

# 耦合哈密顿系统中测度同步 发生机理的研究\*

田 静<sup>1)</sup> 邱海波<sup>1)2)</sup> 陈 勇<sup>1)</sup>

1) (兰州大学理论物理研究所, 兰州 730000)

2) (北京科技大学物理系, 北京 100083)

(2009 年 9 月 2 日收到; 2009 年 11 月 19 日收到修改稿)

测度同步是在耦合哈密顿系统中发现的一种奇特现象. 采用 Poincaré 截面方法, 研究了离散及连续的哈密顿系统中测度同步的发生机理. 结果表明, 测度同步的发生源于相空间分界线的穿越行为.

**关键词:** 测度同步, Poincaré 截面, 哈密顿系统

**PACC:** 0545

## 1. 引 言

同步在物理上是一种常见的非线性现象<sup>[1-5]</sup>. 自 20 世纪 90 年代以来, 发现的同步现象越来越多, 涉及的领域也越来越广泛, 例如全局耦合的 logistic 映射<sup>[6]</sup>、混沌振子<sup>[7]</sup>、神经网络<sup>[8]</sup>等等. 特别是近年来随着非线性科学的深入发展, 同步的概念和理论基础日趋完善, 人们已经发现了许多不同类型的同步并且作了相应的研究, 如完全同步<sup>[9]</sup>、相同步<sup>[10]</sup>、滞后同步<sup>[11]</sup>以及广义同步<sup>[12]</sup>等.

传统意义上的同步都是对耗散系统而言的, 无论哪种同步现象的发生, 其直接的表现都是系统相空间的收缩. 哈密顿系统由于受到 Liouville 定理的限制, 不会在相空间中出现相体积的塌缩, 也就不可能像耗散系统那样出现传统意义上的同步现象. 然而, 1999 年 Hampton 和 Zanette<sup>[13]</sup> 研究耦合哈密顿系统时发现, 在耦合的全同哈密顿系统中存在一临界耦合强度, 当耦合强度大于临界耦合强度时, 各系统在相空间中占有相同的区域并拥有相同的测度, 这种全局耦合哈密顿系统所表现出的整体行为的改变, 在某种程度上可看成是一种广义上的弱同步现象, 他们将其命名为测度同步. 测度同步的概念提出后, 引起了人们广泛的兴趣和关注<sup>[14]</sup>. 王

新刚等<sup>[15,16]</sup> 研究了经典  $\phi_4$  模型, 提出了混沌测度同步以及利用测度同步方法对哈密顿系统进行控制. Vincent<sup>[17]</sup> 研究了多个耦合的 Duffing 振子模型, 发现了部分测度同步的现象. 陈绍英等<sup>[18]</sup> 提出了一种测度同步的数值判断方法. 然而, 对测度同步产生的机理, 迄今为止却没有深入的研究. 在概念提出伊始, 作为对测度同步现象的解析解释, Hampton 和 Zanette<sup>[13]</sup> 曾对一个容易简化处理的耦合哈密顿系统进行了研究, 发现测度同步的发生与其简化处理后的单摆表示中的分界线行为有着直接的联系. 这一研究对我们是一种启示. 但对于一般的耦合哈密顿系统, 其测度同步的发生仍没有得到解释. 本文通过对耦合哈密顿系统 Poincaré 截面的分析, 分别研究了离散以及连续的耦合哈密顿系统中测度同步发生的机理. 研究发现, 测度同步的发生源于系统相空间分界线的穿越行为.

## 2. 模型与测度同步

### 2.1. 离散哈密顿系统

考虑准映射模型如下:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= x(t) + y(t) + \alpha \sin x(t) \pmod{2\pi}, \\y(t+1) &= y(t) + \alpha \sin x(t) \pmod{2\pi},\end{aligned}\tag{1}$$

\* 国家自然科学基金(批准号:10975063)资助的课题.

