

周期激励下 Chen 系统的簇发现象分析*

张晓芳[†] 陈章耀 毕勤胜

(江苏大学理学院, 镇江 212013)

(2009 年 9 月 17 日收到; 2009 年 12 月 24 日收到修改稿)

对于周期激励下的 Chen 系统, 当激励项的频率和原系统的固有频率存在量级上的差异时, 系统表现出两个时间尺度下的动力学行为. 首先, 将激励项作为一个变量对系统进行了分岔分析. 然后应用快慢分析法探讨了在不同的参数条件下, 激励项周期变化时产生的对称式折叠簇发、对称式亚临界 Hopf 簇发、对称式 Hopf-同宿簇发现象及其产生机制. 同时还讨论了激励幅值和频率对系统不同簇发的影响.

关键词: 周期激励, Chen 系统, 簇发, 分岔

PACC: 0545, 0547

1. 引 言

自 1963 年 Lorenz 在天气变化的研究中首次发现混沌现象以来, 人们对混沌理论进行了深入的研究^[1,2]. 通过对不同的混沌系统的研究揭示了混沌的本质, 刻画混沌的基本特征, 了解它的动力学形态, 并力求对它加以控制和利用使之对人类服务^[3-5]. 1999 年, 陈关荣等^[6]在混沌系统反控制中发现了一个和著名的 Lorenz 系统相似但不拓扑等价的新混沌吸引子——Chen 系统, 引起了许多学者的关注^[7,8]. Chen 系统的数学模型如下:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x), \\ \dot{y} &= (c - a)x - xz + cy, \\ \dot{z} &= xy - bz. \end{aligned} \quad (1)$$

近年来, 关于 Chen 系统本身特性、控制与同步以及电路实现的研究成果越来越丰富^[9-11]. 然而, 迄今为止绝大多数研究都是基于自治系统. 在 Chen 系统的基础上增加激励项使之成为非自治系统, 特别是激励项的频率和系统的固有频率相差较大, 即在两个时间尺度下激励 Chen 系统的动力学行为的研究却鲜见报道.

簇发在神经元模型中已被广泛认识^[12,13]. Rinzel^[14]首次对神经元的簇放电模式作出了系统的理论分析, 认识到慢变参数对快变量的调节作用引

起快变动力学的静息态 (quiescent state) 和激发态 (spiking state) 的相互转迁. Izhikevich^[15]在前人工作的基础上, 考虑了与簇发的静息态和激发态有关的所有分岔, 提出更为全面完整的理论分类方法, 即所谓快慢动力学分岔分析方法. 目前, 该方法主要用于分析自治系统的簇发^[16], 很少见到在非自治系统中应用. 本文在系统(1)的第一个方程上增加周期激励, 考虑此激振项的频率远小于原系统固有频率的情况, 则系统表现出明显的快慢效应. 应用快慢分析法分析了在不同的参数条件下产生的各种簇发现象及其产生机制, 并探讨了激励的幅值和频率对不同簇发演化过程的影响.

2. 分岔分析

在系统(1)的第一个方程上加一个周期激励, 即 $w = A \sin \omega t$. 系统可以表示为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x) + w, \\ \dot{y} &= (c - a)x - xz + cy, \\ \dot{z} &= xy - bz. \end{aligned} \quad (2)$$

所加的激振项的频率远小于原系统的固有频率, 相差至少一个数量级, 则 w 与 x, y, z 相比为慢变量. w 随时间周期变化, 当 $t = t_0$ 时, w 为一个确定的值, 故可以先将 w 作为分岔参数来分析.

系统平衡点用 $E(x_0, y_0, z_0)$ 表示, 其中

* 国家自然科学基金 (批准号: 10872080, 20976075) 资助的课题.

[†] E-mail: xfzhang@ujs.edu.cn

$$y_0 = x_0 - w/a,$$

$$z_0 = x_0(x_0 - w/a)/b,$$

而 x_0 满足

$$-x_0^3/b + wx_0^2/(ab) + (2c - a)x_0 - cw/a = 0, \quad (3)$$

其稳定性由相应的特征方程决定, 即

$$\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0. \quad (4)$$

这里

$$a_0 = 3ax_0^2 - 2wx_0 + a^2b - 2abc,$$

$$a_1 = ab + a^2 - bc + x_0^2 - 2ac + (ax_0^2 - wx_0)/b,$$

$$a_2 = a + b - c.$$

当 $a_0 > 0$, $a_2 > 0$ 且 $a_1a_2 - a_0 > 0$ 时, 平衡点 E 稳定, 其失稳会导致不同形式的分岔, 从而可以得到可能存在的折叠分岔集 LP 和 Hopf 分岔集 H. 折叠分岔集 LP 可以表示为

$$-x_0^3/b + wx_0^2/(ab) + (2c - a)x_0 - cw/a = 0,$$

$$3ax_0^2 - 2wx_0 + a^2b - 2abc = 0. \quad (5)$$

消去 x_0 , 得到

$$\frac{3a^3w^2b^2(a+7c)^2}{4(6a^2bc+w^2-3a^3b)^2}$$

$$-\frac{w^2ab(a+7c)}{6a^2bc+w^2-3a^3b} + a^2b - 2abc = 0. \quad (6)$$

其上产生平衡点的折叠分岔.

