

# 考虑次近邻作用的行人交通格子流体力学模型\*

温 坚<sup>1)2)</sup> 田欢欢<sup>1)2)</sup> 薛 郁<sup>2)†</sup>

1) (玉林师范学院物理与信息科学系, 玉林 537000)

2) (广西大学物理科学与工程技术学院, 南宁 530004)

(2009 年 7 月 12 日收到; 2009 年 12 月 16 日收到修改稿)

在二维双向行人交通格子流体力学模型的基础上, 提出了考虑次近邻行人相互作用进行行人流优化的行人交通格子流体力学模型. 通过线性稳定性分析给出新模型的稳定性条件. 通过非线性分析得到描述交通堵塞密度波的改进的 Korteweg-de Vries 方程, 并进行了数值模拟.

**关键词:** 改进的 Korteweg-de Vries 方程, 行人流, 格子流体力学模型

**PACC:** 0550, 0520

## 1. 引 言

在过去几十年里, 交通问题引起了许多学者的关注, 为了更好地研究和解决交通问题, 人们提出了各种物理模型<sup>[1-3]</sup>. 行人交通与车辆交通具有一定的相似性, 近年来引起了人们的广泛关注. 行人流是由相互作用的个体行人构成的多主体的复杂系统, 在行人出行的过程中, 呈现出许多有趣的物理现象, 如自组织现象、噪声诱导有序现象与“加热而冻结”现象<sup>[4]</sup>、“快即是慢”效应<sup>[5]</sup>、聚集行为<sup>[5]</sup>等. 在通道、交叉路口、商场、广场及其他公共场所的设计过程中, 行人交通问题是必须考虑的重要因素之一<sup>[6]</sup>. 因此, 为了避免不必要的事故发生, 特别对行人出行的高峰期和突发事件发生时, 有必要研究行人交通的特性.

许多学者先后提出了各种研究行人交通的理论模型. Henderson<sup>[7]</sup>将行人个体的行为类比于气体分子或液体分子的运动, 提出了行人交通流体力学模型; Helbing 等<sup>[8]</sup>把促使行人在运动过程中改变运动状态的各种因素统称为“社会力”, 提出了“社会力”模型, 并研究了在恐慌情景下人群的逃生行为<sup>[5]</sup>; Muramatsu 等<sup>[9]</sup>提出的偏向随机行走格子气模型, 研究了大厅<sup>[10]</sup>、瓶颈通道<sup>[11]</sup>和 T 形通道<sup>[12]</sup>等不同通道结构对人员疏散的影响, 并得出了在不

同条件下发生相变的密度阈值; Burstedde 等<sup>[13]</sup>提出“背景场”的概念, 建立了二维元胞自动机行人流模型, 模拟了房间内行人的疏散及双向行人流的流动过程, 发现了行人“成行”(lane formation)等现象. 近年来国内许多学者利用元胞自动机行人流模型或偏向随机行走格子气模型研究了行人疏散动力学<sup>[14,15]</sup>. 交通的拥堵与密度波的形成和传播有关, 文献<sup>[16,17]</sup>用流体力学模型研究车辆交通时, 发现了交通密度孤立波. 文献<sup>[18,19]</sup>从优化速度模型推导出了描述交通堵塞的扭结密度波的改进的 Korteweg-de Vries (mKdV) 方程, 而密度孤立波仅仅出现在中性稳定曲线附近. Nagatani<sup>[20,21]</sup>根据优化速度模型思想提出了宏观流体力学模型——格子流体力学模型, 还将该模型从一车道扩展到双车道情况<sup>[22]</sup>, 从一维扩展到二维情况<sup>[23]</sup>. 同时, 他还从格子流体力学模型中推导出描述交通堵塞扭结-反扭结密度波的 mKdV 方程. 薛郁<sup>[24]</sup>在一维交通流格子流体力学模型的基础上, 分别提出了考虑最近邻车以及考虑前、后次近邻车相互作用的格子流体力学模型. 唐铁桥等<sup>[25]</sup>通过引入新的流量转移函数, 提出了一种改进的双车道交通流格子流体力学模型. 著名的交通流专家 May<sup>[26]</sup>认为, 行人交通在很多方面具有类似车辆交通的行为. 因此, 田欢欢等<sup>[27,28]</sup>将车辆交通中的格子流体力学模型应用到行人交通中, 考虑行人最近邻的相互作用提出了二

\* 国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2006CB705500) 和自然科学基金 (批准号: 10662002, 10865001, 10532060) 资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: yuxuegu@gxu.edu.cn

维双向行人交通格子流体力学模型,以及考虑行人不断改变路径提出了改变路径的行人流格子流体力学模型,研究表明行人交通拥堵呈现非线性密度波的聚集行为.