其中  $\alpha$  是非线性参数, 系统的运动状态由  $\alpha$  和初始条件决定. 为了保持耦合后系统仍然是保守的,  $N$  个标准映像  $(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, N)$  之间的耦合方式为

$$\begin{aligned} x_i(t+1) &= x_i(t) + y_i(t) + \alpha \sin x(t), \\ y_i(t+1) &= y_i(t) + \frac{k}{N} \sum_j \sin[x_j(t) - x_i(t)] \pmod{2\pi}, \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $k$  是系统之间的耦合强度; 当  $i=1$  时, 本文称为系统 1, 当  $i=2$  时, 本文称为系统 2. 这种形式的耦合, 在连续哈密顿系统中<sup>[19]</sup> 相当于有效势.

在研究不同耦合强度下系统之间的关系时, 我们使用固定的初始条件为  $(x_1(0), y_1(0)) = (0.2807, -0.0802)$ ,  $(x_2(0), y_2(0)) = (-0.1471,$

$0.0134)$ , 非线性参数  $\alpha = -1.2$ . 当耦合强度为零时, 这两个初始条件分别对应两个不同的准周期轨道, 如图 1(a) 所示. 随着耦合强度的增大 ( $k = 0.003$ ), 系统的运动轨道变宽, 变成二维的圆环, 并且两轨道相邻的边界在不断靠近, 如图 1(b) 所示. 当耦合强度超过临界耦合强度时 ( $k > k_c = 0.0032$ ), 这两个轨道突然由原来的相互接近变为在相空间中分享相同的区域并拥有相同的测度. 这时某一个系统所能够达到相空间中任意点的无限小邻域内总能找到另一个系统的轨道, 如图 1(c), (d) 所示. 这种意义下的同步叫做测度同步, 发生转变时对应的耦合强度称为临界耦合强度.