Hopf 分岔集 H 可以表示为

$$-x_0^3/b + wx_0^2/(ab) + (2c - a)x_0 - cw/a = 0,$$

$$(a^2 + b^2 - ab - ac - bc)x_0^2/b$$

$$+ (-aw + bw + cw)x_0/b \quad (7)$$

$$+ (a^2b^2 + a^3b - 2ab^2c + b^2c^2$$

$$- 3a^2bc + 2abc^2 + ab^3 - b^3c)/b = 0.$$

由(7)式可以求出 $x_0 = A/B$, 其中

$$A = aw(-ab^2c - 3a^2bc + 3abc^2 + 4b^2c^2 - 5b^3c$$

$$+ a^3c - 2a^2c^2 + ac^3 + a^2b^2 + ab^3 + b^4),$$

$$B = 2a^3b^2c + 3a^2b^2c^2 - 4a^2b^3c - 5a^4bc + 2a^3bc^2$$

$$+ ab^2c^3 - 2ab^3c^2 + a^2bc^3 - 2a^4b^2 + 2a^5b$$

$$+ 2a^3b^3 + ab^4c - acw^2 + abw^2 + c^2w^2 - b^2w^2.$$

将 x_0 代入(7)式中的任何一个方程, 可以得到 Hopf 分岔集 H 的参数表达式, 因为比较繁冗, 这里不具体列出. 通过对(7)式分析发现, 在 H 上可能产生 Hopf 分岔.

取定 $a = 35, b = 3$, 将 w, c 作为分岔参数作出 w - c 平面上的分岔集(图 1). 它将参数平面划分成 5 个区域, 每个区域对应着系统不同形式的解.

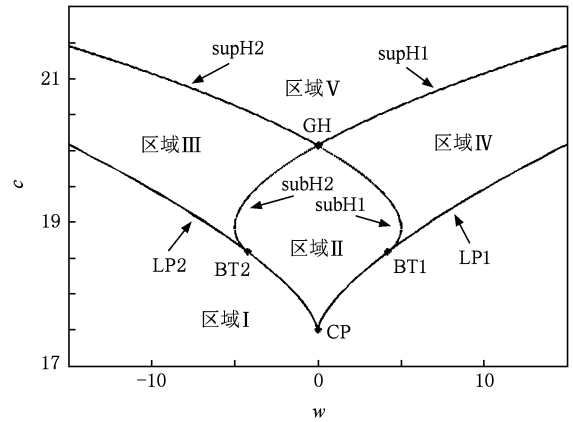


图 1 w - c 平面上的分岔集 GH 为广义 Hopf 分岔点, CP 为 Cusp 分岔点, BT1 和 BT2 为 Bogdana-Takens 分岔点

经数值计算后发现, 区域 I 中系统存在一个稳定的平衡点. 当参数穿越折叠分岔集 LP1, LP2, 进入区域 II 时, 平衡点的数目发生变化, 系统出现三个平衡点, 其中两个为稳定平衡点, 一个为不稳定平衡点. 而当参数穿过亚临界 Hopf 分岔集 subH1 和 subH2 进入区域 III 和区域 IV 时, 一个稳定的平衡点失稳, 由于是亚临界 Hopf 分岔, 得到不稳定的极限环, 三个平衡点中一个稳定两个不稳定. 参数穿越超临界 Hopf 分岔集 supH1 和 supH2 进入区域 V 时, 唯一的一个稳定平衡点失稳, 分岔得到稳定的极限环. 在这个区域中, 当参数进一步变化导致稳定的极限环消失, 从而得到复杂的动力学行为.

3. 周期激励产生簇发现象分析

取定参数 $a = 35, b = 3$, 将 c 作为控制参数, 讨论系统(2)随其变化时动力学行为的演化, 尤其是簇发类型的变化. 在没有激励情况下, 系统(1)在 $c = 20.07$ 时发生 Hopf 分岔, 产生周期解. 经理论计算可得, 周期解的圆频率为 7.76. 这一结果也可以通过数值分析给予验证. 对于周期激励下的 Chen 系统, 我们取激励频率远低于其固有频率, 则周期激励 $w = A\sin\omega t$ 与 x, y, z 相比就是慢变量, 系统存在着两个时间尺度. 下面讨论随着参数 c 的变化产生不同的簇发现象, 以及激励幅值和激励频率对簇发现象的影响.

3.1. 对称式折叠簇发现象

控制参数取 $c = 18$, 可以将 w 作为变量, 图 2 给

出了平衡点随 w 的变化曲线,图中实线表示稳定的平衡点,虚线表示不稳定的平衡点,LP1, LP2 ($w = \pm 1.3211$) 为平衡点的折叠分岔点. 当 $w < -1.3211$ 时,系统只有一个稳定的平衡点 E_+ . 当 $w \in [-1.3211, 1.3211]$, 系统存在三个平衡点,其中 E_+, E_- 为稳定平衡点, E_0 为不稳定平衡点. 相应地,当 $w > 1.3211$ 时, E_+, E_0 消失,只剩 E_- 一个稳定的平衡点.

