

硬球势中相对论费米气体的热力学性质

范召兰¹⁾ 门福殿^{1)†} 窦瑞波²⁾

1) (中国石油大学(华东)物理科学与技术学院, 东营 257061)

2) (青岛拓谱信息工程专修学院, 青岛 266555)

(2009 年 8 月 5 日收到; 2009 年 11 月 26 日收到修改稿)

用量子统计与数值模拟相结合的方法, 在广义外势中相对论费米系统的热力学量的基础上, 研究硬球势中相对论费米气体的热力学性质. 得到了考虑相对论效应时系统的内能和热容量的解析表达式, 分析了相对论效应对内能和热容量的影响. 研究表明: 与非相对论比较, 相对论费米气体的内能和热容量更高; 相对论特征量越大, 热容量的转折温度越低; 随着温度的升高, 特征量越大, 内能就越大.

关键词: 费米气体, 相对论效应, 热力学性质

PACC: 0530F, 7110C

1. 引言

近年来, 随着超冷费米气体实验的进展, 极大地刺激了人们对超冷量子气体进行研究的兴趣, 在超冷原子气体的凝聚态特性^[1]、量子相干特性等方面进行了大量突破性的理论和实验研究. 费米气体虽然不能像玻色气体那样在低温下发生玻色-爱因斯坦凝聚, 然而在适当的外界条件下, 简并费米系统中可以观测到 Bardeen-Cooper-Schrieffer 相变. 吸引相互作用可以促使费米面附近的原子形成 Cooper 对, 有玻色系统所具有的一些量子效应, 如超导、超流等^[2, 3]. 而低温下的费米系统的性质又与许多因素(如粒子间相互作用、外势^[4-9]等)有关, 其中相对论效应就是一个重要的因素, 特别是静止质量非常小的费米子, 如中微子的静止质量还不到电子的百万分之一. 对于由这些小质量的费米子组成的系统, 热动能完全可以与它们的静止能相比较, 这时相对论效应对热力学性质的影响很大, 不能再被忽略不计. 近年来, 对相对论玻色系统的研究颇多^[10-14], 对相对论费米系统的研究却很少^[15].

本文考虑相对论效应, 应用量子统计与数值模拟的方法, 在广义外势中相对论费米系统的热力学量的基础上, 研究低温下硬球势中费米气体的热力学性质, 分析相对论效应对系统热力学性质的影响.

2. 广义外势中相对论费米系统的内能、热容量和费米能

单个粒子的哈密顿量为

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \left| \frac{x_i}{L_i} \right|^{t_i},$$

其中 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{x}$ 分别为粒子的动量和坐标, m 为粒子的静止质量, c 为光速, ε_i, L_i 和 t_i 均为描述外势形式的正常数, n 为外势的空间维数.

利用巨正则系综理论, 系统的巨配分函数为

$$\Xi = \text{tr} \{ \exp[-\beta(H - \mu N)] \}. \quad (1)$$

当系统的粒子数非常大, 并且 $\beta^{-1} = k_B T$ (k_B 为 Boltzmann 常数) 远大于能级间距时, 可用 Thomas-Fermi 的半经典近似, 求和化为积分, 得热力学势

$$\begin{aligned} \Omega &= -\beta^{-1} \ln \Xi \\ &= -k_B T \frac{1}{h^n} \int \ln[1 + \exp(-\beta(\varepsilon - \mu))] d^n p d^n r. \end{aligned} \quad (2)$$

利用量子统计中的热力学基本公式求得相对论费米系统的平均粒子数为

$$\begin{aligned} N &= -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \\ &= \frac{V_n^*}{\lambda^n} \left(\frac{2}{\pi} \beta m c^2 \right)^{1/2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1} \exp(j\beta\mu)}{j^{D+\eta-1}} \\ &\quad \times K_D(j\beta m c^2) \quad (j = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (3)$$

† E-mail: menfudian@163.com

这里

$$D = \frac{n + 1}{2} \, ,$$
$$\eta = \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} \, ,$$
$$\lambda = h / \sqrt{2 \pi m k_B T} \, ,$$
$$V_n^* = \prod_{i=1}^n \frac{(2L_i) \Gamma \left(\frac{1}{t_i} + 1 \right)}{(\beta \varepsilon_i)^{1/t_i}} \, ,$$