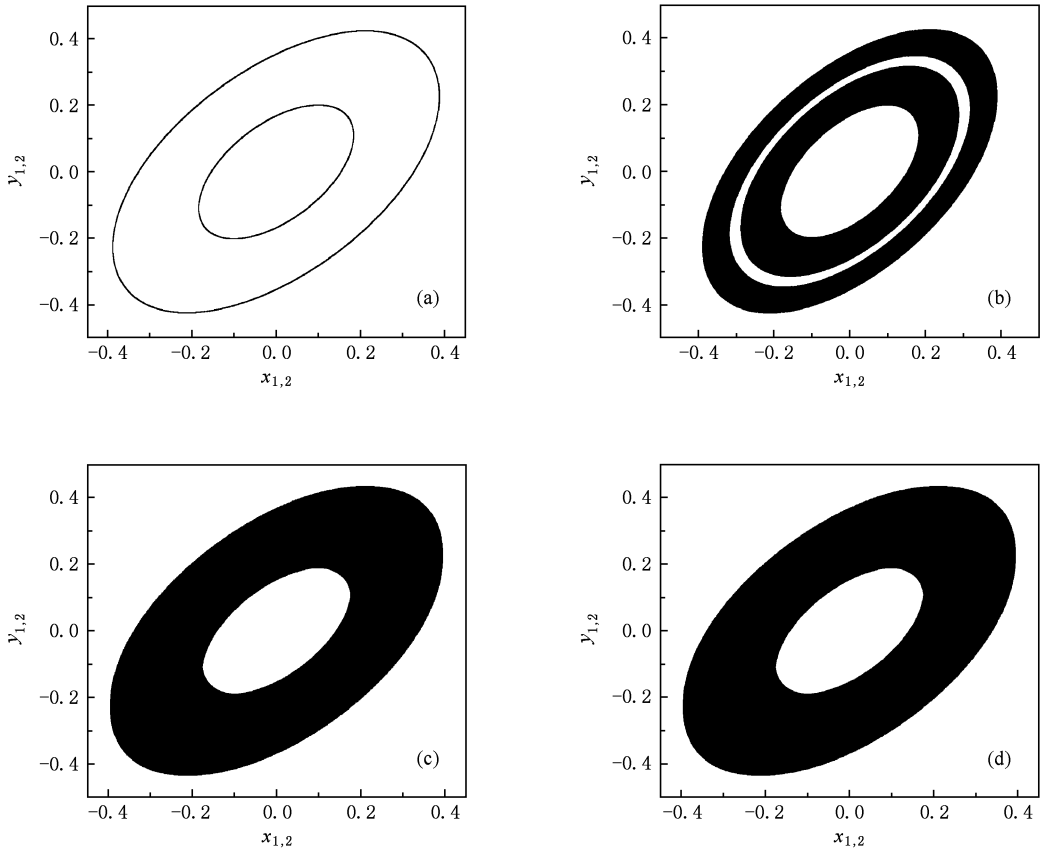


图 1 离散哈密顿系统中, 不同耦合强度下两个耦合标准映射的相图 (a)  $k=0$ , 没有耦合, 两个同心准周期轨道; (b)  $k=0.003$ , 小于临界耦合强度, 两个彼此接近的圆环; (c) 和 (d)  $k=0.0034$ , 大于临界耦合强度, 分别对应 (a) 图中小半径轨道和大半径轨道的演化, 两个轨道占有相同的相空间, 达到测度同步

下面我们将用 Poincaré 截面方法<sup>[20]</sup> 来分析系统随耦合参数变大的动力学行为. 在不同的耦合强度下, 取  $y_2(t) = 0$  且  $\dot{y}_2(t) > 0$  的平面作截面, 得到

Poincaré 映射  $(x_1, y_1)$ . 取  $y_1(t) = 0$  且  $\dot{y}_1(t) > 0$  的平面作截面, 得到 Poincaré 映射  $(x_2, y_2)$ . 图 2(a) 的曲线代表截面  $y_2(t) = 0$  上形成的  $x_1(t), y_1(t)$

的映像,由外向内随着耦合强度的增加,其环形区域逐渐减小,超过临界耦合强度时,其形状由环形变为类似月牙形.图 2(b)的曲线代表  $y_1(t) = 0$  面上形成的  $x_2(t)$ ,  $y_2(t)$  的映像,由内向外随着耦合强度的增加,其环形的区域逐渐增大,超过临界耦合强度时,形状变为类似月牙形.从图 2(c)可以看出,随着耦合强度的增加,系统 1 的轨道与系统 2 的轨道逐渐接近.

当到达分界线的时候两个系统的轨道重合,继续增加耦合强度,它们一直处在重合状态.这表明图 2 可以作为测度同步的判断依据,在测度同步前运动轨迹是不一致的,测度同步后变得一致起来,而测度同步的转变点与 Poincaré 截面中的分界线所对应的临界点一致.由此可知,测度同步的转变实际上是由相空间分界线的穿越行为引起的.