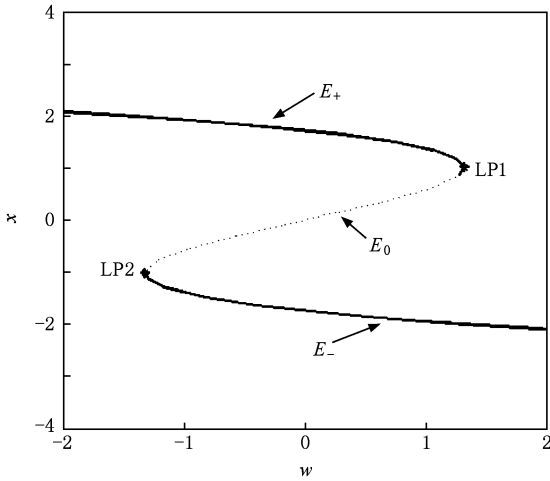


图2 $c = 18$ 时平衡点曲线

将激励圆频率定为 $\omega = 0.04$, 显然,此时的激励频率远小于原自治系统的固有频率. 变化激励幅值,考察其对系统行为的影响. 图3给出了激励幅值 $A = 1.2$ 时系统的三维相图,此时系统按激励频率作周期运动,没有簇发现象.

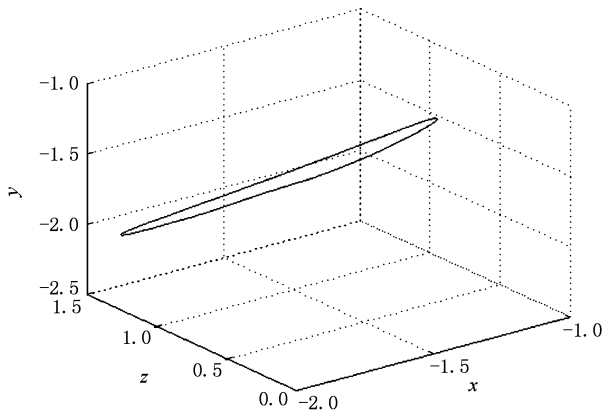


图3 $A = 1.2$ 时系统的三维相图

在 $A = 1.2$ 的基础上增加激励幅值,当其超过平衡点的折叠分岔点时 ($w = \pm 1.3211$), 运动情况发生了变化. 图4为激励幅值 $A = 1.8$ 时系统的三

维相图和时间历程. 从图4可以发现,系统仍以激励频率作周期运动,然而在某些局部区域轨迹出现了微幅振荡. 此时的运动类似于神经元系统的簇放电现象,这和图3中的周期运动有很大区别.

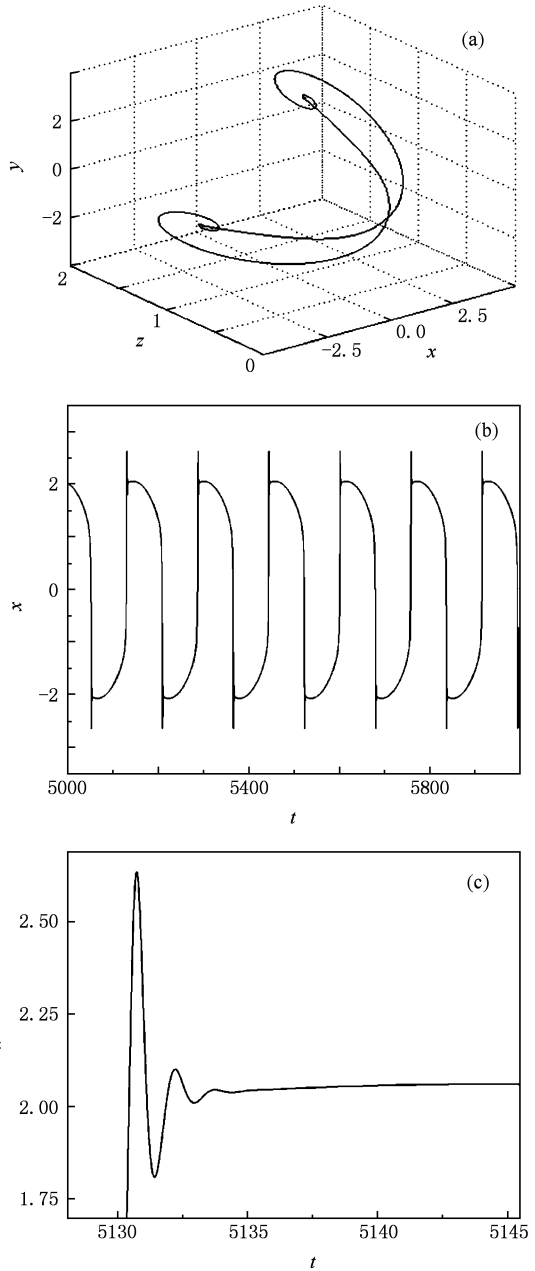


图4 $A = 1.8$ 时系统的三维相图和时间历程 (a) 三维相图, (b) 时间历程, (c) 时间历程的局部放大

为揭示簇发现象的产生机制,我们将平衡点曲线投影到 $x-z$ 平面上并和 $x-z$ 平面内的相轨迹进行叠加,结果如图5(a)所示,图中 LP1, LP2 ($x = \pm 1.0127$) 为平衡点的折叠分岔点. 不妨设系统轨迹从右半支向左出发,系统此时处于静息态,在 LP1