行人在运动过程中,不仅受到前一格点上行人的作用,还会受到左、右近邻和次近邻格点上行人的作用. 本文考虑前面近邻和次近邻作用,建立相应的行人交通格子流体力学模型,并对该模型进行了线性稳定性分析和非线性分析,最后通过数值模拟以验证所得结果.

## 2. 模 型

如图 1 所示,在二维双向行人交通中,有东向、西向、北向和南向四类行人,分别表示沿  $x$  轴正方向、 $x$  轴负方向、 $y$  轴正方向及  $y$  轴负方向自由运动. 定义东向和西向行人占所有行人的比例为  $c$ ,东向行人占东向和西向行人的比例为  $c_1$ ,北向行人占北向和南向行人的比例为  $c_2$ ;总的平均密度为  $\rho_0$ . 在  $t$  时刻,格点  $(j, m)$  上的东向 ( $x+$ )、西向 ( $x-$ )、北向 ( $y+$ ) 和南向 ( $y-$ ) 行人的密度分别用  $\rho_{x+}(j, m, t)$ ,  $\rho_{x-}(j, m, t)$ ,  $\rho_{y+}(j, m, t)$  和  $\rho_{y-}(j, m, t)$  表示. 在  $t$  时刻,格点  $(j, m)$  上的东向、西向、北向和南向行人的流量分别用  $Q_{x+}(j, m, t)$ ,  $Q_{x-}(j, m, t)$ ,  $Q_{y+}(j, m, t)$  和  $Q_{y-}(j, m, t)$  表示. 描述二维双向行人交通格子流体力学模型的方程如下:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_{x+}(j, m, t) + cc_1 \rho_0 [Q_{x+}(j, m, t) \\ - Q_{x+}(j-1, m, t)] = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\partial_t \rho_{x-}(j, m, t) + c(1-c_1) \rho_0 [Q_{x-}(j, m, t)$$

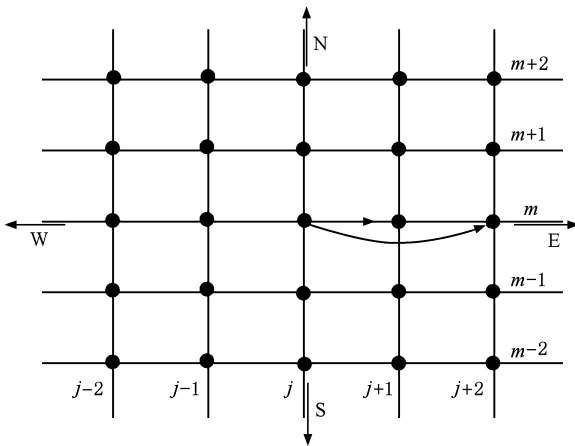


图 1 考虑次近邻作用时,东向行人通行示意图. 黑色圆圈表示格点位置, E, S, W, N 分别表示东、南、西、北四个方向

$$- Q_{x-}(j+1, m, t)] = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_{y+}(j, m, t) + (1-c)c_2 \rho_0 [Q_{y+}(j, m, t) \\ - Q_{y+}(j, m-1, t)] = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_{y-}(j, m, t) + (1-c)(1-c_2) \rho_0 [Q_{y-}(j, m, t) \\ - Q_{y-}(j, m+1, t)] = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

其中

$$\partial_t = \partial/\partial t,$$

$$\partial_x = \partial/\partial x,$$

$$\partial_y = \partial/\partial y.$$

根据 Nagatani 的模型<sup>[23]</sup>,沿着各个方向的行人流量由总的优化流量来调节. 在  $(j, m)$  位置上的东向行人流量由  $(j+1, m)$ ,  $(j+2, m)$  两个格点的总优化流量来调节. 其演化方程为

$$\begin{aligned} Q_{x+}(j, m, t + \tau) \\ = cc_1 \rho_0 V(\rho(j+1, m, t)), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} Q_{x-}(j, m, t + \tau) \\ = c(1-c_1) \rho_0 V(\rho(j-1, m, t)), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} Q_{y+}(j, m, t + \tau) \\ = (1-c)c_2 \rho_0 V(\rho(j, m+1, t)), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} Q_{y-}(j, m, t + \tau) \\ = (1-c)(1-c_2) \rho_0 V(\rho(j, m-1, t)), \end{aligned} \quad (8)$$

其中  $\tau$  为弛豫时间,为敏感系数的倒数.  $V(\rho(j, m, t))$  为优化速度函数,由下式给出<sup>[23]</sup>:

$$\begin{aligned} V(\rho(j, m, t)) = \tanh\left(\frac{2}{\rho_0} - \frac{\rho(j, m, t)}{\rho_0^2} - \frac{1}{\rho_c}\right) \\ + \tanh\left(\frac{1}{\rho_c}\right), \end{aligned} \quad (9)$$