K_D 为修正的柱 Bessel 函数,

$$K_D(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(D + 1/2)} \left(\frac{x}{2} \right)^D \times \int_0^\infty \exp(-x \cosh \theta) \sinh^{2D} \theta d\theta \, ,$$

其中 $\Gamma(v)$ 为 Gamma 函数,

$$\Gamma(v) = \int_0^\infty x^{v-1} \exp(-x) dx \, .$$

系统的内能和热容量可分别表示为

$$U = - \frac{\partial \ln \Xi}{\partial \beta} \, ,$$
$$C = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_N \, .$$

经计算可得

$$U = N k_B T \sum_{j=1}^\infty \frac{(-1)^{j-1} \exp(j\beta\mu)}{j^{D+\eta}} \times [(\eta - 1 - j\beta mc^2) K_D(j\beta mc^2) + j\beta mc^2 K_{D+1}(j\beta mc^2)] \times \left[\sum_{j=1}^\infty \frac{(-1)^{j-1} \exp(j\beta\mu)}{j^{D+\eta-1}} K_D(j\beta mc^2) \right]^{-1} \, , \quad (4)$$
$$C = N k_B \sum_{j=1}^\infty \frac{(-1)^{j-1} \exp(j\beta\mu)}{j^{D+\eta}} \times \{ [\eta(\eta - 1) - 2(\eta - 1)j\beta mc^2 + (j\beta mc^2)^2] K_D(j\beta mc^2) + j\beta mc^2 (2\eta - 3 - 2j\beta mc^2) K_{D+1}(j\beta mc^2) + (j\beta mc^2)^2 K_{D+2}(j\beta mc^2) \} \times \left[\sum_{j=1}^\infty \frac{(-1)^{j-1} \exp(j\beta\mu)}{j^{D+\eta-1}} K_D(j\beta mc^2) \right]^{-1} - N k_B \left\{ \sum_{j=1}^\infty \frac{(-1)^{j-1} \exp(j\beta\mu)}{j^{D+\eta-1}} \times [(\eta - 1 - j\beta mc^2) K_D(j\beta mc^2) + j\beta mc^2 K_{D+1}(j\beta mc^2)] \right\}^2$$

$$\times \left[\sum_{j=1}^\infty \frac{(-1)^{j-1} \exp(j\beta\mu)}{j^{D+\eta-1}} K_D(j\beta mc^2) \right. \\ \left. \times \sum_{j=1}^\infty \frac{(-1)^{j-1} \exp(j\beta\mu)}{j^{D+\eta-2}} K_D(j\beta mc^2) \right]^{-1} \, . \quad (5)$$

当温度很低时, $\beta mc^2 \gg 1$, 自然有 $j\beta mc^2 \gg 1$, 即对大宗量 x , Bessel 函数级数展开为

$$K_v(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \exp(-x) \left(1 + \frac{4v-1}{8x} + \frac{16v^4 - 40v^2 + 9}{128x^2} + \cdots \right) \, . \quad (6)$$

我们知道, 费米函数

$$f_l(z) = \sum_{i=1}^\infty (-1)^{i-1} \frac{z^i}{i^l} \, . \quad (7)$$

在低温情况下, 费米函数可以表示为

$$f_l(z) = \frac{(\ln z)^l}{\Gamma(l+1)} \left[1 + l(l-1) \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{(\ln z)^2} + l(l-1)(l-3) \frac{7\pi^4}{360} \frac{1}{(\ln z)^4} + \cdots \right] \, . \quad (8)$$

当 $T=0$ 时, (6) 和 (8) 式仅取第一项, 即

$$K_v(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \exp(-x) \quad (x \gg 0) \, , \quad (9)$$

$$f_l(z) = \frac{(\ln z)^l}{\Gamma(l+1)} \, . \quad (10)$$

将 (9), (10) 式代入 (3) 式得

$$N = \frac{V_n^* [\beta(\mu - mc^2)]^{\frac{n}{2} + \eta}}{\lambda^n \Gamma\left(\frac{n}{2} + \eta + 1\right)} = \frac{V_n (2\pi m)^{\frac{n}{2}} (\mu - mc^2)^{\frac{n}{2} + \eta}}{\left[h^n \Gamma\left(\frac{n}{2} + \eta + 1\right) \right]} \, , \quad (11)$$