处平衡点产生折叠分岔, 轨线经过这一点后受到稳定平衡点 E_- 的吸引向左跳跃, 从图 4(b) 可以看出这一段用时很短, 跳到左半支后, 进入另一个静息态, 轨迹围绕着平衡点 E_- 作微幅振荡并很快稳定下来, 再沿着平衡点的曲线向右运动直到经过分岔点 LP2, 再次跳到右半支, 围绕平衡点 E_+ 微幅振荡, 振幅很快减小, 再向左运动, 完成一个周期. 此时产生的簇发现象是两种静息态在两个折叠分岔点之间的跳跃, 构成了周期性重复的对称式折叠簇发 (symmetric fold bursting) 现象. 图 5(b) 将变量 x 随 w 的变化关系和图 2 曲线进行了叠加, 由于 $w = A \sin \omega t$, 作为慢变量, w 始终在 ± 1.8 之间来回作简谐运动, 从图中可以清楚地观察到随着慢变量的变化这两种静息态在两个折叠分岔点之间的跳跃.

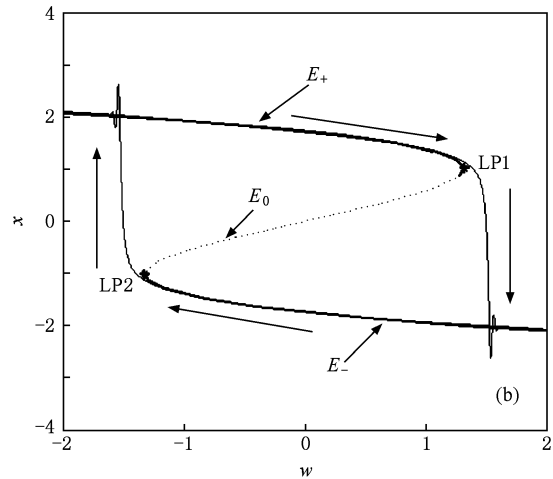
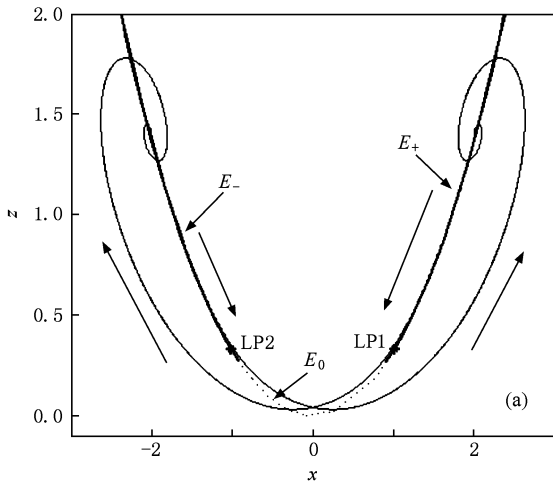


图 5 对称式折叠簇发的过程分析 (a) $x-z$ 平面内的平衡点曲线和相轨迹叠加, (b) 平衡点曲线和 x 随 w 的变化曲线叠加

值得指出的是, 在此组参数下, 激励幅值只有大于平衡点的折叠分岔点 ($w = \pm 1.3211$) 才产生

簇发现象.

3.2. 对称式亚临界 Hopf 簇发现象

取定参数 $c = 19$, 将 w 作为变量, 作出平衡点随 w 的变化曲线 (图 6), 可以观察到在整个向量场中存在三个平衡点 E_+, E_0, E_- . 平衡点的折叠分岔发生在 $w = \pm 6.7500$, subH1 和 subH2 ($w = \pm 4.9817$) 为亚临界 Hopf 分岔点. 经分析可知, E_0 始终为不稳定的平衡点. E_+ 在 $w < 4.9817$ 时为稳定的平衡点, 经过 subH1 时失去稳定性, 分岔出不稳定的极限环, 在 $[4.9817, 6.7500]$ 区域内 E_+ 不稳定. 相应地, 当 E_- 在 $w > -4.9817$ 时为稳定的平衡点, 经过 subH2 时失去稳定性, 分岔出不稳定的极限环, 在 $[-6.7500, -4.9817]$ 区域内 E_- 不稳定.

