

基于符号时间序列方法的开关变换器离散映射 算法复杂度分析*

杨 汝^{1)†} 张 波²⁾ 赵寿柏¹⁾ 劳裕锦¹⁾

1)(广州大学物理与电子工程学院, 广州 510400)

2)(华南理工大学电力学院, 广州 510640)

(2009 年 8 月 13 日收到; 2009 年 12 月 24 日收到修改稿)

开关变换器与其符号序列拓扑共轭, 这使得开关变换器系统特性的研究可以归于符号序列的研究, 从而得到更一般的结论. 采用基于符号时间序列的算法复杂度来分析开关变换器的复杂行为, 从具体内在结构得到开关变换器的本质特征. 与统计复杂度不同, 算法复杂度还可以定量地描述开关变换器的突变点和工作周期, 为深入了解开关变换器的特性和混沌行为的利用提供理论依据.

关键词: 符号时间序列, 离散映射, 算法复杂度, 分叉图

PACC: 0545

1. 引 言

符号时间序列分析是由符号动力学理论、混沌时间序列分析和信息理论衍生的一种信号分析方法. 通过若干个可能值上的离散时间序列, 将数据连续的状态空间划分为离散胞元, 并对每个胞元分配不同的符号或数值. 这是一个粗粒化过程, 从而将千变万化的数据转化为包含符号或数值的符号序列. 这一过程能够捕获大尺度的信号特征, 降低动力学噪声的影响. 符号时间序列只反映映射拉伸和折叠的本质而不管映射函数的具体形式, 于是由符号序列得到的结果具有极大的普遍性, 有利于刻画和分析共性. 该分析方法能够描述动力学系统不稳定性的开始点, 能及时发现和区分动力学系统模式的先兆行为^[1-3].

符号时间序列的复杂度是刻画动力学系统特征的主要参数之一. 复杂度主要分为统计复杂度和算法复杂度. 统计复杂度(如 Lyapunov 指数和熵)是从系统整体的统计意义来定量度量复杂性. 算法复杂度是从分析事物的具体内在结构来得到其本质, 等于产生该事物的图形结构或符号序列的最短序

列长度与该图形结构或符号序列本身大小之比的极限^[4-6].

开关变换器虽然能用简单的状态方程来描述, 但作为一个线性切换系统, 在不同的参数空间表现出分叉混沌等复杂结构形态. 多年来, 人们采用 Lyapunov 指数等参数来度量系统的复杂程度, 但这些统计方法不能全面刻画系统复杂性本质^[7-15]. 本文采用算法复杂度来分析开关变换器产生的复杂行为, 算法复杂度还可以定量地描述开关变换器的突变点和工作周期, 为深入了解开关变换器的特性和混沌行为的利用提供理论依据.

2. 开关变换器与其符号序列拓扑共轭

2.1. 开关变换器符号序列

峰值电流控制模式的 Buck 变换器典型电路如图 1 所示.

工作在连续模式的 Buck 变换器基于频闪映射的数学模型为^[16]

$$X_{n+1} = N_2 N_1 X_n + N_2 (N_1 - I) A_1^{-1} B_1 E. \quad (1)$$

这里

* 国家自然科学基金重点项目(批准号:50937001)、国家自然科学基金(批准号:60474066, 50777009)和广州市高等学校科学技术研究计划(批准号:62053)资助的课题.

† E-mail: Lisayang702@yahoo.com.cn

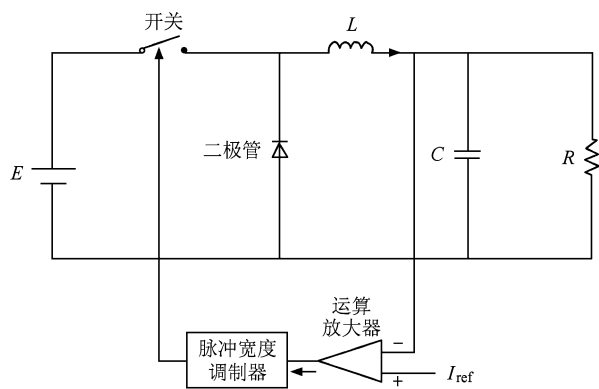


图1 峰值电流控制 Buck 变换器

$$N_1 = e^{A_1 t_1},$$

$$N_2 = e^{A_2 t_2},$$

其中 t_1 为开关导通时间, t_2 为开关断开时间;

$$X = \begin{bmatrix} i_L \\ u_c \end{bmatrix},$$

其中 i_L 为电感电流, u_c 为电容电压, 是系统的两个状态变量; A_1, A_2, B_1, B_2 是系统的状态矩阵, 可分别表示为

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}, \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}, \\ B_1 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}, \\ B_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (2)$$

A_1^{-1} 为 A_1 的逆阵; I 为二阶单位矩阵; E 为输入电压.