其中  $\rho_c$  等于安全距离的倒数<sup>[29,30]</sup>. 当考虑次近邻格点上行人的作用,其连续性方程(1)–(4)不变,而演化方程(5)–(8)需要改进. 根据交通流各向异性的特性,当前格点位置上的行人流量不仅由前面近邻格点流量确定,而且还由  $t-\tau$  时刻通过近邻与次近邻两个格点上行人的净流量来调节. 因此,考虑次近邻行人作用的演化方程

$$\begin{aligned} Q_{x+}(j, m, t + \tau) \\ = cc_1 [(1-\gamma) \rho_0 V(\rho(j+1, m, t)) \\ + \gamma \rho_0 V(\rho(j+2, m, t))], \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} Q_{x-}(j, m, t + \tau) \\ = c(1-c_1) [(1-\gamma) \rho_0 V(\rho(j-1, m, t)) \\ + \gamma \rho_0 V(\rho(j-2, m, t))], \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} Q_{y+}(j, m, t + \tau) \\ = (1-c)c_2 [(1-\gamma) \rho_0 V(\rho(j, m+1, t)) \end{aligned}$$

$$+ \gamma \rho_0 V(\rho(j, m+2, t))], \quad (12)$$

$$Q_{y-}(j, m, t + \tau) = (1-c)(1-c_2)[(1-\gamma)\rho_0 V(\rho(j, m-1, t)) + \gamma \rho_0 V(\rho(j, m-2, t))], \quad (13)$$

其中  $\gamma$  是相对作用强度, 且  $0 < \gamma \leq 0.5$ .  $\gamma > 0.5$  的情况是过多地关注前方次近邻的行人流, 而较少考虑前方近邻的行人流, 这样会出现行人碰撞.

将方程(10)—(13)分别代入方程(1)—(4)中, 并利用  $\rho(j, m, t) = \rho_{x+}(j, m, t) + \rho_{x-}(j, m, t) + \rho_{y+}(j, m, t) + \rho_{y-}(j, m, t)$ , 得到总密度方程

$$\begin{aligned} & \rho(j, m, t + 2\tau) - \rho(j, m, t + \tau) + \tau \rho_0^2 [cc_1]^2 \\ & \times [V(\rho(j+1, m, t)) - V(\rho(j, m, t))] \\ & + \gamma \tau \rho_0^2 [cc_1]^2 [V(\rho(j+2, m, t)) \\ & - 2V(\rho(j+1, m, t)) + V(\rho(j, m, t))] \\ & + \tau \rho_0^2 [c(1-c_1)]^2 [V(\rho(j-1, m, t)) \\ & - V(\rho(j, m, t))] + \gamma \tau \rho_0^2 [c(1-c_1)]^2 \\ & \times [V(\rho(j-2, m, t)) \\ & - 2V(\rho(j-1, m, t)) + V(\rho(j, m, t))] \\ & + \tau \rho_0^2 [(1-c)c_2]^2 [V(\rho(j, m+1, t)) \\ & - V(\rho(j, m, t))] + \gamma \tau \rho_0^2 [(1-c)c_2]^2 \\ & \times [V(\rho(j, m+2, t)) - 2V(\rho(j, m+1, t)) \\ & + V(\rho(j, m, t))] \\ & + \tau \rho_0^2 [(1-c)(1-c_2)]^2 [V(\rho(j, m-1, t)) \\ & - V(\rho(j, m, t))] + \gamma \tau \rho_0^2 [(1-c)(1-c_2)]^2 \\ & \times [V(\rho(j, m-2, t)) - 2V(\rho(j, m-1, t)) \\ & + V(\rho(j, m, t))] = 0. \quad (14) \end{aligned}$$

当取  $c=0, c_2=1, \gamma=0$  或  $c=1, c_1=1, \gamma=0$ , 方程(14)将回归到一维车辆交通格子流体力学模型的密度方程<sup>[21]</sup>; 当取  $c_1=1, c_2=1$  及  $\gamma=0$ , 方程(14)将回归到二维车辆交通格子流体力学模型的密度方程<sup>[23]</sup>; 当  $\gamma=0$ , 方程(14)将回归到二维双向行人交通格子流体力学模型的密度方程<sup>[27]</sup>.