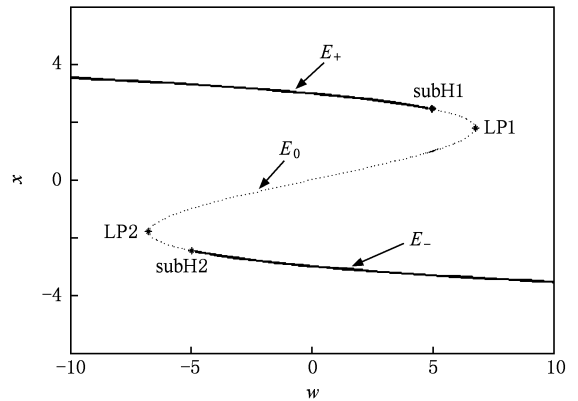


图 6 $c = 19$ 时平衡点曲线

激励圆频率 $\omega = 0.04$, 当激励幅值较小时, 系统按照激励频率作周期运动, 没有簇发现象.

图 7 所示为激励幅值 A 增加到 6.7 的时间历程及其局部放大, 此时虽然还不是典型的簇发现象, 但可以发现在一个完整的周期过程中已经存在一段快变过程. 继续增加激励幅值, 就能观察到簇发现象.

图 8(a) 给出了 $A = 10.0$ 时的三维相图. 为了分析该簇发的产生机制, 将平衡点在 $x-z$ 平面上投影并和相轨迹进行叠加. 我们仍假设轨线沿平衡点的曲线从右半支向左运动, 当穿过亚临界 Hopf 分岔点 subH1 后平衡点失稳, 轨迹受到稳定的平衡点 E_- 的吸引向左跳跃, 围绕平衡点 E_- 快速振荡, 并随着慢变量的变化振幅不断减小, 轨线向右运动, 经过 subH2 后受到稳定的平衡点 E_+ 的作用向右跳跃, 在 E_+ 附近振荡后稳定下来, 完成一个周期. 整个过程从表面上看和折叠簇发相似, 但这里簇发产生的原

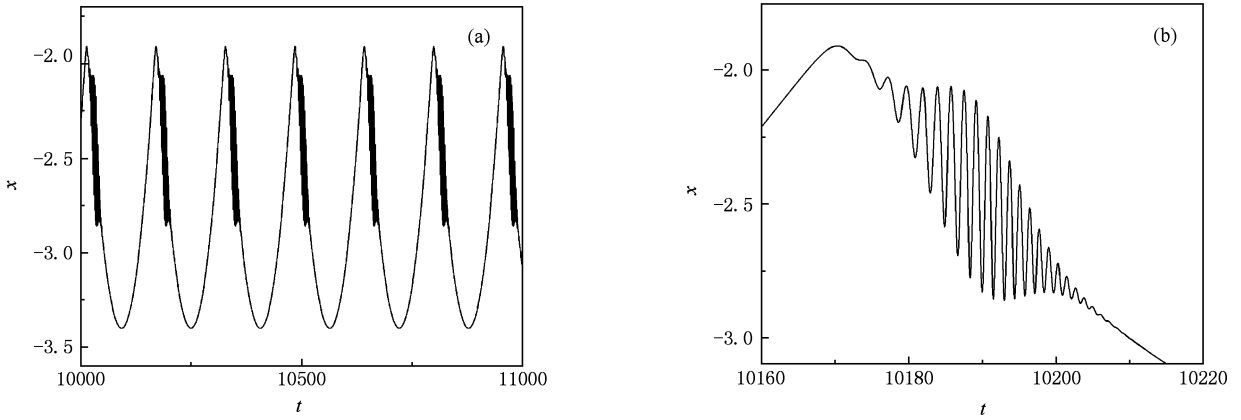


图 7 $A = 6.7$ 时的时间历程 (a) 时间历程, (b) 时间历程的局部放大

因是由于平衡点经过亚临界 Hopf 分岔失稳而引起的, 轨线经过这一点后由于平衡点失稳而跳跃到另一侧产生簇发, 所以我们将其定义为对称式亚临界 Hopf 簇发. 图 8(c) 将变量 x 随 w 的变化关系和图 6

的平衡点曲线进行了叠加, w 在 ± 10.0 之间来回作简谐运动, 可以观察到随着 w 的变化轨线在两个静息态之间的转换和跳跃, 这里的跳跃没有直接从亚临界 Hopf 点处产生, 而是略有滞后.