从(1)式可以知道, Buck 变换器频闪映射的数学模型只有 t_1 和 t_2 两个变量. 图 2 所示为参考电流 I_{ref} 与电感电流 i_L 的关系.

设第 n 个开关周期的到达时刻为 t_n , 电感电流为 i_{Ln} , 电容电压为 u_{Cn} , 则可以得出

$$t_1 = \frac{(I_{ref} - i_{Ln})L}{E - u_{Cn}}, \quad (3)$$

$$t_2 = T \left(1 - \text{mod} \left(\frac{t_1}{T}, 1 \right) \right). \quad (4)$$

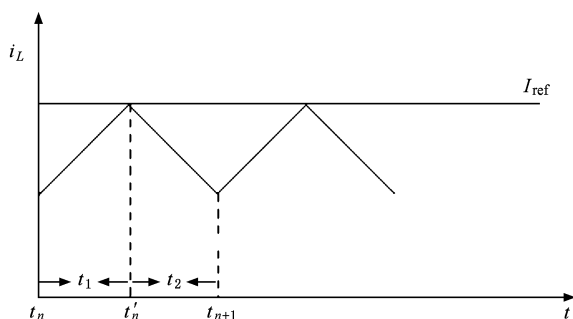


图2 参考电流与电感电流的关系

至此, 已经建立了图 1 所示的 Buck 变换器的精确离散映射模型. 以离散映射的均值作为刻度, 大于均值的点置 1, 其他的点置 0, 从而得到开关变换器的精确离散映射的符号化时间序列(图 3).

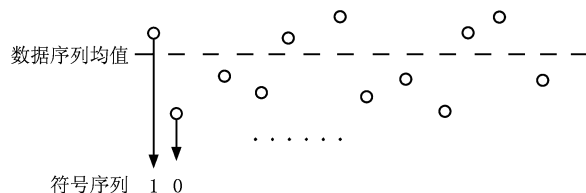


图3 开关变换器离散映射符号化示意图

2.2. 开关变换器与其符号序列拓扑共轭

考虑某种相空间 X 中的完全确定论的动力学 F , 它把 X 映射到自身, $F: X \rightarrow X$, 只要 X 是紧致流形, 它就具备有限的开覆盖, 以不同的字符来命名各片覆盖就只需用到有限的字符集合. 用这个字符集合可以通过动力学生成各种符号序列, 把这样的符号序列当作点, 可以支起符号序列空间 Σ . 不管 X 中点 x 的精确位置, 只看它落在哪片覆盖中, 而代之以相应的符号 s , 实现了“粗粒化”, 并且建立起对应关系 $\Psi: x \rightarrow s$.

移位操作定义了从 Σ 到自身的动力学 $\sigma: \Sigma \rightarrow \Sigma$, 数学上称为 Σ 的移位自同构. 在 Σ 中引入度规与拓扑可建立较丰富的数学结构. 对于移位算子 σ , 它是简单地将符号序列中第一符号去掉的运算^[17], 即

$$\sigma(s_0 s_1 s_2 \cdots s_n \cdots) = s_1 s_2 s_3 \cdots s_n \cdots \quad (5)$$

(5)式代表动力系统的演化(运动), 也就是代表映射 F , 所以移位算子 σ 和映射 F 之间是一一对应的. 还可以对符号序列定义度量. 令 s 和 t 表示两符号序列, 则它们间的度量为

$$d(s, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}, \quad (6)$$

式中 s_i 和 t_i 取二进制数字 0 和 1 中的一个. 于是, (6) 式又可写为

$$d(s, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\delta_i}{2^i}, \quad (7)$$

$$\delta_i = \begin{cases} 0 & (s_i = t_i), \\ 1 & (s_i \neq t_i). \end{cases}$$

当 s_i 和 t_i 前面 n 个符号相同, $s_i = t_i (i = 1, 2, 3, \dots, n)$, 则有

$$d(s, t) = \sum_{i=0}^n \frac{|s_i - t_i|}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n}.$$
 (8)