### 3. 线性稳定性分析

对方程(14)进行线性稳定性分析. 考虑均匀分布的行人流, 此时密度  $\rho_0$  为常数, 东向行人的速度  $v_{x+}(j, m, t)$ 、北向行人的速度  $v_{y+}(j, m, t)$ 、西向行人的速度  $v_{x-}(j, m, t)$  和南向行人的速度  $v_{y-}(j, m, t)$  也为常数  $V(\rho_0)$ . 显然, 方程(14)的稳定态解为

$$\begin{aligned} \rho(j, m, t) &= \rho_0, \\ v_{x+}(j, m, t) &= v_{x-}(j, m, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= v_{y+}(j, m, t) \\ &= v_{y-}(j, m, t) = V(\rho_0). \end{aligned} \quad (15)$$

施加一个小扰动  $y(j, m, t)$  作用在行人流处于均匀分布的定态上, 即

$$\rho(j, m, t) = \rho_0 + y(j, m, t).$$

这样, 由线性化方程(14)就可以得到

$$\begin{aligned} & y(j, m, t + 2\tau) - y(j, m, t + \tau) \\ & + \tau \rho_0^2 [cc_1]^2 V'(\rho_0) [y(j+1, m, t) \\ & - y(j, m, t)] + \gamma \tau \rho_0^2 [cc_1]^2 V'(\rho_0) \\ & \times [y(j+2, m, t) - 2y(j+1, m, t) + y(j, m, t)] \\ & + \tau \rho_0^2 [c(1-c_1)]^2 V'(\rho_0) \\ & \times [y(j-1, m, t) - y(j, m, t)] \\ & + \gamma \tau \rho_0^2 [c(1-c_1)]^2 V'(\rho_0) \\ & \times [y(j-2, m, t) - 2y(j-1, m, t) + y(j, m, t)] \\ & + \tau \rho_0^2 [(1-c)c_2]^2 V'(\rho_0) \\ & \times [y(j, m+1, t) - y(j, m, t)] \\ & + \gamma \tau \rho_0^2 [(1-c)c_2]^2 V'(\rho_0) \\ & \times [y(j, m+2, t) - 2y(j, m+1, t) + y(j, m, t)] \\ & + \tau \rho_0^2 [(1-c)(1-c_2)]^2 V'(\rho_0) \\ & \times [y(j, m-1, t) - y(j, m, t)] \\ & + \gamma \tau \rho_0^2 [(1-c)(1-c_2)]^2 V'(\rho_0) \\ & \times [y(j, m-2, t) - 2y(j, m-1, t) \\ & + y(j, m, t)] = 0, \quad (16) \end{aligned}$$

其中

$$V'(\rho_0) = \left. \frac{dV(\rho)}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_0}.$$

考虑长波模式并取其中的单色波分量  $y(j, m, t) = C \exp[ik(j+m) + zt]$ , 代入方程(16)得

$$\begin{aligned} & \exp(2z\tau) - \exp(z\tau) \\ & + \tau \rho_0^2 [cc_1]^2 V'(\rho_0) [\exp(ik) - 1] \\ & + \gamma \tau \rho_0^2 [cc_1]^2 V'(\rho_0) [\exp(2ik) - 2\exp(ik) + 1] \\ & + \tau \rho_0^2 [c(1-c_1)]^2 V'(\rho_0) [\exp(-ik) - 1] \\ & + \gamma \tau \rho_0^2 [c(1-c_1)]^2 V'(\rho_0) [\exp(-2ik) \\ & - 2\exp(-ik) + 1] \\ & + \tau \rho_0^2 [(1-c)c_2]^2 V'(\rho_0) [\exp(ik) - 1] \\ & + \gamma \tau \rho_0^2 [(1-c)c_2]^2 V'(\rho_0) [\exp(2ik) \\ & - 2\exp(ik) + 1] \\ & + \tau \rho_0^2 [(1-c)(1-c_2)]^2 V'(\rho_0) [\exp(-ik) - 1] \\ & + \gamma \tau \rho_0^2 [(1-c)(1-c_2)]^2 V'(\rho_0) [\exp(-2ik) \\ & - 2\exp(-ik) + 1] = 0. \quad (17) \end{aligned}$$

考虑  $z = z_1(ik) + z_2(ik)^2 + \dots$ , (7)式保留至  $(ik)^2$

项,得

$$z_1 = -\rho_0^2 V' \{ [cc_1]^2 - [c(1-c_1)]^2 + [(1-c)c_2]^2 - [(1-c)(1-c_2)]^2 \}, \quad (18)$$

$$z_2 = -\frac{3}{2}\tau(\rho_0^2 V')^2 \{ [cc_1]^2 - [c(1-c_1)]^2 + [(1-c)c_2]^2 - [(1-c)(1-c_2)]^2 \}^2$$

$$\tau = -\frac{(1+2\gamma)\{[cc_1]^2 + [c(1-c_1)]^2 + [(1-c)c_2]^2 + [(1-c)(1-c_2)]^2\}}{3\rho_0^2 V'(\rho_0)\{[cc_1]^2 - [c(1-c_1)]^2 + [(1-c)c_2]^2 - [(1-c)(1-c_2)]^2\}^2}. \quad (20)$$