其中

$$V_n = \prod_{i=1}^n \frac{(2L_i) \Gamma\left(\frac{1}{t_i} + 1\right)}{\varepsilon_i^{\frac{1}{t_i}}} \, .$$

由 (11) 式可得系统的费米能

$$\varepsilon_F = \mu(0) = \left[\frac{N h^n \Gamma\left(\frac{n}{2} + \eta + 1\right)}{V_n (2\pi m)^{\frac{n}{2}}} \right]^{\frac{1}{\frac{n}{2} + \eta}} + mc^2 \, . \quad (12)$$

由 (12) 式可以看出, 系统的费米能大于静止能量. 由 (12) 式还可以看出, 费米能和系统的维数、外势形式等因素有关. 在三维硬球势 ($n=3, \eta=0$) 和三维谐振势 ($n=3, \eta=\frac{3}{2}$) 中以密度为 10^{25} m^{-3} , 质量为 10^{-30} kg 的电子气为例计算费米能. 硬

球势中电子气的费米能 $\varepsilon_F = 9.000026 \times 10^{-14}$ J, 谐振势中电子气的费米能 $\varepsilon_F = 5.1052 \times 10^{-10}$ J. 由具体数据知, 外势对系统的费米能影响很大, 硬球势中系统的费米能和静止能量相差极小, 几乎可以忽略, 但谐振势中系统的费米能却比静止能量大得多. 由费米能又可得到费米温度

$$T_F = \frac{\varepsilon_F}{k_B}.$$

3. 硬球势中费米系统的热力学性质

对硬球势中的费米系统, 令 $x = \frac{k_B T}{mc^2}$, 由(4)式得到内能的表达式

$$U = Nk_B T \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1} \exp(j\beta\mu)}{j^D} \times [(-1 - j/x)K_D(j/x) + (j/x)K_{D+1}(j/x)] \times \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1} \exp(j\beta\mu)}{j^{D-1}} K_D(j/x) \right]^{-1}. \quad (13)$$

通过三维硬球势中费米气体的内能表达式(13)以及(3)式, 得到 $j = 2, 3, 20, 50$ 时粒子平均内能随着温度的变化关系, 结果如图 1 所示. 从图 1 可以看出, $j = 20$ 与 $j = 50$ 两条曲线完全重合, 即随着 j 的增大, 曲线很快收敛. 所以, j 取到 20 足以表示无穷大时的情况. 由图 1 明显可见, j 的取值不同, 能量曲线只是上下小幅度波动, 对总能量的影响并不是很大. 当 $j = 1$ 时, 内能和热容量就可以回归到文献[16]中的结果.

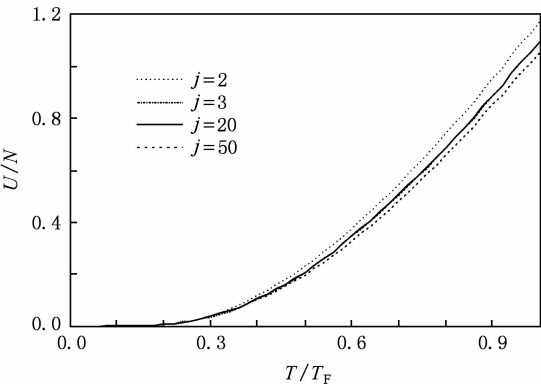


图 1 $j = 2, 3, 20, 50$ 时粒子平均内能随温度的变化

取 $k_B T_F = 1$, 以费米温度 T_F 作为温度的单位, 由(3)和(13)式可以得到相对论情况下粒子平均内能随温度的变化关系. 结果如图 2 所示. 图 2 中的

曲线 a 为非相对论情况下系统的总能量, 曲线 b 和曲线 c 分别为 $\frac{k_B T_F}{mc^2} = 2$ 和 $\frac{k_B T_F}{mc^2} = 5$ 时系统的总能量. $\frac{k_B T_F}{mc^2}$ 表示相对论特征量, 由(12)式可得

$$\frac{k_B T_F}{mc^2} = \frac{\varepsilon_F}{mc^2} = 1 + \left[\frac{Nh^n \Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right)}{V_n (2\pi)^{3/2}} \right]^{2/3} / (mc)^2, \quad (14)$$