设任意给定小数 $\varepsilon > 0$, 取 n 使得 $\varepsilon > 1/2^n$, 并令 $\zeta = 1/2^{n+1}$, 则对于满足 $d(s, t) < \zeta$ 的任意 s 和 t 应有 $s_i = t_i (i = 1, 2, 3, \dots, n+1)$, 也就是 $\sigma(s)$ 和 $\sigma(t)$ 的前 $n+1$ 项完全相同, 从而 $d(\sigma(s), \sigma(t)) \leq 1/2^n < \varepsilon$, 故 σ 是连续的. σ 和 F 既是一一对应的也是连续的, 因此 σ 和 F 拓扑共轲.

对于 Boost 开关变换器, 它与符号序列之间的拓扑共轲关系如图 4 所示, 其中 v_n 为第 n 个开关周期的电压, v_{n+1} 为第 $n+1$ 个开关周期的电压.

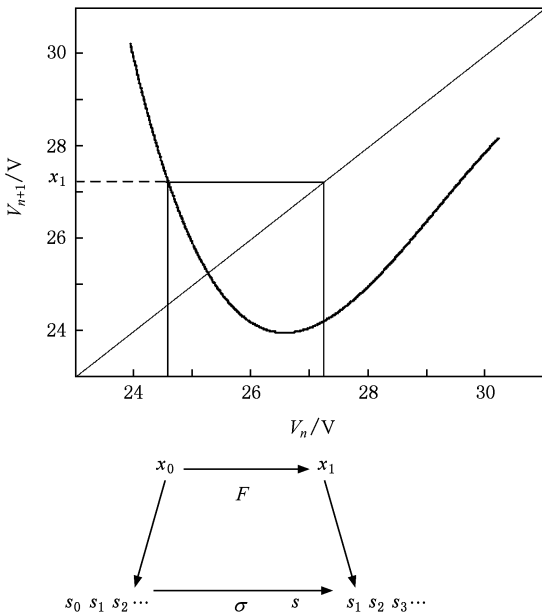


图 4 Boost 变换器 F 和 σ 拓扑共轲

动力系统与符号序列拓扑共轲, 这使得动力系统特性的研究可以归于关于符号序列的研究. 符号

时间序列的算法复杂度反应了其动力系统的算法复杂性.

3. 基于符号时间序列的开关变换器算法复杂度

3.1. Lempel-Ziv (L-Z) 复杂度

为了具体地用符号序列表示动力系统, 以便对动力系统算法复杂度的计算, Lempel 和 Ziv 提出了从系统内在结构或过程具体计算复杂度的方法, 即 L-Z 复杂度^[18].

给定时间序列 $S\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, 首先对它进行粗粒化处理. 设其平均值为 \bar{s} , 用二进制的两个数字 (0, 1) 组成的符号序列替代时间序列. 替代原则为时间序列中大于 \bar{s} 的数取为 1, 小于 \bar{s} 的数取为 0. 这样就将时间序列变为只含“0”和“1”的符号序列, 亦即将时间序列转化为符号序列, 符号序列和时间序列拓扑共轲. 可以通过对符号序列的分析得到轨道的信息, 分析符号序列的复杂性是对轨道多样性的一种度量. 不妨设重构的符号序列也为 $S\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, 对重构序列形成的字符按一定规则进行子串划分. 具体步骤如下: 记时间序列 S 的 L-Z 复杂度为 C , 首先设 S 的符号序列是 $S = s_1, s_2, \dots, s_r$, S 后的一个或一串字符 s_{r+1} 或 $s_{r+1}, s_{r+2}, \dots, s_{r+k}$ 称为 Q , 两者连接得到 SQ . 令 $SQ\pi$ 表示一串字符 SQ 减去最后一个字符, 然后看 Q 是否属于 $SQ\pi$ 中已有的“字句”. 若是属于 $SQ\pi$ 中已有的“字句”, 称之为“复制”, “复制”时 Q 向后追加一个字符或字符串, 然后重复以上步骤; 若不属于 $SQ\pi$ 中已有的“字句”, 称之为“添加”, “添加”时 Q 向后取一个字符或字符串替代 Q 原来的符号序列, 同时将一个“.”添加到 SQ 后面, 下一步将 SQ 序列“.”前所有字符看成 S , 重复以上步骤直到 SQ 等于要分析的字符串. 这样便得到 SQ 中以“.”为标志的分段数, 也就是它的 L-Z 复杂度 C .

