

* 湖北省杰出青年科学基金(批准号: 2007ABB031)和教育部留学回国人员科研启动基金(批准号: 200724)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: hanjzhu@yahoo.cn

$$F = F_1 A_i(-u) + F_2 B_i(-u), \tag{9}$$

其中 A_i,B_i 均为 Airy 函数.将(9)式代入到(4)式,可得到完整的状态方程

$$\psi(x,y) = \mathrm{e}^{-y}[c_1 A_i(u) + c_2 B_i(u)]. \tag{10}$$

当 x 足够大时，(9)式的极限将转变为 Wentzel-Kramers-Brillouin(WKB)方程[3]的解,即

$$\begin{aligned} F &\to (-u)^{-1/4}\mathrm{e}^{\pm 2/(3u^{3/2})} \\ &= (-12^{1/3}x)^{-1/4}\mathrm{e}^{\pm 2/(3(-12^{1/3}x)^{3/2})}. \end{aligned} \tag{11}$$

下面给出 W-D 方程的级数解.

令(1)式的级数解的形式为

$$F(x) = x^{-(v+1)/2}u(x), \tag{12}$$

当 $v \neq -1$ 且 $x \to \infty$ 时,可得到

$$u'' + (-144 + 12x)u = 0. \tag{13}$$

若应用 Frobenius 方法[3],(1)式的级数解的形式也可表示为

$$F(x) = |x|^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{14}$$

其中

$$(n+\alpha)(n+\alpha-1)a_n = 144a_{n-2} - 12a_{n-3}. \tag{15}$$

3. 五维时空中度规的计算

变分原理可表示为

$$\begin{aligned} 0 = \delta\int\Big\{&\phi[R - 2\Lambda(\phi, \phi_{,i}\phi^{,i})] + \left(\frac{16\pi}{c^4}\right)L_m \\ &- \omega(\phi)\frac{\phi_{,i}\phi^{,i}}{\phi}\Big\}\sqrt{-g}\mathrm{d}\Omega, \end{aligned} \tag{16}$$

其中 ϕ 是与时间 $x^0 = ct$ 有关的函数,Λ 是关于 ϕ 和 $\phi_{,i}\phi^{,i}$ 的函数.

由变分原理可得有关度规 g_{ij} 的场方程

$$\begin{aligned} &R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R + g_{ij}\Lambda - 2\frac{\partial\Lambda}{\partial b}\phi_{,i}\phi_{,j} \\ &= \frac{8\pi}{\phi c^4}T_{ij} + \frac{\omega}{\phi^2}\left(\phi_{,i}\phi_{,j} - \frac{1}{2}g_{ij}\phi_{,l}\phi^{,l}\right) \\ &\quad + \frac{1}{\phi}(\phi_{,i;j} - g_{ij}\Box\phi), \end{aligned} \tag{17}$$

其中 ω 为常数,

$$b = \phi_{,l}\phi^{,l},$$

$$T_{ij} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}L_m)}{\partial g_{ij}},$$

$$\Box\phi = -\frac{1}{c^2}(\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi}).$$

令 $i = j = 0$,(17)式可化简为时-时场方程

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} - \frac{\Lambda c^2}{3} + \frac{2}{3}\frac{\partial\Lambda c^2}{\partial\dot{\phi}^2}\dot{\phi}^2 \\ &= \frac{8\pi}{3\phi c^2}\varepsilon + \frac{\omega}{6}\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2 - \frac{\dot{a}}{a}\frac{\dot{\phi}}{\phi}. \end{aligned} \tag{18}$$

令 $i = j$,(17)式可化简为空-空场方程

$$\begin{aligned} &2\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} - \Lambda c^2 \\ &= -\frac{8\pi}{\phi c^2}p - \frac{\omega}{2}\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2 - \frac{\ddot{\phi}}{\phi} - 3\frac{\dot{a}}{a}\frac{\dot{\phi}}{\phi}. \end{aligned} \tag{19}$$

从而可将(17)式变形为

$$\begin{aligned} &\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} - \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{1}{3}\phi\frac{\partial\Lambda c^2}{\partial\phi} \\ &+ \frac{2}{3}c^2\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\phi\frac{\partial\Lambda c^2}{\partial\dot{\phi}^2}\right)\phi^{,l} + \frac{2}{3}\phi\frac{\partial\Lambda c^2}{\partial\dot{\phi}^2}\left(\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi}\right) \\ &= -\frac{\omega}{6}\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2 + \frac{\omega}{3}\frac{\ddot{\phi}}{\phi} + \omega\frac{\dot{a}}{a}\frac{\dot{\phi}}{\phi} + \frac{1}{6}\frac{\dot{\phi}^2}{\phi}\frac{\partial\omega}{\partial\phi}. \end{aligned} \tag{20}$$

根据爱因斯坦场方程,将 Robertson-Walker 度规[9]推广到五维时空

$$\mathrm{d}^{(5)}s^2 = \mathrm{d}^{(4)}s^2 + e^{\mu}(\mathrm{d}x^5)^2, \tag{21}$$