即费米能与静止能量之比与粒子数密度和粒子的静止质量有关. 当费米子的静止质量确定时, 粒子数密度越大, 相对论特征量就越大; 当费米系统的粒子数密度确定时, 粒子的静止质量越小, 相对论特征量就越大. 由图 2 可见: 与非相对论比较, 相对论特征量越大, 系统的总能量就越大, 相对论效应就越明显; 温度趋于零时, 相对论效应消失; 温度较高时(低于费米温度), 相对论特征量越大, 内能随温度的升高而增加的幅度就越大.

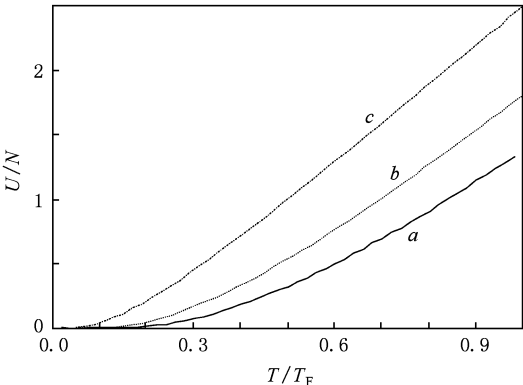


图 2 相对论特征量不同时粒子平均内能随温度的变化

当 $x = \frac{k_B T}{mc^2}$ 时, 由(5)式得三维硬球势中费米气体的热容量

$$C = Nk_B \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1} \exp(j\beta\mu)}{j^2} \times [(2j/x + (j/x)^2)K_2(j/x) + (j/x)(-3 - 2j/x)K_3(j/x) + (j/x)^2 K_4(j/x)] \times \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1} \exp(j\beta\mu)}{j} K_2(j/x) \right]^{-1} - Nk_B \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1} \exp(j\beta\mu)}{j} \times [(-1 - j/x)K_2(j/x) + (j/x)K_3(j/x)] \right\}^2$$

$$\times \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1} \exp(j\beta\mu)}{j} K_2(j/x) \right. \\ \left. \times \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \exp(j\beta\mu) K_2(j/x) \right]^{-1}. \quad (15)$$

取 $j = 1, k_B T_F = 1$, 以 T_F 为单位, $\frac{k_B T_F}{mc^2} = 2$ 和 $\frac{k_B T_F}{mc^2} =$

5 时, 由 (15) 式可以得到热容 C 与温度 T 的关系, 结果如图 3 所示. 图 3 中的曲线 a 为非相对论情况下热容量随温度的变化关系曲线, 曲线 b 和曲线 c 分别为相对论特征量为 2 和 5 时对应的热容量曲线.

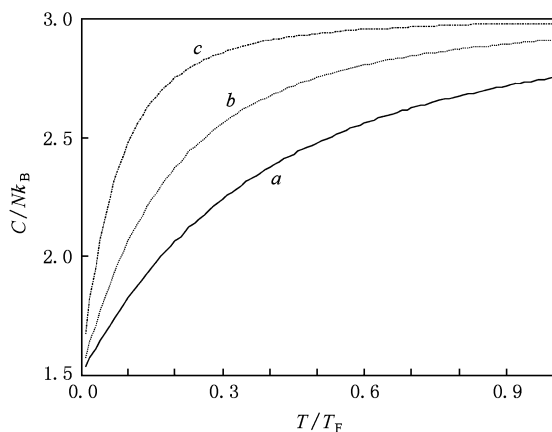


图 3 相对论特征量不同时热容与温度的关系

由图 3 可见: 与非相对论情况比较, 相对论特征量越大, 热容量就越大, 这和内能的变化特征相同; 热容量的转折温度 (即热容量趋于不变的温度) T_0 却随着相对论特征量的增大而减小; 在 $T < T_0$ 时, 考虑相对论效应时, 随温度的上升热容量增加更快; 相对论特征量越大, 热容量增加越快; 在 $T > T_0$ 时, 相对论特征量越大, 曲线越平缓, 即随温度的升高热容量的变化越小; 相对论效应对热容量的影响随着温度的升高先由小变大, 然后再由大变小.