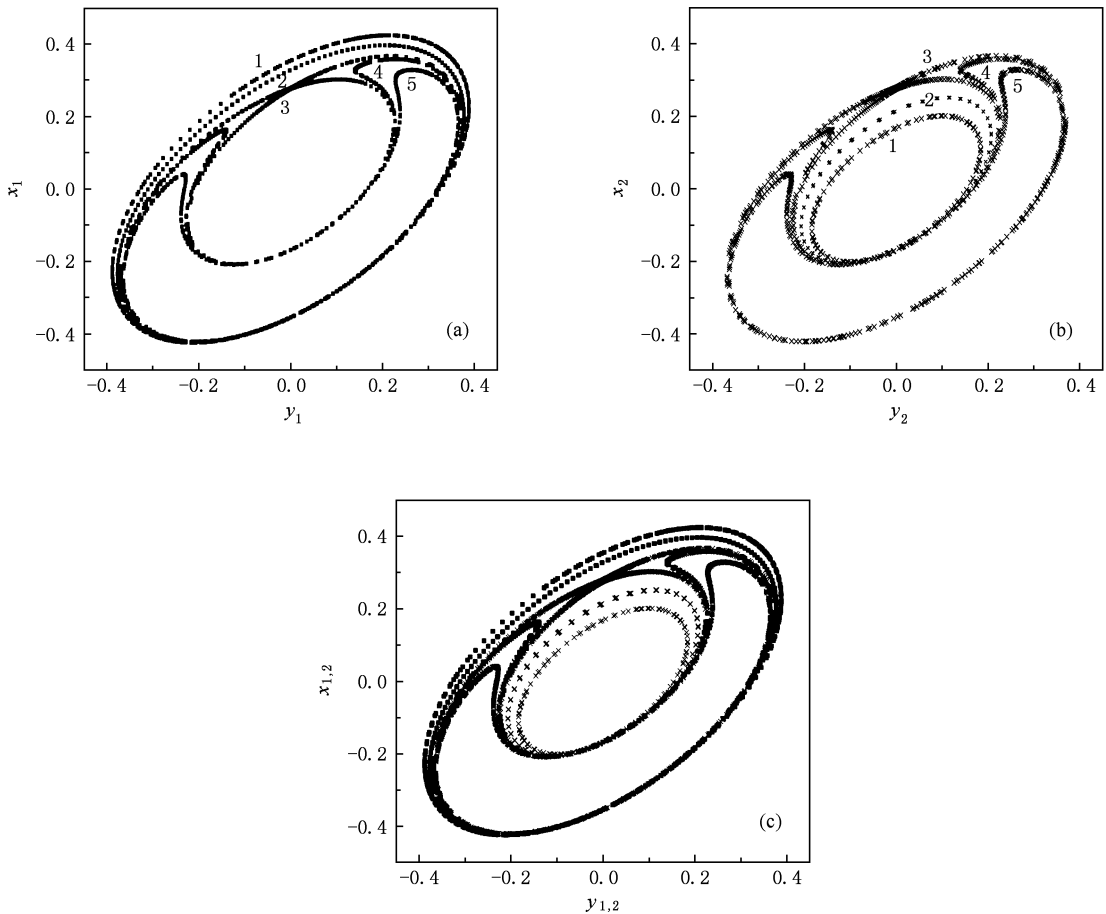


图 2 离散哈密顿系统中,不同耦合强度下的 Poincaré 映射 (a) 系统 1 的 Poincaré 映像图,图中的每一条曲线分别对应一个耦合强度的取值,轨迹 1,2,3,4,5 所对应的耦合强度分别为  $k = 0.001, 0.002, 0.0032, 0.0034, 0.004$ ; (b) 系统 2 的 Poincaré 映像图,与(a)图相同标号的曲线对应着相同的耦合强度; (c) 两个 Poincaré 映像的叠加图,分界线对应的临界耦合强度  $k_c = 0.0032$

## 2.2. 连续哈密顿系统

为了进一步验证 Poincaré 截面方法对测度同步分析的有效性,我们还研究了时间连续的哈密顿系统<sup>[13]</sup>. 哈密顿量为

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + V(q_1) + V(q_2)$$

$$+ \frac{k(q_1 - q_2)^2}{2}, \quad (3)$$

其中

$$V(q) = -\frac{q^2}{2} + \frac{q^4}{4}.$$

相应的正则方程为

$$\dot{q}_1 = p_1,$$

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 &= q_1 - q_1^3 - k(q_1 - q_2), \\ \dot{q}_2 &= p_2, \\ \dot{p}_2 &= q_3 - q_3^3 - k(q_2 - q_1).\end{aligned}\quad (4)$$

选取初始条件为  $(q_1(0), p_1(0)) = (0.0, 0.1)$ ,  $(q_2(0), p_2(0)) = (0.0, 0.4)$ . 当耦合强度  $k = 0$  时, 两振子的轨道是两个同心的圆环, 如图 3

(a) 所示. 随着耦合强度的增大 ( $k = 0.0145$ ), 两轨道演化区域逐渐增大, 变成二维的圆环, 并且两轨道相邻的边界在不断靠近, 如图 3(b) 所示. 当耦合强度超过临界耦合强度时 ( $k > k_c = 0.0152$ ), 这两个轨道突然由原来的相互接近变为在相空间中分享相同的区域并拥有相同的测度, 如图 3(c), (d) 所示. 此时两系统达到测度同步.