当  $c_1 = c_2 = 0.5$  时,不论  $c$  的取值如何,这里存在一个奇点.这说明在不稳定区域之外,相变从不会发生.

$$\tau > -\frac{(1+2\gamma)\{[cc_1]^2 + [c(1-c_1)]^2 + [(1-c)c_2]^2 + [(1-c)(1-c_2)]^2\}}{3\rho_0^2 V'(\rho_0)\{[cc_1]^2 - [c(1-c_1)]^2 + [(1-c)c_2]^2 - [(1-c)(1-c_2)]^2\}^2}. \quad (21)$$

将稳定性条件(21)式与文献[27]中二维双向行人交通格子流体力学模型的稳定性条件相比,考虑次近邻作用的行人流的稳定性得到增强.

#### 4. 非线性分析和 mKdV 方程

我们考虑行人流在粗粒化尺度上的长波模式,描述长波模式的最简单方法就是长波展开,研究在临界点  $\rho = \rho_c$  和  $\tau = \tau_c$  附近空间变量和时间变量的缓变行为<sup>[29]</sup>.引入小参数  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon \ll 1$ ),定义缓变量  $X$  和  $T$  如下<sup>[29]</sup>:

$$\begin{aligned} X &= \varepsilon(j + m + bt), \\ T &= \varepsilon^3 t, \end{aligned} \quad (22)$$

其中  $b$  是待定常数.取密度

$$\rho(j, m, t) = \rho_c + \varepsilon R(X, T). \quad (23)$$

将(22),(23)式展开至  $\varepsilon^5$  量级,代入方程(14)得

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2 \{ b + g\rho_c^2 V' \} \partial_X R + \varepsilon^3 \left[ \frac{3b^2\tau}{2} + \frac{1+2\gamma}{2} f\rho_c^2 V' \right] \partial_X^2 R \\ &+ \varepsilon^4 \left\{ \left[ \frac{7b^3\tau^2}{6} + \frac{1+6\gamma}{6} g\rho_c^2 V' \right] \partial_X^3 R \right. \\ &+ \left. \frac{1}{6} g\rho_c^2 V''' \partial_X R^3 + \partial_T R \right\} \\ &+ \varepsilon^5 \left\{ \left[ \frac{5b^4\tau^3}{8} + \frac{1+14\gamma}{24} f\rho_c^2 V' \right] \partial_X^4 R \right. \\ &+ \left. \frac{1+2\gamma}{12} f\rho_c^2 V''' \partial_X^2 R^3 + 3b\tau \partial_X \partial_T R \right\} = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

其中

$$\begin{aligned} &-\left(\frac{1}{2} + \gamma\right)\rho_0^2 V' \{ [cc_1]^2 + [c(1-c_1)]^2 \\ &+ [(1-c)c_2]^2 + [(1-c)(1-c_2)]^2 \}. \end{aligned} \quad (19)$$

当  $z_2 < 0$  时,那么对长波模式均匀分布的定态就不是稳定状态;当  $z_2 > 0$  时,均匀分布的定态就是稳定状态,因此得到如下的中性稳定曲线:

对长波模式的小扰动,使均匀分布定态不稳定的条件是

$$\begin{aligned} V' &= \left. \frac{dV(\rho)}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_c}, \\ V''' &= \left. \frac{d^3 V(\rho)}{d^3 \rho} \right|_{\rho=\rho_c}, \\ g &= (cc_1)^2 - [c(1-c_1)]^2 + [(1-c)c_2]^2 \\ &\quad - [(1-c_2)(1-c)]^2, \\ f &= (cc_1)^2 + [c(1-c_1)]^2 + [(1-c)c_2]^2 \\ &\quad + [(1-c_2)(1-c)]^2. \end{aligned}$$

当取  $b = -g\rho_c^2 V'$  时,方程(24)中  $\varepsilon$  的二次项系数为零.考虑到在临界点  $\tau = \tau_c$  和  $\rho = \rho_c$ ,

$$\frac{\tau}{\tau_c} = 1 + \varepsilon^2, \quad (25)$$

其中

$$\tau_c = \frac{(1+2\gamma)f}{3gb}.$$

方程(24)可以写为

$$\begin{aligned} &\varepsilon^4 \left\{ \left[ \frac{7b^3\tau^2}{6} + \frac{1+6\gamma}{6} g\rho_c^2 V' \right] \partial_X^3 R \right. \\ &+ \left. \frac{1}{6} g\rho_c^2 V''' \partial_X R^3 + \partial_T R \right\} + \varepsilon^5 \left\{ -\frac{1+2\gamma}{2} f\rho_c^2 V' \partial_X^2 R \right. \\ &+ \left. \left[ \frac{5b^4\tau^3}{8} + \frac{1+14\gamma}{24} f\rho_c^2 V' \right] \partial_X^4 R \right. \\ &+ \left. \frac{1+2\gamma}{12} f\rho_c^2 V''' \partial_X^2 R^3 + 3b\tau \partial_X \partial_T R \right\} = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