3.2. 开关变换器离散映射的 L-Z 复杂度

基于 (1) 式 Buck 变换器的离散映射模型, 电路参数取 $R = 15 \Omega, C = 50 \mu\text{F}, L = 0.5 \text{ mH}, I_{\text{ref}} = 0.925 \text{ A}$. 以输入电压 E 为参数, 可得到每个输入电压值所对应的电感电流离散序列. 去掉每个序列瞬态过程的点后取 1000 个点, 再根据 L-Z 复杂度的算法求符号序列的复杂度. 利用 Matlab 软件实现以上复杂度

算法,便可得出 Buck 变换器电感电流符号序列的 L-Z 复杂度,结果如图 5 所示.

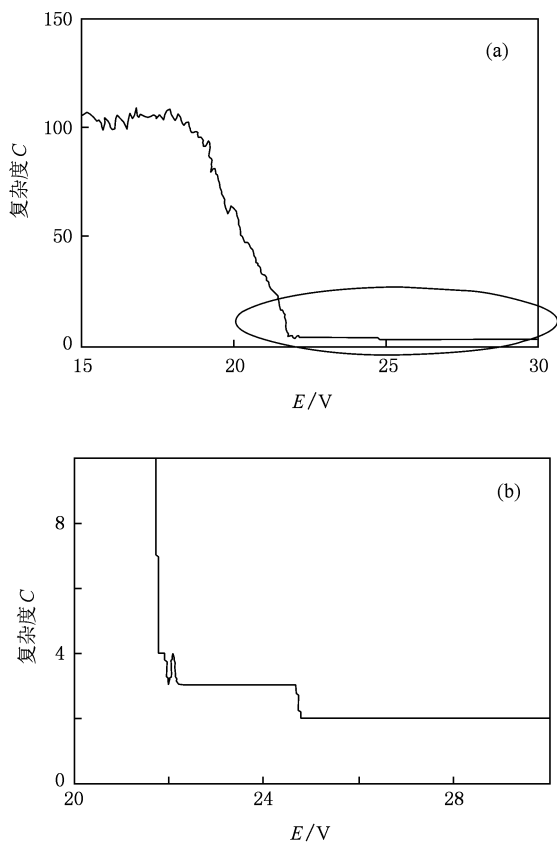


图 5 以 E 为参数的 Buck 变换器电感电流符号序列的 L-Z 复杂度 (b) 为 (a) 图的局部放大

由图 5 可以看到,输入电压 E 在 30—24.8 V 的范围内,电感电流符号序列的 L-Z 复杂度为 2,说明在此范围内电感电流呈现单周期状态. $E = 24.9$ V 处, L-Z 复杂度由 2 变到 3,说明在此处电感电流出现分叉,由单周期变成二周期. E 在 24.9—22.1 V 的范围内, L-Z 复杂度都为 3,说明在此范围内电感电流都呈现出二周期的状态. $E < 22.1$ V 的范围内,随着输入电压的减小, L-Z 复杂度逐渐增大,最后达到 100 左右,说明在此范围内电感电流随着输入电压的减小呈现的行为越来越复杂,最终进入混沌状态.

同样,电路参数取 $R = 15 \Omega$, $C = 50 \mu\text{F}$, $L = 0.5 \text{ mH}$, $E = 48 \text{ V}$. 以参考电流 I_{ref} 为参数,按照以输入电压 E 为参数的做法,可得到电感电流符号序列的 L-Z 复杂度,结果如图 6 所示.