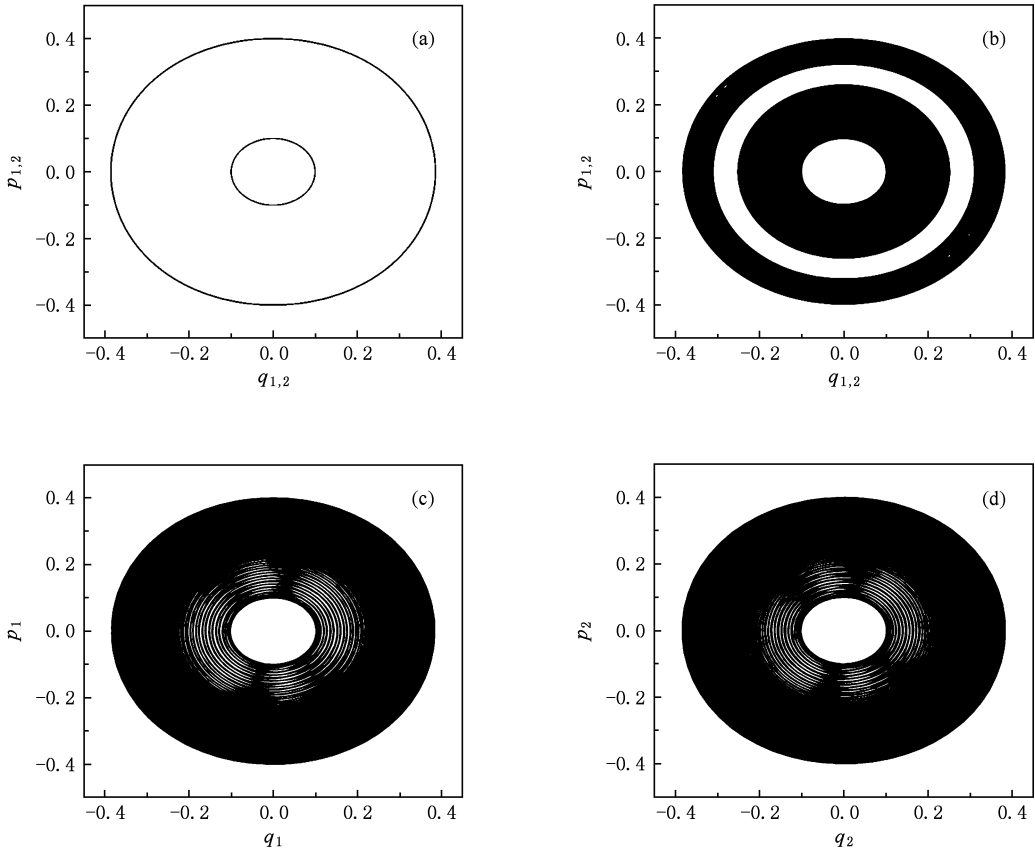


图 3 连续哈密顿系统中, 两个振子的相图 (a)  $k=0$ ; (b)  $k=0.0145$ , 小于临界耦合强度; (c) 和 (d)  $k=0.0153$ , 大于临界耦合强度, 分别对应(a)图中小半径轨道和大半径轨道的演化, 两个轨道占有相同的相空间, 达到测度同步

同样, 我们也用 Poincaré 截面<sup>[20]</sup>方法分析了连续哈密顿系统的动力学行为. 在不同的耦合强度下, 取  $q_2(t) = 0$  且  $\dot{q}_2(t) > 0$  的平面作截面, 得到 Poincaré 映射  $(q_1, p_1)$ . 取  $q_1(t) = 0$  且  $\dot{q}_1(t) > 0$  的平面作截面, 得到 Poincaré 映射  $(q_2, p_2)$ , 如图 4 所示. 图 4(a) 代表截面  $q_2(t) = 0$  上形成的振子 1 的  $q_1(t), p_1(t)$  的映像, 图 4(b) 代表截面  $q_1(t) = 0$  上形成的振子 2 的  $q_2(t), p_2(t)$  的映像. 振子 1 与振子 2 相同标号的轨道对应着相同的耦合强度. 振子 1 对应的耦合强度自外向内逐

渐增大, 振子 2 对应的耦合强度自内向外逐渐增大. 图 4(c) 是图 4(a) 和 (b) 的叠加, 分界线对应的耦合强度  $k_c = 0.0152$ . 由图 4 可见, 随着耦合强度的增加, 振子 1 与振子 2 的轨道逐渐接近. 当到达分界线时两条线重合, 而此时的耦合强度正好对应达到测度同步的临界耦合强度的值. 继续增加耦合强度, 其 Poincaré 映射也一直处在重合状态, 两个振子达到测度同步. 同样, 在时间连续系统中我们发现测度同步的转变对应着相空间分界线的穿越行为.