可获得下列五维时空中类似于(18)—(20)式的场方程:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} + \frac{1}{2}\frac{\dot{a}}{a}\dot{\mu} = 0, \tag{22}$$

$$\begin{aligned} &2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\ddot{\mu}}{2} \\ &+ \frac{\dot{\mu}^2}{4} + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\mu} - \frac{\dot{\mu}}{2} + \frac{\dot{a}}{a}\frac{\dot{\phi}}{\phi} = 0, \end{aligned} \tag{23}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} = 0. \tag{24}$$

在初始条件 $t = 0, a(t) = 0$ 下,由(24)式可推出

$$a(t) = \sqrt{-kc^2t^2 + \alpha t}. \tag{25}$$

由(24)和(22)式可得

$$\dot{\mu} = 2\frac{\ddot{a}}{a}. \tag{26}$$

结合(25),(26)式可得到第五个坐标的度规系数为

$$e^{\mu} = c(x^5)\frac{(-2kc^2t + \alpha)^2}{-kc^2t^2 + \alpha t}, \tag{27}$$

其中 $c(x^5)$ 是关于 x^5 的参数函数.

通过较复杂的计算可知,(26),(27)式满足(23)式.

4. 宇宙项与能量的关系

物态方程由

$$p = \gamma\varepsilon \tag{28}$$

给出. 当 $\gamma = -1, 0, \frac{1}{3}, 1$ 时,分别表示虚真空能量、无压力灰尘、射线、硬物质.

根据能量-动量张量 T_{ij} 和能量-张量守恒方程[9],有

$$\varepsilon = \varepsilon_\gamma a^{-3(1+\gamma)}. \tag{29}$$

这里

$$\varepsilon_\gamma \equiv ML^{2+3\gamma}T^{-2},$$
$$[a] = L,$$
$$[\Lambda] = L^{-2},$$
$$[\phi] = ML^{-3}T^2,$$

$[W]$是无量纲的量.

由(18)和(22)式可得

$$\frac{1}{2}\frac{\dot{a}}{a}\dot{\mu} + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{2}{3}\frac{\partial \Lambda c^2}{\partial \dot{\phi}^2}\dot{\phi}^2$$

$$= -\frac{8\pi}{3\phi c^2}\varepsilon - \frac{\omega}{6}\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2 + \frac{\dot{a}}{a}\frac{\dot{\phi}}{\phi}. \tag{30}$$

由(19)和(23)式可得

$$\frac{\ddot{\mu}}{2} + \frac{\dot{\mu}^2}{4} + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\mu} + \Lambda c^2$$

$$= \frac{8\pi}{\phi c^2}p + \frac{\omega}{2}\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2 + \frac{\ddot{\phi}}{\phi} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{\dot{\phi}}{\phi}. \tag{31}$$

由(20)和(24)式可得

$$\Lambda c^2 + \phi\frac{\partial \Lambda c^2}{\partial \phi} - 2\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi\frac{\partial \Lambda c^2}{\partial \dot{\phi}^2}\right)\dot{\phi}$$

$$-2\phi\frac{\partial \Lambda c^2}{\partial \dot{\phi}^2}\left(\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi}\right)$$

$$= -\frac{\omega}{\phi}\left(\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial \omega}{\partial \phi}\frac{\dot{\phi}^2}{\phi} + \frac{\omega}{2}\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2. \tag{32}$$

定义

$$\dot{\mu} = 2\frac{\dot{\phi}}{\phi}, \tag{33}$$

并设

$$e^{\mu} = k(x^5)\phi^2, \tag{34}$$

将(34)式代入(27)式,可以得到

$$\phi^2(x^0) = \frac{c(x^5)}{k(x^5)}\frac{(-2kc^2t + \alpha)^2}{-kc^2t^2 + \alpha t}$$

$$\equiv g_0^2(x^5)\frac{(-2kc^2t + \alpha)^2}{-kc^2t^2 + \alpha t}. \tag{35}$$

由于 ϕ 只是与 x^0 相关的函数,故可用 $g_0^2(x^5)$ 来表示 $\frac{c(x^5)}{k(x^5)}$.

将(24),(26)和(33)式代入(23)式,根据(25),(35)式可得

$$\frac{\ddot{\phi}}{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\frac{\dot{\phi}}{\phi} = 0, \tag{36}$$

同时设

$$\dot{\phi}a^3 = -\frac{g_0\alpha^2}{2}.$$

将(36)式代入(29)式可得

$$\varepsilon = \varepsilon_\gamma\left(\frac{\dot{\phi}}{-g_0\alpha^2/2}\right)^{1+\gamma}. \tag{37}$$