由图 6 可以看到,参考电流 I_{ref} 在 1.2—1.79 A 的范围内,电感电流符号序列的 L-Z 复杂度为 2,电

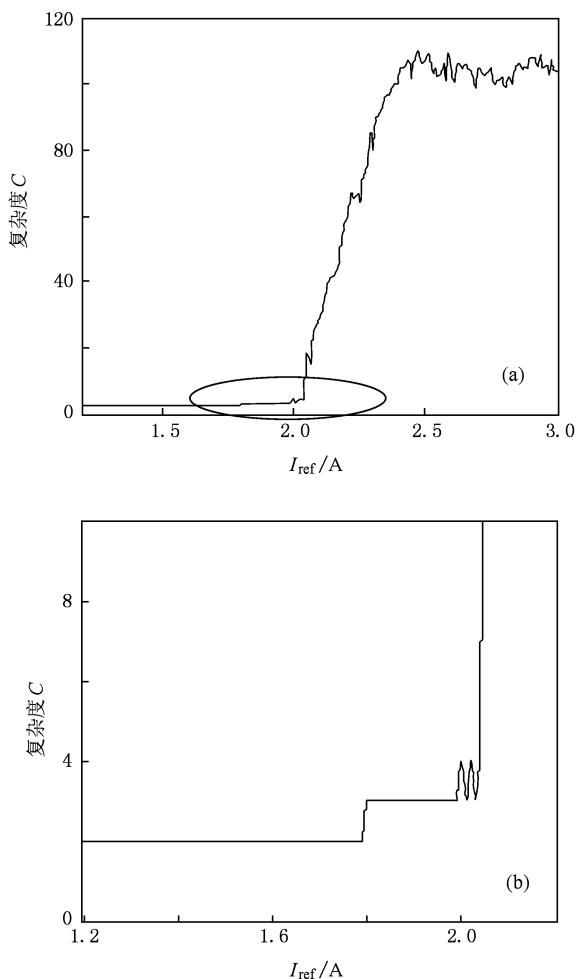


图 6 以 I_{ref} 为参数的 L-Z 复杂度 (b) 为 (a) 图的局部放大

感电流呈现单周期状态. $I_{\text{ref}} = 1.8$ A 处, L-Z 复杂度由 2 变到 3,电感电流在此处发生分叉,由单周期变成二周期. I_{ref} 在 1.8—1.99 A 的范围内, L-Z 复杂度都为 3,电感电流呈现二周期状态. 在参考电流 $I_{\text{ref}} > 1.99$ A 的范围内,随着参考电流的增大, L-Z 复杂度逐渐增大,最后达到 100 左右,亦即电感电流随着参考电流的增大呈现的行为越来越复杂,最终进入混沌状态.

从以上所述可以清楚地知道,通过符号序列 L-Z 复杂度可以描述开关变换器离散映射随参数变化所表现出来的非线性动力学行为.

为了验证利用符号序列 L-Z 复杂度描述开关变换器非线性动力学行为的准确性,下面分析电感电流的分叉图.

根据(1)式 Buck 变换器的离散映射模型,利用 Matlab 软件分别得到以输入电压 E 和参考电流 I_{ref} 为参数的电感电流分叉图,如图 7 和图 8 所示.

