

# 忆阻混沌振荡器的动力学分析\*

包伯成<sup>1)2)†</sup> 刘 中<sup>1)</sup> 许建平<sup>3)</sup>

1)(南京理工大学电子工程系,南京 210094)

2)(江苏技术师范学院电气信息工程学院,常州 213001)

3)(西南交通大学电气工程学院,成都 610031)

(2009 年 9 月 28 日收到;2009 年 12 月 16 日收到修改稿)

忆阻器(memristor)是一种有记忆功能的非线性电阻器,它是除电阻器、电容器和电感器之外的第四种基本电路元件.采用一个具有光滑磁控特性曲线的忆阻器和一个负电导替换蔡氏振荡器中的蔡氏二极管,导出了一个基于忆阻器的振荡器电路.采用常规的动力学分析手段研究了电路参数和初始条件变化时该光滑忆阻振荡器的动力学特性.研究表明,光滑忆阻振荡器与一般的混沌系统完全不同,它的动力学行为除了与电路参数有关外,还极端依赖于电路的初始条件,存在瞬态混沌和状态转移等奇异的非线性物理现象.

**关键词:** 忆阻振荡器, 初始条件, 动力学行为, 瞬态混沌

**PACC:** 0545

## 1. 引 言

2008 年,Strukov 等<sup>[1]</sup>成功实现了电路世界中的第四种基本无源二端电路元件——记忆电阻器,简称忆阻器(memristor),证实了美国加州大学伯克利分校的华裔科学家蔡少棠于 1971 年提出的忆阻器元件概念<sup>[2]</sup>和 1976 年建立的忆阻器件与系统理论<sup>[3]</sup>.忆阻器是一种有记忆功能的非线性电阻,通过控制流过忆阻器的电流,可以改变其阻值.如果把高阻值定义为“1”,低阻值定义为“0”,则这种电阻就可以实现存储数据的功能<sup>[4]</sup>.

忆阻器的磁通量  $\varphi$  与它的累积电荷  $q$  之间的关系可以用  $\varphi$ - $q$  或  $q$ - $\varphi$  平面上的一条曲线  $f(\varphi, q) = 0$  来确定<sup>[1-3]</sup>.磁控忆阻器的性能可以用  $\varphi$ - $q$  平面上一条通过原点的特性曲线  $q = q(\varphi)$  来表征,特性曲线的斜率即电荷量按磁通的改变率  $W(\varphi) = dq(\varphi)/d\varphi$  称为忆导(memductance),流过它的电流与其两端电压之间的 VCR 关系可以描述为  $i = W(\varphi)v$ ,这里  $W(\varphi)$  是一个非线性函数.

最近,Itoh 和蔡少棠<sup>[5]</sup>采用一个特性曲线为单调上升且分段线性的非线性忆阻器替换蔡氏振荡器中的蔡氏二极管,导出了一系列基于忆阻器的振

荡电路.在本文中,假设忆阻器是一个由光滑三次单调上升的非线性函数

$$q(\varphi) = a\varphi + b\varphi^3 \quad (1)$$

描述的磁控忆阻元件,由此可得忆导  $W(\varphi)$  为

$$W(\varphi) = \frac{dq(\varphi)}{d\varphi} = a + 3b\varphi^2. \quad (2)$$

这里  $a, b > 0$ .同样,利用一个由(1)式描述的忆阻器替换蔡氏振荡器中的蔡氏二极管,就可以获得一个新的基于忆阻器的振荡电路——光滑忆阻振荡器.

一般的混沌系统都对初始条件具有敏感依赖性,在不同的初始条件下系统轨线随时间的演化是不可预测的,但它的运动轨迹始终局限于一个确定的混沌吸引域内,无论混沌系统内部状态多么不稳定,它的轨迹都不会走出混沌吸引域,即混沌是有界的<sup>[6-11]</sup>.但对于忆阻振荡器,由于其平衡点为分布于某一坐标轴上的点集,不同位置的平衡点具有不同的动力学特性<sup>[5]</sup>,因此在不同的初始条件下系统轨线会从混沌行为向周期行为或稳定的汇发生状态转移;反之亦然.这是由于忆阻器对内部状态具有独特的记忆性所决定的.本文主要针对新提出的光滑忆阻振荡器,利用分岔分析的常规方法,对其依赖于电路参数和初始条件的复杂动力学行为

\* 国家自然科学基金(批准号:60971090)和江苏省自然科学基金(批准号:BK2009105)资助的课题.