将(37)式代入(30)和(31)式,运用(28)和(33)式可得

$$\Lambda c^2 - 2\frac{\partial \Lambda c^2}{\partial \dot{\phi}^2}\dot{\phi}^2$$

$$= -\frac{8\pi}{\phi c^2}\varepsilon_\gamma\left(\frac{\dot{\phi}}{-g_0\alpha^2/2}\right)^{1+\gamma} - \frac{\omega}{2}\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2, \tag{38}$$

$$\Lambda c^2 = \frac{8\pi}{\phi c^2}\gamma\varepsilon_\gamma\left(\frac{\dot{\phi}}{-g_0\alpha^2/2}\right)^{1+\gamma} + \frac{\omega}{2}\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2. \tag{39}$$

将(39)式中 Λc^2 求偏导后代入(38)式可得

$$\Lambda c^2 = \frac{8\pi}{\phi c^2}\varepsilon_\gamma\left(\frac{\dot{\phi}}{-g_0\alpha^2/2}\right)^{1+\gamma}(\gamma^2 + \gamma - 1) + \frac{\omega}{2}\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2. \tag{40}$$

根据(28)式,可以得到当 γ 取不同值时(40)式的表达式. 当 $\gamma = -1$ 时, 有

$$\Lambda c^2 = -\frac{8\pi}{\phi c^2}\varepsilon_{-1} + \frac{\omega}{2}\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2. \tag{41}$$

当 $\gamma = 0$ 时, 有

$$\Lambda c^2 = \frac{8\pi}{\phi c^2}\varepsilon_0\left(\frac{\dot{\phi}}{-g_0\alpha^2/2}\right)(-1) + \frac{\omega}{2}\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2. \tag{42}$$

当 $\gamma = \frac{1}{3}$ 时, 有

$$\Lambda c^2 = \frac{8\pi}{\phi c^2}\varepsilon_{1/3}\left(\frac{\dot{\phi}}{-g_0\alpha^2/2}\right)^{4/3}\left(-\frac{5}{9}\right) + \frac{\omega}{2}\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2. \tag{43}$$

当 $\gamma = 1$ 时, 有

$$\Lambda c^2 = \frac{8\pi}{\phi c^2}\varepsilon_1\left(\frac{\dot{\phi}}{-g_0\alpha^2/2}\right)^2 + \frac{\omega}{2}\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2. \quad (44)$$

由上述结果可以看出，在不同时期宇宙项是不同的，并且宇宙项与能量是相关联的.

5. 结　论

本文在 Robertson-Walker 度规下，利用正则量子化方法给出了 W-D 方程，通过分离变量法得到四维时空中 W-D 方程的解. 利用高维时空 Kaluza-Klein 理论关于从四维时空增加维数的方法，将四维推广到五维，其中增加的一维可能是质量、射线等. 从而可将 Robertson-Walker 度规推广到五维时空，并根据时空中的场方程得到宇宙项与能量之间的关系.

[1] Whitt B 1984 *Phys. Lett.* B **145** 176
[2] Pimentel L O, Stein-Schabes J 1989 *Phys. Lett.* B **216** 27
[3] Kasper U 1993 *Class. Quan. Grav.* **7** L17
[4] Li X Z, Yuan N Y, Liu D J, Hao J G 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1031 (in Chinese) [李新洲、袁宁一、刘道军、郝建纲 2000 物理学报 **49** 1031]
[5] Shao D, Shao L, Shao C G, Chen Y H 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 367 (in Chinese) [邵　丹、邵　亮、邵常贵、陈贻汉 2004 物理学报 **53** 367]
[6] Fujii Y, Maeda K I 2003 *The Scalar-Tensor Theory of Gravitation* (Cammbridge: Cammbridge University Press) p2
[7] Brans C, Dicke R H 1961 *Phys. Rev.* **124** 925
[8] Abbott L F, Deser S 1982 *Nucl. Phys.* B **195** 76
[9] Weinberg S 1972 *Gravitation and Cosmology* (New York: Wiley) p468

Calculation of the metric in the five-dimensional spacetime*

Shao Liang[1)]　Li Miao[1)]　Qin Zheng-Hui[1)]　Han Jin-Zhu[1)†]　Shao Dan[2)]
1) (*College of Science, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan* 430065, *China*)
2) (*School of Physics and Information Engineering, Jianghan University, Wuhan* 430056, *China*)
(Received 2 July 2009; revised manuscript received 30 November 2009)

Abstract

This paper introduces the Wheeler-Dewitt (W-D) equation in the five-dimensional $R + R^2$ theory of gravity, and gets solutions of the W-D equation by separation of variables. Using the Kaluza-Klein theory, the Robertson-Walker metric is extended to the five-dimensional spacetime. With the field equations of the spacetime, the relationship between energy and the cosmological term can be obtained.

Keywords: Wheeler-Dewitt equation, cosmological term, five-dimensional spacetime, metric
PACC: 0420F

* Project supported by the Natural Science Foundation for Distinguished Young Scholars of Hubei Province, China (Grant No. 2007ABB031) and the Scientific Research Foundation for the Returned Overseas Chinese Scholars from Ministry of Education, China (Grant No. 200724).
† Corresponding author. E-mail: hanjzhu@ yahoo. cn