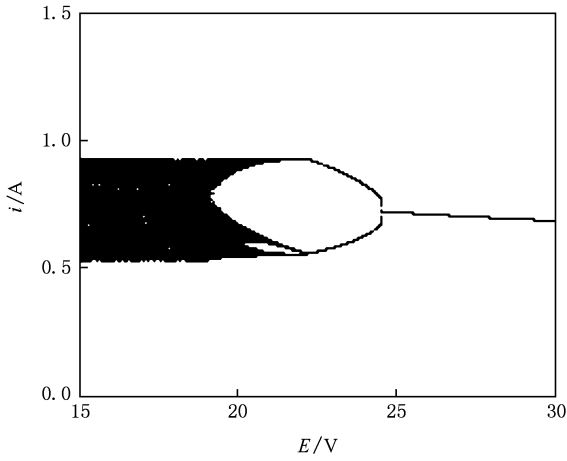


图 7 以 E 为参数的电感电流分叉图

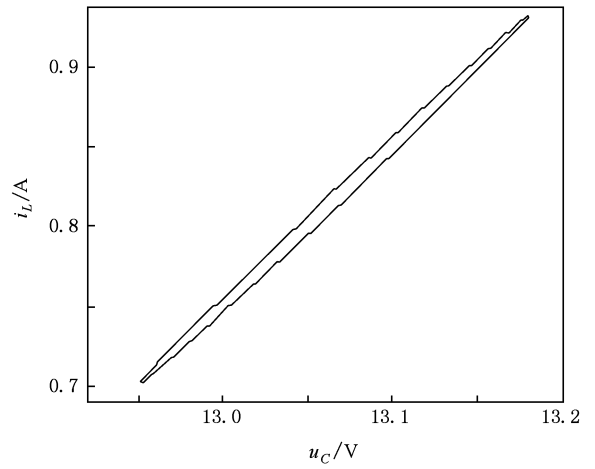


图 9 $E = 28 \text{ V}, C = 2$ 时, 系统为单周期状态

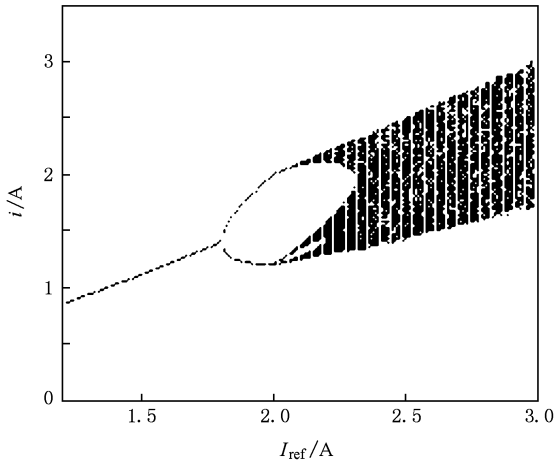


图 8 以 I_{ref} 为参数的电感电流分叉图

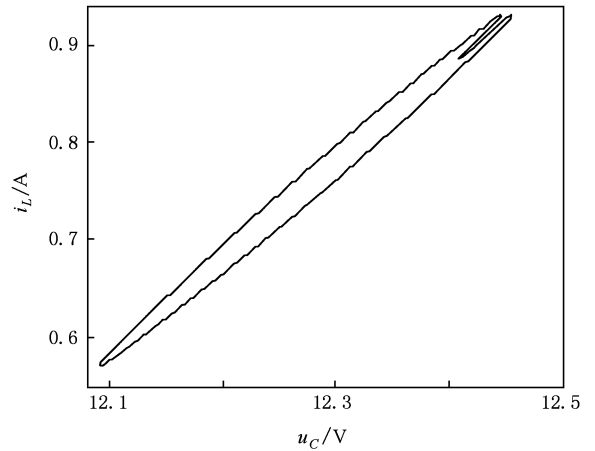


图 10 $E = 24 \text{ V}, C = 3$ 时, 系统为二周期状态

从图 7 可以看出: 输入电压 E 在 $30\text{--}24.8 \text{ V}$ 的范围内, 电感电流呈现单周期状态. 在输入电压 $E = 24.9 \text{ V}$ 处, 电感电流发生分叉, 由单周期进入二周期. 输入电压 E 在 $24.9\text{--}22.1 \text{ V}$ 的范围内, 电感电流呈现二周期状态. 在输入电压 $E < 22.1 \text{ V}$ 的范围内, 随着输入电压的减小, 电感电流逐渐进入混沌状态. 由图 7 所得特性和图 5 所得结果一致. 同样, 由图 8 所得到的特性与图 6 一致. 由此可知, 通过符号时间序列 L-Z 复杂度方法和电感电流分叉图方法描述的 Buck 变换器非线性行为是一致的.

为了更形象地观察不同的 L-Z 复杂度 C 所对应的 Buck 变换器的不同行为, 下面通过电感电流与电容电压的相图来说明. 以输入电压 E 为参数的相图如图 9—图 11 所示, 以参考电流 I_{ref} 为参数的相图如图 12—图 14 所示.