† E-mail: mervinbao@126.com

进行详细的理论演绎分析和数值仿真研究.

### 2. 光滑忆阻混沌振荡器

一个含有源忆阻电路的光滑蔡氏振荡器如图 1 所示. 该振荡器电路是通过采用一个由 (1) 式描述的无源二端口光滑磁控忆阻器和一个负电导代替蔡氏混沌振荡器中的蔡氏二极管来实现的.

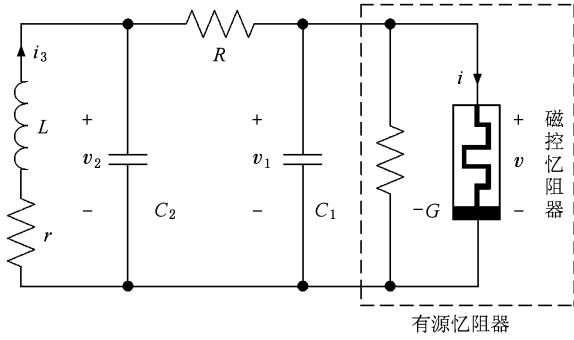


图 1 磁控忆阻振荡器电路图

运用基尔霍夫电压和电流定律以及元件的伏安关系, 对于图 1 所示电路, 可得四个电路变量 ( $v_1, v_2, i_3, \varphi$ ) 之间关系的四个联立的一阶微分方程为<sup>[5]</sup>

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= \frac{1}{RC_1} [v_2 - v_1 + GRv_1 - RW(\varphi)v_1], \\ \frac{dv_2}{dt} &= \frac{1}{RC_2} [v_1 - v_2 + Ri_3], \\ \frac{di_3}{dt} &= -\frac{1}{L}v_2 - \frac{r}{L}i_3, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= v_1, \end{aligned} \tag{3}$$

其中磁控忆阻器的  $\varphi$ - $q$  特性曲线满足 (1) 式, 且有  $W(\varphi) = dq(\varphi)/d\varphi$ .

设  $x = v_1, y = v_2, z = i_3, w = \varphi, \alpha = 1/C_1, \beta = 1/L, \gamma = r/L, \xi = G, C_2 = 1, R = 1$ , 并定义非线性函数  $q(w)$  和  $W(w)$  分别为

$$\begin{aligned} q(w) &= aw + bw^3, \\ W(w) &= \frac{dq(w)}{dw} \\ &= a + 3bw^2, \end{aligned} \tag{4}$$

则 (3) 式的状态方程可以重写为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y - x + \xi x - W(w)x), \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y - \gamma z, \\ \dot{w} &= x. \end{aligned} \tag{5}$$