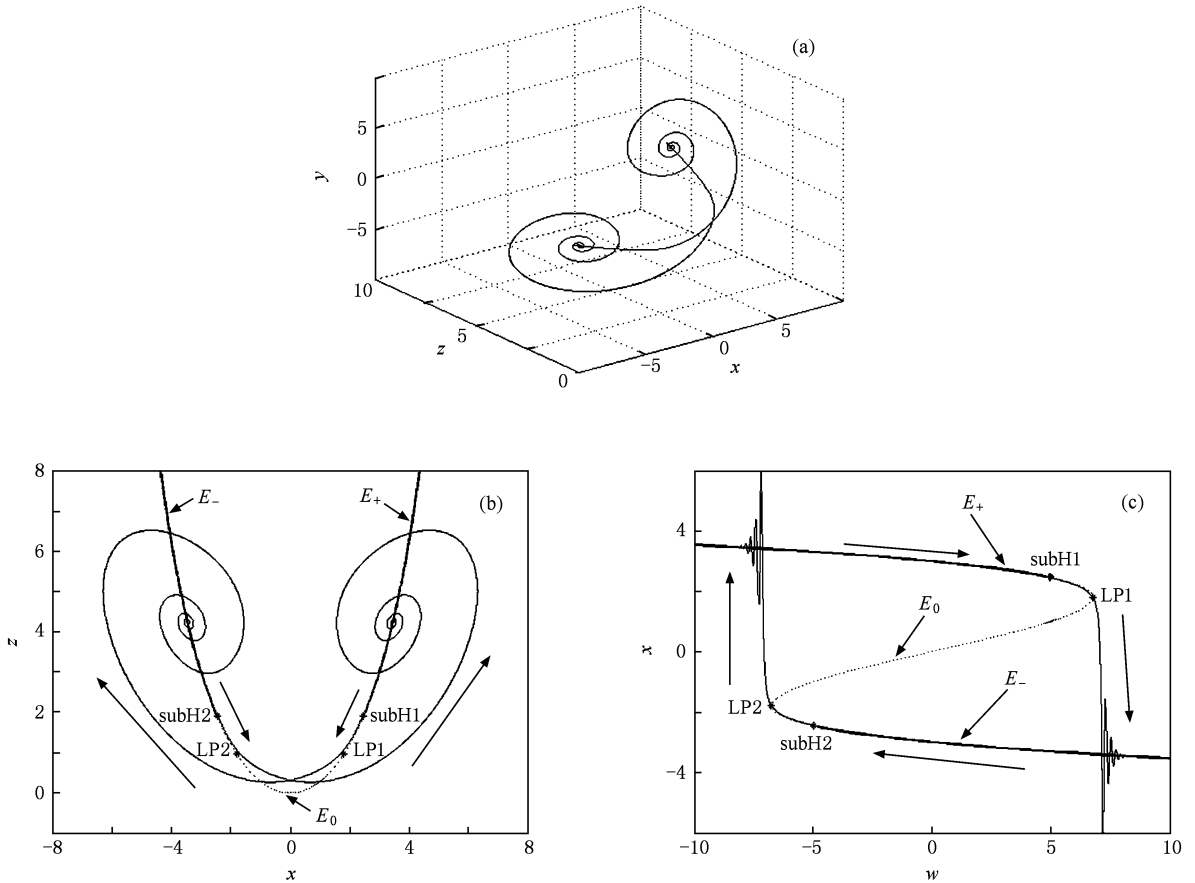


图 8 对称式亚临界 Hopf 簇发的过程分析 (a) $A = 10.0$ 时的三维相图, (b) $x-z$ 平面内的平衡点曲线和 $x-z$ 平面内相轨迹叠加, (c) 平衡点曲线和 x 随 w 的变化曲线叠加

3.3. 对称式 Hopf-同宿簇发现象

通过调整参数 c , 考察对称式 Hopf-同宿簇发现象. 取 $c = 20.5$, 激励圆频率仍取 $\omega = 0.04$, 图 9 为在此参数条件时平衡点随 w 的变化曲线. 平衡点的折叠分岔点 LP1 和 LP2 的 w 坐标为 ± 18.6908 , 超临界 Hopf 分岔点 supH1, supH2 的 w 坐标为 ∓ 3.7375 . 三个平衡点的性质与图 6 相似. 由于这里的 Hopf 分岔为超临界的 Hopf 分岔, 所以, 平衡点 E_+ 和 E_- 经过 supH1, supH2 点分岔出稳定的极限环. 从图 9 可以看出, 极限环成长并接近中间的鞍点 E_0 , 转变为鞍点的同宿轨, 产生鞍点的同宿分岔点, 图中 hom1, hom2 ($w = \pm 2.9576$) 为鞍点的同宿分岔点.

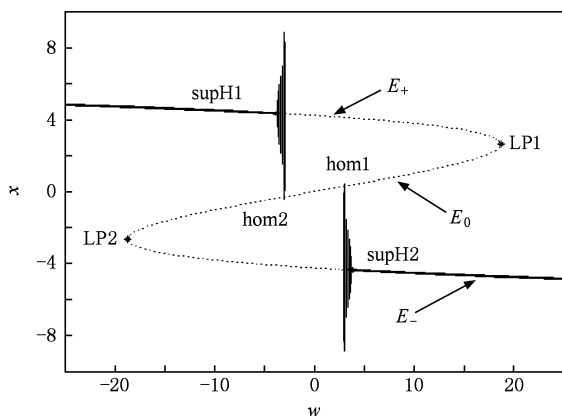


图 9 $c = 20.5$ 时平衡点曲线

在这一组参数条件下会产生另一种簇发现象. 激励幅值取为 $A = 8$, 图 10(a) 将三维相图和平衡点曲线叠加, 假设轨线由上半支静息态出发, 经过 supH1 后被激发产生出激发态, 此时的激发态先在上半支振荡, 当振幅增加到一定值后和中间的鞍点相碰, 经鞍点的同宿分岔点受到稳定的平衡点 E_- 的吸引向下跳跃, 退出激发态. 继续围绕平衡点 E_- 振荡, 随着慢变量的变化振幅逐渐减小, 在下半支运动. 当轨线在经过 supH2 后又被激发出另一个激发态, 先在下半支振荡, 到一定振幅时经鞍点的同宿分岔点跳到上半支, 退出激发态, 振荡一段时间后再稳定下来, 完成整个簇发过程. 由于激发态是由超临界 Hopf 分岔产生的, 所以我们认为此种簇发为对称式 Hopf-同宿簇发. 图 10(b) 将变量 x 随 w 的变化关系和平衡点的曲线进行了叠加, 可以清楚地观察到随慢变量 w 的变化, 轨线在静息态和激发态之