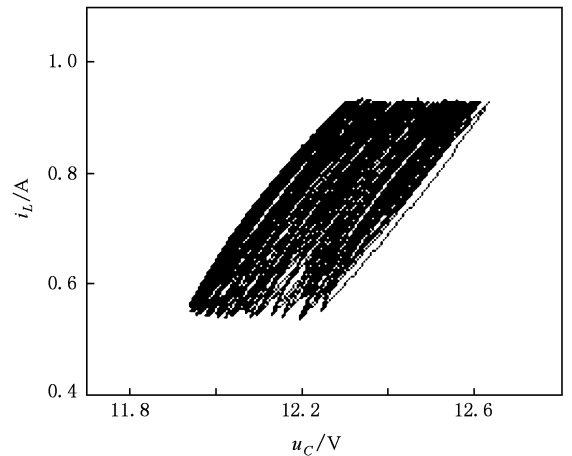
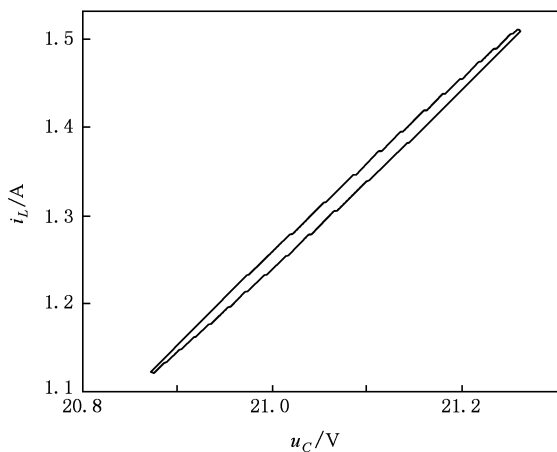
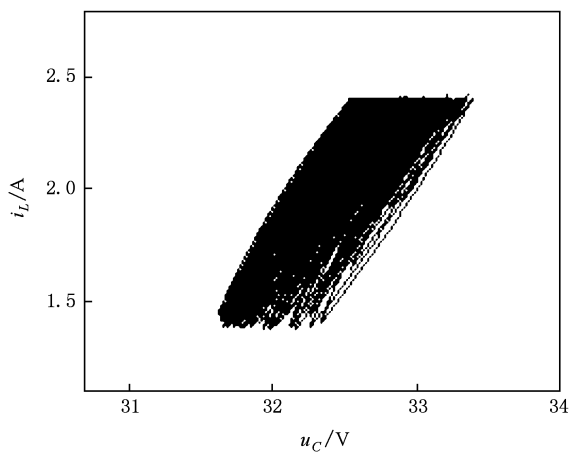
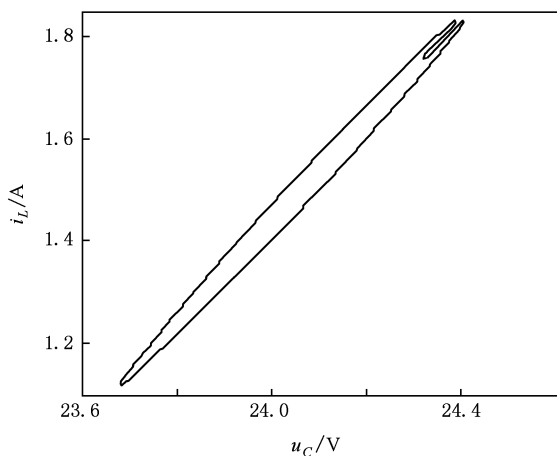


图 11 $E = 18 \text{ V}, C = 110$ 时, 系统为混沌状态

由图 9—图 14 可以知道, 电感电流符号序列 L-Z 复杂度 C 与 Buck 变换器的工作状态是相对应的.

图12 $I_{\text{ref}} = 1.5 \text{ A}$, $C = 2$ 时, 系统为单周期状态图14 $I_{\text{ref}} = 2.5 \text{ A}$, $C = 107$ 时, 系统为混沌状态图13 $I_{\text{ref}} = 1.82 \text{ A}$, $C = 3$ 时, 系统为二周期状态

4. 结 论

由上述研究可知, 基于符号序列的 L-Z 复杂度可以反映 Buck 变换器非线性行为的复杂性. 复杂度越小, 系统非线性行为就越简单; 复杂度越大, 系统的非线性行为就越复杂. L-Z 复杂度还可以定量地描述开关变换器的突变点和工作周期. 例如复杂度 $C = 2$, 系统工作在单周期状态; 复杂度 $C = 3$, 系统工作在二周期状态; 复杂度 $C = 4$, 系统工作在四周期状态. 因此, 通过符号序列 L-Z 复杂度分析开关变换器的特征不失为一种较好的方法.