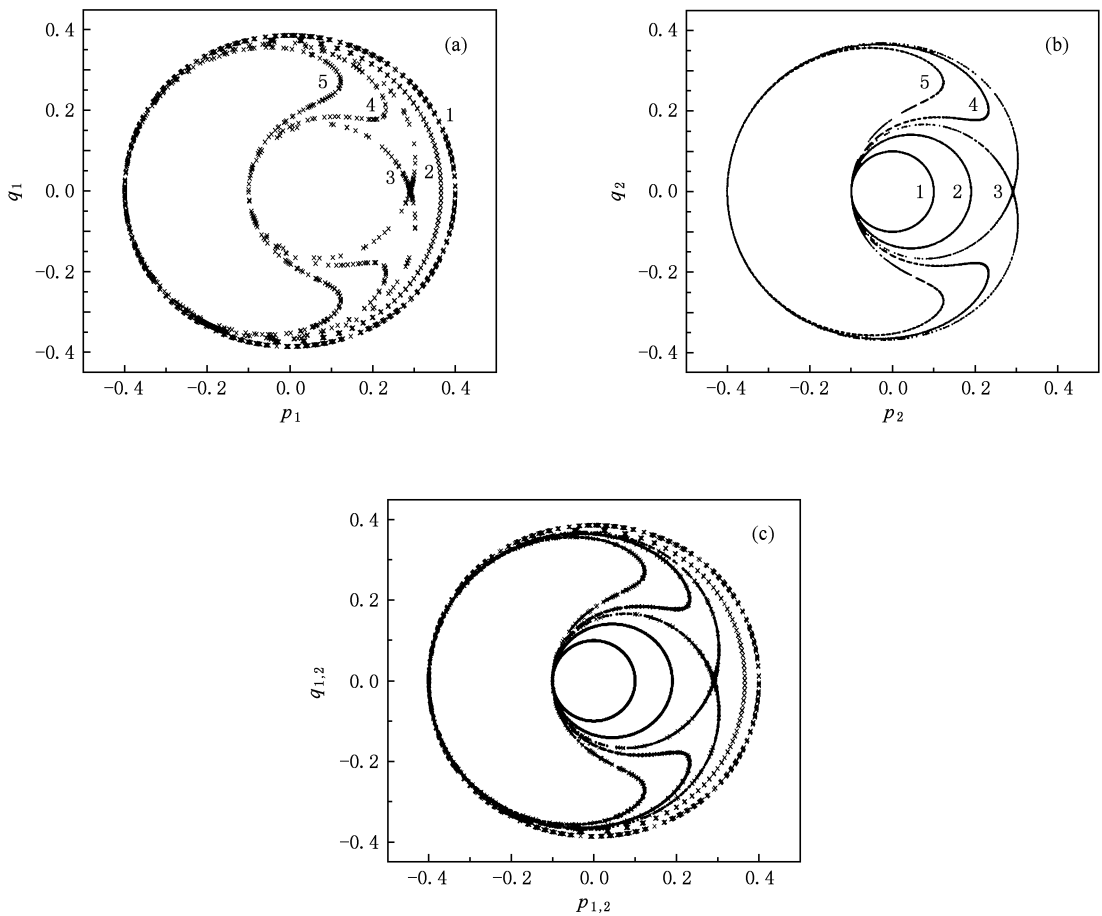


图4 连续哈密顿系统中,不同耦合强度下的 Poincaré 映射 (a)代表振子1的 Poincaré 映像图,轨迹1,2,3,4,5 所对应的耦合强度分别为  $k = 0.001, 0.01, 0.0152, 0.018, 0.025$ ; (b)代表振子2的 Poincaré 映像图,与(a)图相同标号的曲线对应着相同的耦合强度; (c)两个振子 Poincaré 映像的叠加图,分界线对应的临界耦合强度为  $k_c = 0.0152$