其中

$$\partial_X \partial_T R = -\left[ \frac{7b^3\tau^2}{6} + \frac{1+6\gamma}{6} g\rho_c^2 V' \right] \partial_X^4 R - \frac{1}{6} g\rho_c^2 V''' \partial_X^2 R^3.$$

将  $\frac{\tau}{\tau_c} - 1 = \varepsilon^2$  代入方程(26)得到

$$\begin{aligned} \partial_\tau R = & \frac{-7(1+2\gamma)^2 f^2 + 9(1+6\gamma)g^2}{54g} (-g\rho_c^2 V') \partial_x^3 R \\ & - \frac{1}{6} g\rho_c^2 V''' \partial_x R^3 - \varepsilon \left\{ \frac{1+2\gamma}{2} f(-\rho_c^2 V') \partial_x^2 R \right. \\ & - \frac{23(1+2\gamma)^3 f^2 - 27(16\gamma^2 + 6\gamma + 1)g^2}{216g^2} \\ & \left. \times f(-\rho_c^2 V') \partial_x^4 R - \frac{1+2\gamma}{12} f\rho_c^2 V''' \partial_x^2 R^3 \right\} = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

为了得到规则方程,对方程(27)作如下变量代换:

$$\begin{aligned} T' = & \frac{[-7(1+2\gamma)^2 f^2 + 9(1+6\gamma)g^2](-\rho_c^2 V')}{54g} T, \\ R = & \sqrt{\frac{[-7(1+2\gamma)^2 f^2 + 9(1+6\gamma)g^2](-\rho_c^2 V')}{9g^2 \rho_c^2 V''''}} R', \end{aligned} \quad (28)$$

其中  $-7(1+2\gamma)^2 f^2 + 9(1+6\gamma)g^2 > 0$  且  $0 \leq \gamma < 0.5$ . 方程(27)简化为

$$\begin{aligned} \partial_{T'} R' = & \partial_x^3 R' - \partial_x R'^3 \\ & - \varepsilon \left\{ \frac{27(1+2\gamma)fg}{-7(1+2\gamma)^2 f^2 + 9(1+6\gamma)g^2} \partial_x^2 R' \right. \\ & \left. - \frac{[23(1+2\gamma)^3 f^2 - 27(16\gamma^2 + 6\gamma + 1)g^2]f}{4g[-7(1+2\gamma)^2 f^2 + 9(1+6\gamma)g^2]} \partial_x^4 R' \right. \\ & \left. - \frac{(1+2\gamma)f}{2g} \partial_x^2 R'^3 \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R = & \sqrt{\frac{[-7(1+2\gamma)^2 f^2 + 9(1+6\gamma)g^2](-g\rho_c^2 V')}{9g^2 \rho_c^2 V''''}} p \\ & \times \tanh \left\{ \frac{p}{2} \left[ X - p \frac{[-7(1+2\gamma)^2 f^2 + 9(1+6\gamma)g^2](-g\rho_c^2 V')}{54g} T \right] \right\}. \end{aligned} \quad (33)$$

如果我们采用优化速度函数的简化形式 ( $-\rho_c^2 V' = 1, \rho_c^6 V''' = 2$ ), 扭结波的振幅  $A$  可由下式给出:

$$A = \rho_c^2 \sqrt{\frac{15(1+2\gamma)[-7(1+2\gamma)^2 f^2 + 9(1+6\gamma)g^2]}{2[27(14\gamma^2 + 7\gamma + 1)g^2 - 22(1+2\gamma)^3 f^2]} \left( \frac{a_c}{a} - 1 \right)}, \quad (34)$$

其中

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\tau}, \\ a_c &= \frac{1}{\tau_c} = \frac{3g^2}{(1+2\gamma)f}. \end{aligned}$$

扭结波解表示共存相,即低密度的自由流相和高密度的堵塞相共存. 行人自由流相的密度和堵塞相的密度分别为  $\rho = \rho_c - A$  和  $\rho = \rho_c + A$ .