间的转换.

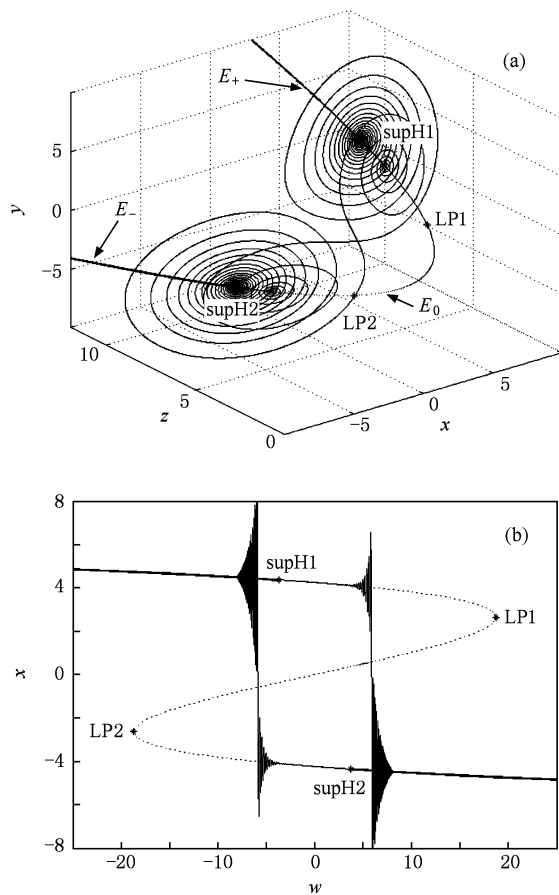


图 10 对称式 Hopf-同宿簇发 (a) $A = 8.0$ 时的三维相图和三维平衡点曲线叠加, (b) 平衡点曲线和 x 随 w 的变化曲线叠加

我们发现, 随着激励幅值的增加, 激发态的产生越来越滞后, 直到完全消失.

3.4. 激励频率对簇发行为的影响

为便于比较激励频率对簇发行为的影响, 取定 $a = 35, b = 3, c = 20.5$, 激励幅值 $A = 25$. 图 11 给出了激振频率 $\omega = 0.2$ 和 $\omega = 1.0$ 时的时间历程.

显然, 随着激振频率逐渐接近固有频率, 簇发越来越趋于平缓. 因为系统的一个周期包括一个完整的簇发过程是与激励周期有关的, 也就是慢变量的频率与激励频率基本一致. 而其中的快速振荡则与固有频率有关, 所以当激振频率和固有频率比较接近时, 快速振荡显得相对比较平缓.

图 12 为 $\omega = 4.0, A = 25$ 时平衡点曲线和相轨迹的叠加, 从图中可以明显地看出系统为周期运动. 由于此时的激励频率和固有频率为同一数量级, 比较接近, 因而没有发生簇发现象, 轨线围绕两

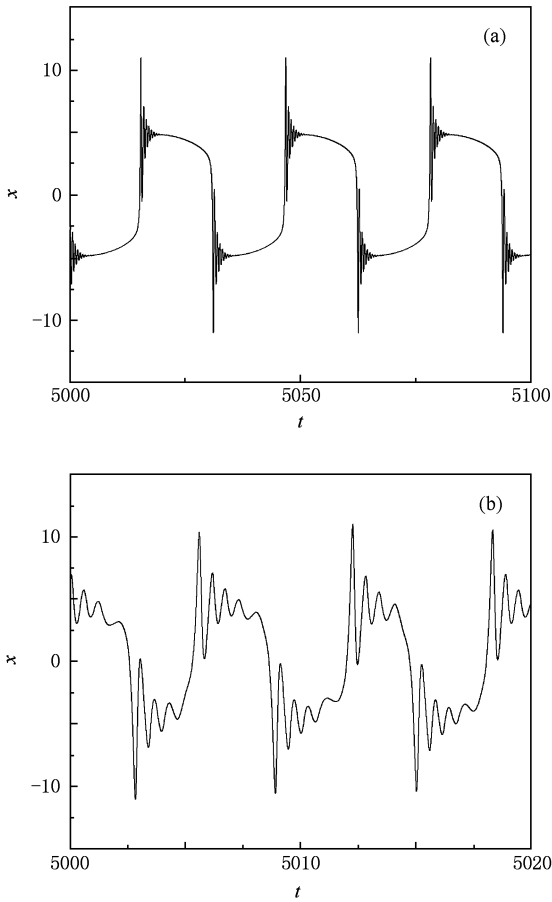


图 11 不同激励频率的时间历程 (a) $\omega = 0.2$, (b) $\omega = 1.0$

个稳定的平衡点振荡. 由此可见, 激励频率对簇发现象的产生起着重要作用.