4. 结 论

本文在广义外势中相对论费米系统热力学量的基础上研究了硬球势中相对论费米气体的热力学性质, 给出了硬球势中系统的费米能、内能和热容量的解析式, 分析了相对论效应对热力学性质的影响. 结果显示, 与非相对论情况相比较, 相对论效应使系统的内能和热容量都增大. 在低温 ($T < T_0$) 时, 相对论效应对总能量的影响并不明显, 而对热容量的影响却很突出. 随着相对论特征量的增大, 热容量趋于不变的转折温度降低. 相对论效应对热容量的影响随着温度的升高先由小变大, 再由大变小.

- [1] Regal C A, Ticknor C, Bohn J L, Jin D S 2003 *Nature* **424** 47
- [2] Xiong H W, Liu S J, Zhang W P, Zhan M S 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 120401
- [3] Stoof H T C, Houbiers M, Sackett C A, Hulet R G 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 10
- [4] Yuan D Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3912 (in Chinese) [袁都奇 2006 物理学报 **55** 3912]
- [5] Su G Z, Chen L X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 984 (in Chinese) [苏国珍、陈丽璇 2004 物理学报 **53** 984]
- [6] Men F D 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1622 (in Chinese) [门福殿 2006 物理学报 **55** 1622]
- [7] Huang Z F, Ou C J, Chen J C 2009 *Chin. Phys.* **18** 1380
- [8] Men F D, Liu H 2006 *Chin. Phys.* **15** 2856
- [9] Men F D, Liu H, Zhu H Y 2008 *Chin. Phys.* **17** 3236

- [10] Su G Z, Chen J C, Chen L X 2006 *J. Phys. A* **39** 4935
- [11] Lü L, Men F D, Liu H 2007 *J. Shandong Nor. Univ. (Nat. Sci.)* **22** 55 (in Chinese) [吕琳、门福殿、刘慧 2007 山东师范大学学报 (自然科学版) **22** 55]
- [12] Yan Z J 2001 *Coll. Phys.* **20** 3 (in Chinese) [严子俊 2001 大学物理 **20** 3]
- [13] Beckmann R, Karsch F, Miller D E 1982 *Phys. Rev. A* **25** 561
- [14] Frota H O, Silva M S, Goulart R S 1989 *Phys. Rev. A* **39** 830
- [15] Men F D, Liu H, Fan Z L, Zhu H Y 2009 *Chin. Phys.* **18** 2649
- [16] Greiner W, Neise L, Stocker H 2001 *Thermodynamics and Statistical Mechanics* (Beijing: Peking University Press) p197 (in Chinese) [顾莱纳 W、奈斯 L、斯托克 H 2001 热力学与统计力学 (中译本) (北京: 北京大学出版社) 第 197 页]

Thermodynamic property of a relativistic Fermi gas trapped in hard-sphere potential

Fan Zhao-Lan¹⁾ Men Fu-Dian^{1)†} Dou Rui-Bo²⁾

1) (*College of Physics Science and Technology, China University of Petroleum (East China), Dongying 257061, China*)

2) (*Qingdao Top Institute of Information Technology, Qingdao 266555, China*)

(Received 5 August 2009; revised manuscript received 26 November 2009)

Abstract

Using the methods of numerical simulation and quantum statistics, based on the thermodynamic quantities of Fermi gas trapped in a general external potential, we studied the thermodynamic properties of a relativistic Fermi gas trapped in hard-sphere potential, gave the analytical expressions of the energy and heat capacity of the relativistic Fermi system, and analyzed the influence of the relativistic effect on the energy and heat capacity. The results showed the energy and heat capacity of the relativistic Fermi system is larger than those of the nonrelativistic case. The larger the relativistic eigenvalue, the lower the change temperature of heat capacity. As the temperature rises, the larger the relativistic eigenvalue, the greater the energy.

Keywords: Fermi gas, relativistic effect, thermodynamic property

PACC: 0530F, 7110C

† E-mail: menfudian@163.com