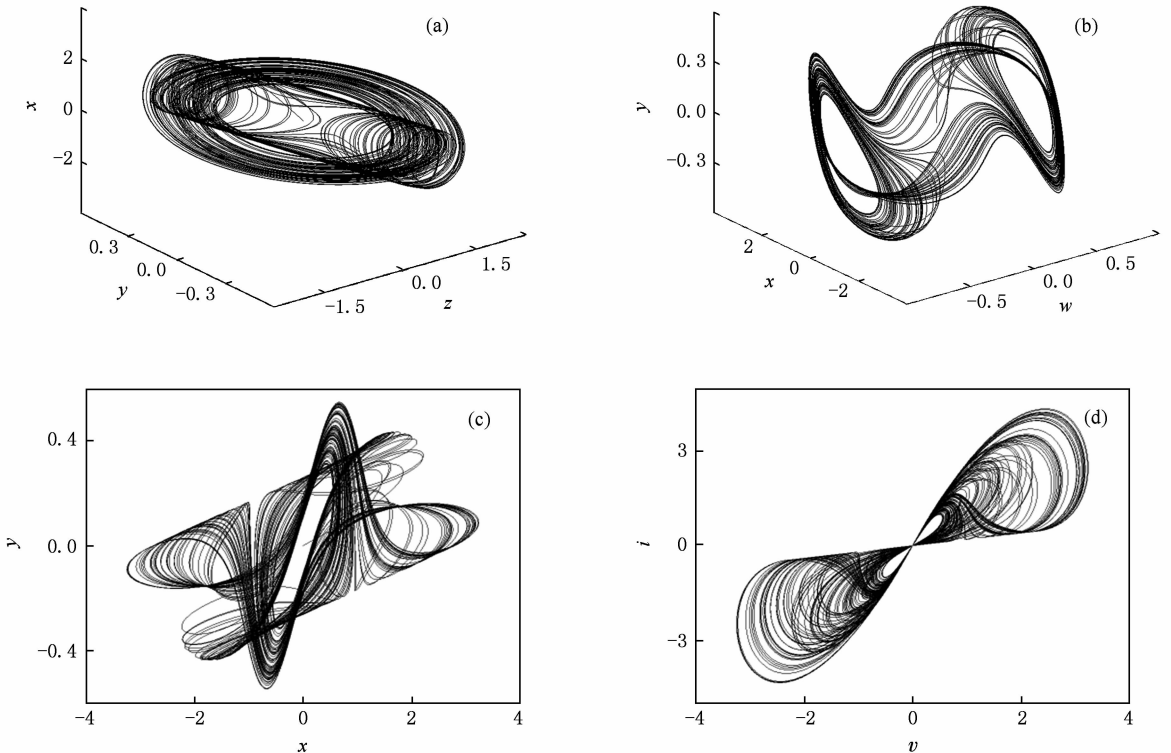


图 2 光滑忆阻振荡器的混沌吸引子 (a) z-y-x, (b) w-x-y, (c) x-y, (d) v-i

选择电路参数使得  $\alpha = 16.4$ ,  $\beta = 15$ ,  $\gamma = 0.5$ ,  $\xi = 1.4$ ,  $a = 0.2$  和  $b = 0.4$ , 对于初始条件  $(0, 10^{-10}, 0, 0)$ , 系统(5)生成了一个双涡卷混沌吸引子, 它在相空间或相平面上的投影如图 2 所示. 图 2(d) 显示的是忆阻振荡电路中忆阻器的端电压与流过的电流在  $v-i$  平面上的混沌吸引子, 它反映了忆阻器元件的非线性动力学特性. 利用 Jacobi 方法计算 Lyapunov 指数得  $L_1 = 0.3542$ ,  $L_2 = 0.0008$ ,  $L_3 = -0.0007$ ,  $L_4 = -7.8311$ , Lyapunov 维数为  $d_L = 2.0452$ . 在  $y = 0$  截面上三维 Poincaré 映射轨线在  $x-z$  平面上的投影如图 3(a) 所示, 三个状态变量的时域波形如图 3(b) 所示, 它们是非周期性的, 貌似随机的. 因此, 从忆阻振荡器的相轨图、Poincaré 映射、时域波形以及相应的 Lyapunov 指数和维数可知, 该振荡器是混沌振荡的.