当取  $c = 0, c_2 = 1, \gamma = 0$  或  $c = 1, c_1 = 1, \gamma = 0$ , 方程(14)将回归到一维车辆交通格子流体力学模

$$- \frac{(1+2\gamma)f}{2g} \partial_x^2 R'^3 \} = 0. \quad (29)$$

若方程(29)中忽略了  $O(\varepsilon)$  项,得到标准的 mKdV 方程,方程的解可表示为

$$R'_0(X, T') = \sqrt{p} \tanh \left[ \frac{p}{2} (X - pT') \right]. \quad (30)$$

假设

$$R(X, T') = R'_0(X, T') + \varepsilon R'_1(X, T'),$$

根据可解性条件可以确定方程(30)中参数  $p$ .

$$\begin{aligned} (R'_0, M[R'_0]) &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dX R'_0 M[R'_0] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (31)$$

其中

$$\begin{aligned} M[R'_0] &= \left[ \frac{27(1+2\gamma)fg}{-7(1+2\gamma)^2 f^2 + 9(1+6\gamma)g^2} \partial_x^2 R' \right. \\ & - \frac{[23(1+2\gamma)^3 f^2 - 27(16\gamma^2 + 6\gamma + 1)g^2]f}{4g[-7(1+2\gamma)^2 f^2 + 9(1+6\gamma)g^2]} \partial_x^4 R' \\ & \left. - \frac{(1+2\gamma)f}{2g} \partial_x^2 R'^3 \right]. \end{aligned}$$

通过参数

$$p = \frac{135(1+2\gamma)g^2}{27(14\gamma^2 + 7\gamma + 1)g^2 - 22(1+2\gamma)^3 f^2}, \quad (32)$$

对(31)式积分,可以求解  $R$  值,即

型的解<sup>[21]</sup>;当取  $c_1 = 1, c_2 = 1$  及  $\gamma = 0$ , 方程(14)将回归到二维车辆交通格子流体力学模型的解<sup>[23]</sup>;当  $\gamma = 0$ , 方程(14)将回归到二维双向行人交通格子流体力学模型的解<sup>[27]</sup>.

## 5. 数值模拟

在计算机模拟时,采用周期边界条件和如下的初始条件<sup>[23]</sup>:  $\rho(j, m, 0) = \rho_0 = \rho_c = 0.2$ , 当  $t = 1$  时, 在格子  $(L/2, L/2)$  和  $(L/2 - 1, L/2 - 1)$  上有一小

扰动,使得格子  $(L/2, L/2)$  和  $(L/2 - 1, L/2 - 1)$  的局域密度  $\rho(L/2, L/2, 1)$  和  $\rho(L/2 - 1, L/2 - 1, 1)$  分别取 0.1 和 0.3, 其中  $L = 200$ .

图 2 给出了弛豫时间倒数  $\tau^{-1}$  与行人密度  $\rho$  的关系, 其中实线代表由 mKdV 方程的解得到的共存曲线. 虚线表示  $\gamma$  分别为 0.0, 0.1, 0.3, 0.5 和  $c = c_1 = c_2 = 0.1$  时的中性稳定曲线, 圆点代表共存曲线

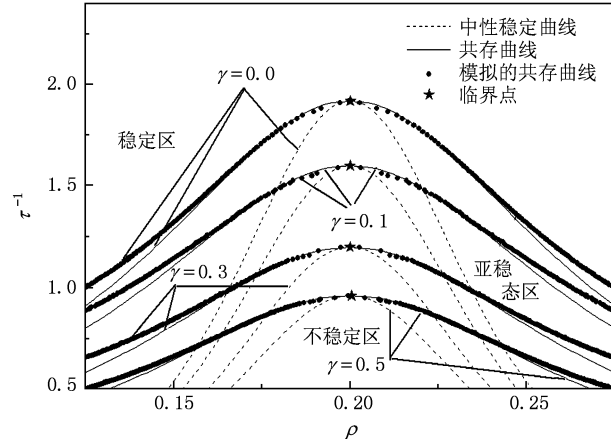


图 2  $\gamma = 0.0, 0.1, 0.3, 0.5$  和  $c = c_1 = c_2 = 0.1$  时行人密度  $\rho$  与  $\tau^{-1}$  的关系  $\rho_c = \rho_0 = 0.2$

的数值模拟结果, 星号代表临界点. 根据稳定性分析, 行人流可分为不稳定区域 (在中性稳定曲线以内)、稳定区域 (位于共存曲线以外) 及亚稳定区域 (位于共存曲线和中性稳定曲线之间) 三个区域. 从图 2 可以看出, 在临界点附近理论结果与数值模拟结果比较相符. 同时还可以发现, 稳定区域与参数  $\gamma$  有关, 当  $\gamma$  增大时, 稳定区域随之增加, 不稳定区域被压缩. 这与上述稳定性分析所得的结论相符.