### 3. 结 论

本文采用 Poincaré 截面方法研究了耦合哈密顿系统测度同步的发生,揭示了产生测度同步的机

理. 研究发现,无论是离散哈密顿系统还是连续哈密顿系统,测度同步的发生都是源于相空间分界线的穿越行为. 另外,还验证了文献[13]提出的解析模型,也发现了同样的对应关系.

- [1] Kocarev L, Parlitz U 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 1816
- [2] Boccaletti S, Valladares D L 2000 *Phys. Rev. E* **62** 7497
- [3] Masoller C 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 2782
- [4] Pikovsky A, Rosenblum M, Kurths J 2001 *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences* (Cambridge: Cambridge University Press) p45
- [5] Zhang T X, Zheng Z G 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3287 (in Chinese) [张廷宪、郑志刚 2004 物理学报 **53** 3287]
- [6] Kaneko K 1986 *Physica D* **23** 436
- [7] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [8] Womelsdorf T, Schöffelen J M, Oostenveld R, Singer W, Desimone R, Engel A K, Fries P 2007 *Science* **316** 1609
- [9] Bao G, Narenmandula, Tubuxin, Eredencang 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1971 (in Chinese) [包 刚、那仁满都拉、图布心、额尔顿仓 2007 物理学报 **56** 1971]
- [10] Zheng Z G, Hu G, Zhou C S, Hu B B 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 2320 (in Chinese) [郑志刚、胡 岗、周昌松、胡斑比 2000 物理学报 **49** 2320]
- [11] Ma T D, Zhang H G, Wang Z L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3796 (in Chinese) [马铁东、张化光、王智良 2007 物理学报 **56**

- 3796]
- [12] Wu Y X, Huang X, Gao J, Zheng Z G 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3803 (in Chinese) [吴玉喜、黄霞、高建、郑志刚 2007 物理学报 **56** 3803]
- [13] Hampton A, Zanette D H 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 2179
- [14] Zheng Z G 2004 *Spatiotemporal Dynamics and Collective Behaviors in Coupled Nonlinear Systems* (Beijing: Higher Education Press) p143 (in Chinese) [郑志刚 2004 耦合非线性系统的时空动力学与合作行为 (北京: 高等教育出版社) 第 143 页]
- [15] Wang X G, Zhan M, Lai C H, Hu G 2003 *Phys. Rev. E* **67** 066215
- [16] Wang X G, Zhang Y, Hu G 2002 *Phys. Lett. A* **298** 383
- [17] Vincent U E 2005 *New J. Phys.* **7** 209
- [18] Chen S Y, Xu H B, Wang G R, Chen S G 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4098 (in Chinese) [陈绍英、许海波、王光瑞、陈式刚 2004 物理学报 **53** 4098]
- [19] Zanette D H, Mikhailov A S 1997 *Phys. Lett. A* **235** 135
- [20] Lichtenberg A J, Leiberman M A 1983 *Regular and Stochastic Motion* (New York: Springer-Verlag) p55

## Mechanism of measure synchronization in coupled Hamiltonian systems\*

Tian Jing<sup>1)</sup> Qiu Hai-Bo<sup>1)2)</sup> Chen Yong<sup>1)</sup>

1) (Institute of Theoretical Physics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China)

2) (Department of Physics, Beijing University of Science and Technology, Beijing 100083, China)

(Received 2 September 2009; revised manuscript received 19 November 2009)

### Abstract

Measure synchronization is an interesting phenomenon found in coupled Hamiltonian systems. By taking Poincaré section analysis, it is found that the separatrix crossing behaviors is the dynamical mechanism behind measure synchronization transition in both time-discrete and time-continuous coupled Hamiltonian systems.

**Keywords:** measure synchronization, Poincaré section, Hamiltonian systems

**PACC:** 0545