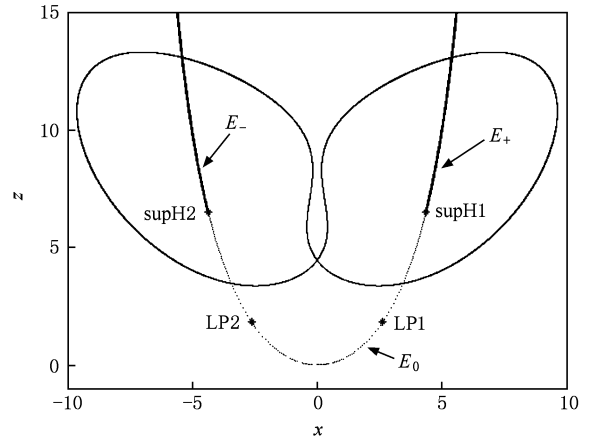


图 12 $\omega = 4.0$, $A = 25$ 时平衡点曲线和相轨迹叠加

4. 结 论

当激励频率远小于 Chen 系统的固有频率时, 系统表现出明显的快慢效应, 产生各种复杂的簇发现象. 将激励项作为慢变量, 在一定的参数条件下慢变量的变化分别导致平衡点的折叠分岔、亚临界 Hopf 分岔、超临界 Hopf 分岔及同宿分岔. 相应地, 在周期激励下, 系统产生了对称式折叠簇发、对称式亚临界 Hopf 簇发、对称式 Hopf-同宿簇发. 此外, 激励幅值和频率都对系统的簇发现象具有明显的影响, 激励幅值只有达到一定的程度才能产生簇发, 而激励频率越接近固有频率簇发表现得越平缓, 直到簇发现象消失.

- [1] Bi Q S 2007 *Phys. Lett. A* **369** 418
- [2] Huang J 2008 *Nonlin. Anal. : Theory Meth. Appl.* **69** 4174
- [3] Chang J F, Hung M L, Yang Y S, Liao T L, Yan J J 2008 *Chaos Solitons Fract.* **37** 609
- [4] Jose A R, Julio S D, Hector P 2005 *Phys. Lett. A* **338** 128
- [5] Cai G L, Tan Z M, Zhou W H, Tu W T 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6230 (in Chinese) [蔡国梁、谭振梅、周维怀、涂文桃 2007 物理学报 **56** 6230]
- [6] Chen G, Ueta T 1999 *Int. J. Bifur. Chaos* **9** 1465
- [7] Wang Y W, Guan Z H, Wang H O 2003 *Phys. Lett. A* **312** 34
- [8] Chowdhury M S H, Hashim I 2009 *Nonlin. Anal. Real World Appl.* **10** 381
- [9] Plienpanich T, Niamsup P, Lenbury Y 2005 *Appl. Math. Comput.* **171** 927
- [10] Li S H, Cai H X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1687 (in Chinese) [李世华、蔡海兴 2004 物理学报 **53** 1687]
- [11] Chen L, Wang D S 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5661 (in Chinese) [谌 龙、王德石 2007 物理学报 **56** 5661]
- [12] Yang Z Q, Lu Q S 2008 *Sci. China G* **51** 687
- [13] Tanaka H 2006 *Phys. Lett. A* **350** 228
- [14] Rinzel J 1985 *Ordinary and Partial Differential Equations* (Berlin: Springer-Verlag) p304
- [15] Izhikevich E M 2000 *Int. J. Bifur. Chaos* **10** 1171
- [16] Han X J, Jiang B, Bi Q S 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4408 (in Chinese) [韩修静、江 波、毕勤胜 2009 物理学报 **58** 4408]

Analysis of bursting phenomena in Chen's system with periodic excitation*

Zhang Xiao-Fang[†] Chen Zhang-Yao Bi Qin-Sheng

(Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

(Received 17 September 2009; revised manuscript received 24 December 2009)

Abstract

For the periodically excited Chen's system, when there exists order gap between the natural frequency of the original system and the excited frequency, dynamical behaviors associated with the two different time scales can be observed. Bifurcations of the system have been presented by considering the variation of the excited term. Fast-slow analysis is employed to explore the evolution of the system with different parameter conditions, which gives different types of bursters such as symmetric fold bursting, symmetric subHopf bursting and symmetric Hopf-homoclinic bursting, as well as the bifurcation mechanism. Furthermore, the influence of both the amplitude and the frequency of the excitation on the bursting is discussed in detail.

Keywords: periodic excitation, Chen's system, bursting, bifurcation

PACC: 0545, 0547

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10872080, 20976075).

[†] E-mail: xfzhang@ujs.edu.cn