## 6. 结 论

本文在二维双向行人交通格子流体力学模型的基础上, 考虑前面次近邻格点上行人的作用, 建立了宏观次近邻行人交通格子流体力学模型. 通过线性稳定性分析给出了新模型的稳定性条件, 通过非线性分析得出描述交通堵塞扭结-反扭结密度波的 mKdV 方程, 说明交通阻塞呈现的聚集行为. 数值模拟验证了在临界点附近解析结果与数值模拟结果相符. 因此, 考虑次近邻格点上行人的作用, 有利于提高行人交通的稳定性, 可避免交通阻塞.

- [1] Chowdhury D, Santen L, Schadschneider A 2000 *Phys. Rep.* **329** 199
- [2] Helbing D 2001 *Rev. Mod. Phys.* **73** 1067
- [3] Nagatani T 2002 *Rep. Prog. Phys.* **65** 1331
- [4] Helbing D, Farkas I J, Vicsek T 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 1240
- [5] Helbing D, Farkas I J, Vicsek T 2000 *Nature* **407** 487
- [6] Bohannon J 2005 *Science* **310** 219
- [7] Henderson L E 1971 *Nature* **229** 381
- [8] Helbing D, Molnár P 1995 *Phys. Rev. E* **51** 4282
- [9] Muramatsu M, Irie T, Nagatani T 1999 *Physica A* **267** 487
- [10] Tajima Y, Nagatani T 2001 *Physica A* **292** 545
- [11] Tajima Y, Nagatani T 2002 *Physica A* **303** 239
- [12] Takimoto K, Tajima Y, Nagatani T 2002 *Physica A* **308** 460
- [13] Burstedde C, Klauck K, Schadschneider A, Zittartz J 2001 *Physica A* **295** 507
- [14] Yue H, Shao C F, Yao Z S 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4523 (in Chinese) [岳 昊、邵春福、姚智胜 2009 物理学报 **58** 4523]
- [15] Zhou J W, Kuan H, Liu M R, Kong L J 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3001 (in Chinese) [周金旺、邝 华、刘慕仁、孔令江 2009 物理学报 **58** 3001]
- [16] Kerner B S, Konhauser P 1993 *Phys. Rev. E* **48** 2335
- [17] Kurtze D A, Hong D C 1995 *Phys. Rev. E* **52** 218
- [18] Komatsu T S, Sasa S 1995 *Phys. Rev. E* **52** 5574
- [19] Muramatsu M, Nagatani T 1999 *Phys. Rev. E* **60** 180
- [20] Nagatani T 1998 *Physica A* **261** 599
- [21] Nagatani T 1999 *Physica A* **264** 581
- [22] Nagatani T 1999 *Physica A* **265** 297
- [23] Nagatani T 1999 *Phys. Rev. E* **59** 4857
- [24] Xue Y 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 25 (in Chinese) [薛 郁 2004 物理学报 **53** 25]
- [25] Tang T Q, Huang H J, Xue Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4026 (in Chinese) [唐铁桥、黄海军、薛 郁 2006 物理学报 **55** 4026]
- [26] May A D 1990 *Traffic Flow Fundamentals* (New Jersey: Prentice Hall) p210
- [27] Tian H H, Xue Y, He H D, Wei Y F, Lu W Z 2009 *Physica A* **388** 2895
- [28] Xue Y, Tian H H, He H D, Lu W Z, Wei Y F 2009 *Eur. Phys. J. B* **69** 289
- [29] Nagatani T, Nakanishi K 1998 *Phys. Rev. E* **57** 6415
- [30] Nagatani T 1998 *Phys. Rev. E* **58** 4271

# Lattice hydrodynamic model for pedestrian traffic with the next-nearest-neighbor pedestrian<sup>\*</sup>

Wen Jian<sup>1)2)</sup> Tian Huan-Huan<sup>1)2)</sup> Xue Yu<sup>2)†</sup>

1) (*Department of Physics and Information Science, Yulin Normal University, Yulin 537000, China*)

2) (*Institute of Physical Science and Engineering, Guangxi University, Nanning 530004, China*)

(Received 12 July 2009; revised manuscript received 16 December 2009)

## Abstract

Based on the lattice hydrodynamic model with bidirectional pedestrian flow, the lattice hydrodynamic model which considered the interaction of the next-nearest-neighbor pedestrians was proposed in this paper. By the linear stability analysis, the stability condition was obtained. By nonlinear analysis, the modified Korteweg-de Vries equation to describe the density wave of pedestrian congestion was given. Furthermore, numerical simulation was carried out to examine the performance of such a model and it shows consistency with the theoretical analysis results.

**Keywords:** modified Korteweg-de Vries equation, pedestrian flow, lattice hydrodynamic model

**PACC:** 0550, 0520

---

<sup>\*</sup> Project supported by the State Key Development Program for Basic Research of China ( Grant No. 2006CB705500 ) and the National Natural Science Foundation of China ( Grant Nos. 10662002, 10865001, 10532060 ).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: yuxuegu@gxu.edu.cn