- [1] Cai J P, Li Z, Song W T 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1871 (in Chinese) [蔡觉平、李 赞、宋文涛 2003 物理学报 **52** 1871]
- [2] Zhang D Z 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3152 (in Chinese) [张佃中 2007 物理学报 **56** 3152]
- [3] Hou W, Feng G L, Dong W J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3940 (in Chinese) [侯 威、封国林、董文杰 2005 物理学报 **54** 3940]
- [4] Liu X F, Yu W L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2587 (in Chinese) [刘小峰、俞文莉 2008 物理学报 **57** 2587]
- [5] Zhu Y H, Dong Y J 2001 *Acta Mathe. Sci. A* **21** 527 (in Chinese) [朱勇华、董亚鹃 2001 数学物理学报 **A 21** 527]
- [6] Zong G D, Wu Y Q 2004 *Fifth World Congress on Intelligent Control and Automation* (Hangzhou: IEEE) p1119
- [7] Luo X S, Chen G R 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 12 (in Chinese) [罗晓曙、陈关荣 2003 物理学报 **52** 12]
- [8] Li M, Ma X K, Dai D, Zhang H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1084 (in Chinese) [李 明、马西魁、戴 栋、张 浩 2005 物理学报 **54** 1084]
- [9] Dai D, Ma X K, Li X F 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2369 (in Chinese) [戴 栋、马西魁、李小峰 2003 物理学报 **52** 2369]
- [10] Zhou Y F, Chen J N 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3676 (in Chinese) [周宇飞、陈军宁 2004 物理学报 **53** 3676]
- [11] Zhou Y L, Luo X S 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2978 (in Chinese) [邹艳丽、罗晓曙 2003 物理学报 **52** 2978]
- [12] Baranovski A L, Daems D 1995 *Int. J. Bifur. Chaos* **5** 1585
- [13] Lasota A A, Mackey M C 1994 *Chaos, Fractals, and Noise* (Berlin: Springer Verlag)
- [14] Baranovski A L, Schwarz W 2003 *IEEE International Symposium on Circuits and Systems* (London: IEEE) pp25—28
- [15] Yang R, Zhang B 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 2369 (in Chinese) [杨 汝、张 波 2006 物理学报 **55** 2369]
- [16] Liu B Z, Peng J H 2005 *Nonlinear Dynamics* (Beijing: Higher Education Press) p244 (in Chinese) [刘秉正、彭建华 2005 非线性动力学 (北京: 高等教育出版社) 第 244 页]
- [17] Xie X X, Li S, Zhang C L, Li J K 2005 *Comp. Sys. Comp. Sci.* **2**(3) 61 (in Chinese) [解幸幸、李 舒、张春利、李建康 2005 复杂系统与复杂性科学 **2**(3) 61]
- [18] Lempel A, Ziv J 1976 *IEEE Trans. Inform. Theor.* **22** 75

Arithmetic complexity of discrete map of converter based on symbol time series*

Yang Ru^{1)†} Zhang Bo²⁾ Zhao Shou-Bai¹⁾ Lao Yu-Jin¹⁾

1) (*School of Physics and Electronic Engineering, Guangzhou University, Guangzhou 510400, China*)

2) (*College of Electric Power, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China*)

(Received 13 August 2009; revised manuscript received 24 December 2009)

Abstract

The converter topologically conjugates with its symbol time series. The research of converter can be reduced to the research of symbol time series, and more common results can be gotten. The complexity of converter is studied based on arithmetic complexity of symbol time series, characteristics are gotten from its inner structure. Compared with statistics complexity, arithmetic complexity can describe working cycling and catastrophe point, thus the theoretical basis for understanding the complexity characteristics of converter is provided.

Keywords: symbol time series, discrete map, arithmetic complexity, bifurcation chart

PACC: 0545

* Project supported by the Key Program of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 50937001), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 60474066, 50777009) and the Science and Technology Research Program of Institution of Higher Education of Guangzhou, China (Grant No. 62053).

† E-mail: Lisayang702@yahoo.com.cn