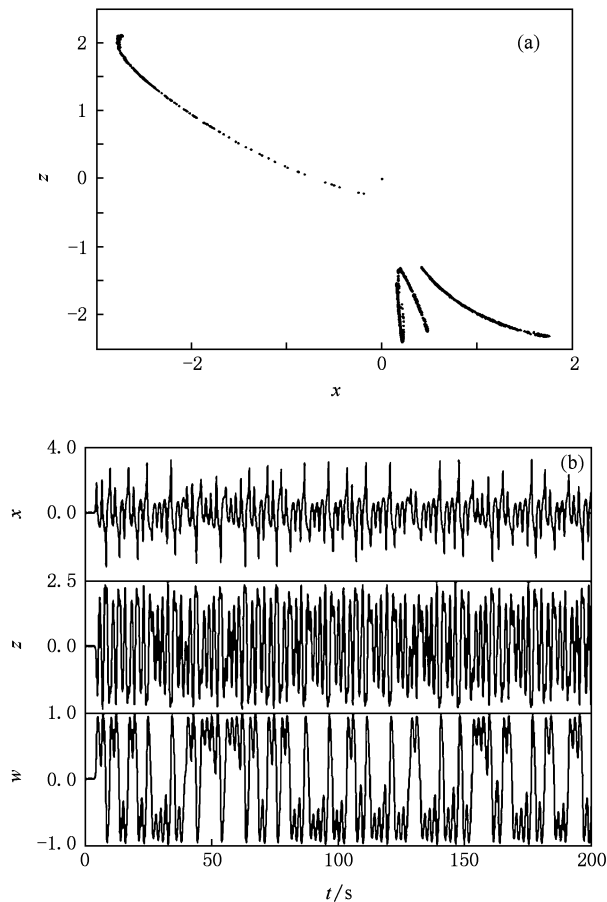


图 3 Poincaré 映射和时域波形 (a) Poincaré 映射轨线的投影, (b) 时域波形

### 3. 平衡点集与稳定性

令  $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = \dot{w} = 0$ , 可得系统(5)的平衡点

为集合  $A = \{(x, y, z, w) \mid x = y = z = 0, w = c\}$ , 即  $w$  坐标上的点集均是平衡点, 这里  $c$  是一个实常数. 在平衡点线性化系统(5), 得到 Jacobi 矩阵  $J_A$  为

$$J_A = \begin{bmatrix} \alpha(-1 + \xi - W(w)) & \alpha & 0 & -6\alpha bxw \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -\beta & -\gamma & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_A \quad (6)$$

平衡点集合  $A$  的特征根方程为

$$\begin{aligned} & \lambda^4 + [\alpha(W(c) - \xi) + 1 + \gamma + \alpha]\lambda^3 \\ & + [\alpha(1 + \gamma)(W(c) - \xi) + (1 + \alpha)\gamma + \beta]\lambda^2 \\ & + \alpha[(\beta + \gamma)(W(c) - \xi) + \beta]\lambda = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$W(c) = a + 3bc^2.$$

固定参数  $\beta = 15$ ,  $\gamma = 0.5$ ,  $\xi = 1.4$ ,  $a = 0.2$  和  $b = 0.4$ , 选择  $\alpha$  和  $c$  为可变参数, (7) 式可以简化成  $\lambda[\lambda^3 + (1.2\alpha c^2 - 0.2\alpha + 1.5)\lambda^2 + (1.8\alpha c^2 - 1.3\alpha + 15.5)\lambda + 18.6\alpha c^2 - 3.6\alpha] = 0$ . (8)

(8) 式方括号中的三次多项式方程的系数均为非零实常数. 根据 Routh-Hurwitz 稳定条件, 该三次多项式方程的根的实部为负的充分必要条件是

$$\begin{aligned} & 1.2\alpha c^2 - 0.2\alpha + 1.5 > 0, \\ & 1.8\alpha c^2 - 1.3\alpha + 15.5 > 0, \\ & 18.6\alpha c^2 - 3.6\alpha > 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$(1.2\alpha c^2 - 0.2\alpha + 1.5)(1.8\alpha c^2 - 1.3\alpha + 15.5) - (18.6\alpha c^2 - 3.6\alpha) > 0,$$

式中  $\alpha$  为正常数, 即有  $\alpha > 11.9231$ ,  $|c| > 0.4399$ , 以及

$$2.16\alpha^2 c^4 + (2.7\alpha - 1.92\alpha^2)c^2 + 0.26\alpha^2 - 1.45\alpha + 23.25 > 0. \quad (10)$$

若选择  $\alpha = 12 \sim 18$ ,  $|c| = 0 \sim 1$ , 则满足(9)式的参数范围分布在图 4 中的白色部分, 这时平衡点集  $A$  除零特征根之外的三个特征根的实部均为负. 反之, 图 4 中灰色部分为不满足(9)式的参数范围, 在此范围内平衡点集  $A$  是不稳定的.

当  $\alpha = 16.4$  时, 对一些典型常数  $c$  值, 平衡点集  $A$  除零特征根之外的三个非零特征根  $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$  及其稳定性列于表 1.

需要说明的是, 忆阻振荡电路的稳定性不能简单地由平衡点集  $A$  的三个特征根  $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$  的稳定性来确定, 下面的数值仿真结果说明了零特征