

# 部分相干平顶光束通过湍流大气传输的 等效曲率半径\*

季小玲<sup>†</sup>

(四川师范大学物理系, 成都 610066)

(2009 年 9 月 27 日收到; 2009 年 10 月 26 日收到修改稿)

推导出了部分相干平顶光束在湍流大气中传输的等效曲率半径的解析表达式, 详细地研究了湍流对其等效曲率半径的影响. 研究表明, 湍流使得等效曲率半径  $R$  减小, 但是只有当湍流足够强时等效曲率半径极小值出现的位置  $z_{\min}$  才会改变. 在弱湍流中,  $R$  随着光束相干长度  $\beta$  的增大而增大; 但是在强湍流中,  $R$  随着  $\beta$  的增大而减小.  $R$  随着光束阶数  $M(N)$  的增大而缓慢减小. 若  $\beta$  越大、 $M(N)$  越小, 则  $R$  受湍流的影响越大. 此外, 部分相干平顶光束在自由空间中传输时远场均可以看作球面波, 这一结果与光束参数无关. 但是, 在湍流大气中不论是近场还是远场等效曲率半径均与光束参数有关.

**关键词:** 等效曲率半径, 湍流, 部分相干平顶光束

**PACC:** 4260H, 4225, 9265

## 1. 引 言

由于部分相干光在湍流大气中传输光束扩展受湍流的影响比完全相干光小<sup>[1-3]</sup>, 使得部分相干光通过湍流大气的传输特性研究备受关注. 近年来, 国内外学者就湍流对部分相干光的光束扩展、光谱特性、偏振特性和相干度特性等的影响做了大量研究<sup>[1-17]</sup>. 然而, 迄今为止有关湍流对光束等相面的曲率半径影响的研究甚少, 主要原因是一般情况下很难得到部分相干光束曲率半径的解析表达式. 文献[18]利用互相干函数给出了高斯-谢尔模型(GSM)光束在湍流大气中的曲率半径公式, 但这种方法仅适用于只含有一项指数项的部分相干光. 而实际中存在许多不能够用一项指数项来表示的

部分相干光, 例如部分相干平顶光束、部分相干厄米-高斯光束和部分相干双曲余弦高斯光束等等. 平顶光束对某些实际应用有重要意义. 本文给出了部分相干平顶光束通过湍流大气传输的等效曲率半径的解析表达式, 并详细研究了湍流对其影响, 得到了一些有意义的物理结果.

## 2. 理论模型

部分空间相干光可以由完全相干光通过随机相位板或液晶晶体产生<sup>[19]</sup>. 引入高斯型的谱相干度函数, 完全相干光可以拓展为部分空间相干光. 在直角坐标系下, 设  $z = 0$  平面处部分相干平顶光束的交叉谱密度函数为<sup>[20,21]</sup>

$$\begin{aligned} W(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, z = 0) &= \sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M \alpha_m \alpha_{m'} \exp\left[-\left(mp_m \frac{x_1'^2}{w_0^2} + m'p_{m'} \frac{x_2'^2}{w_0^2}\right)\right] \exp\left[-\frac{(x'_1 - x'_2)^2}{2\sigma_0^2}\right] \\ &\times \sum_{n=1}^N \sum_{n'=1}^N \alpha_n \alpha_{n'} \exp\left[-\left(np_n \frac{y_1'^2}{w_0^2} + n'p_{n'} \frac{y_2'^2}{w_0^2}\right)\right] \exp\left[-\frac{(y'_1 - y'_2)^2}{2\sigma_0^2}\right], \end{aligned} \quad (1)$$

\* 国家自然科学基金(批准号:60778048)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: jixl100@163.com

式中  $\mathbf{r}'_j \equiv (x'_j, y'_j)$  ( $j=1, 2$ ),  $w_0$  为对应高斯束腰宽度,  $\sigma_0$  为光束的相关长度,  $M$  和  $N$  为平顶光束的阶数, 并且<sup>[21]</sup>

$$\alpha_t = (-1)^{t+1} \frac{M!}{t!(M-t)!} \quad (t = m, m'), \quad (2)$$

$$p_t = \sum_{t=1}^M \frac{\alpha_t}{t} \quad (t = m, m');$$

$$\alpha_{t'} = (-1)^{t'+1} \frac{N!}{t'!(N-t')!} \quad (t' = n, n'), \quad (3)$$

$$p_{t'} = \sum_{t'=1}^N \frac{\alpha_{t'}}{t'} \quad (t' = n, n').$$

显然, 当  $M=N=1$  时, (1) 式简化为 GSM 光束的交叉谱密度函数 ( $z=0$  平面处).

根据广义惠更斯-菲涅尔原理, 部分相干平顶光束通过自由空间传输在  $z$  平面处的光强满足<sup>[22]</sup>

$$I(\mathbf{r}, z) = \left(\frac{k}{2\pi z}\right)^2 \iint d^2 r'_1 \iint d^2 r'_2 W(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, z=0) \times \exp\left\{-\left(\frac{ik}{2z}\right)[(\mathbf{r}'_1{}^2 - \mathbf{r}'_2{}^2) - 2\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2)]\right\}, \quad (4)$$

其中  $\mathbf{r} \equiv (x, y)$ , 波数  $k=2\pi/\lambda$  ( $\lambda$  为波长).

为了得到解析结果, 我们引入新积分变量

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}'_2 + \mathbf{r}'_1}{2}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1. \quad (5)$$

将(5)式代入(4)式后得到

$$I(\mathbf{r}, z) = \left(\frac{k}{2\pi z}\right)^2 \iint d^2 u \iint d^2 v W(\mathbf{u}, \mathbf{v}, z=0) \times \exp\left(-i\frac{k}{z}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\right) \exp\left(i\frac{k}{z}\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}\right). \quad (6)$$

二阶矩  $\langle r^2 \rangle$  定义为<sup>[23]</sup>

$$\langle r^2 \rangle = \frac{\iint r^2 I(\mathbf{r}, z) d^2 r}{\iint I(\mathbf{r}, z) d^2 r}, \quad (7)$$

式中  $\langle r^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle$ .

将(6)式代入(7)式, 并利用积分公式

$$\int \exp(-i2\pi xs) dx = \delta(s), \quad (8)$$

$$\int x^2 \exp(-i2\pi xs) dx = -\frac{1}{(2\pi)^2} \delta''(s), \quad (9)$$

经过复杂的积分运算后得到

$$\langle r^2 \rangle = A + Bz^2. \quad (10)$$

这里  $\delta$  表示 Dirac  $\delta$  函数,  $\delta''$  为其二阶导数,

$$A = \sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{n'=1}^N \frac{w_0^2 C}{2} \left(\frac{1}{Q_1} + \frac{1}{Q_2}\right) / D, \quad (11)$$

$$B = \sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{n'=1}^N \frac{2C}{k^2 w_0^2} \times \left[\frac{1}{\beta^2} + \left(\frac{G_1}{Q_1} + \frac{G_2}{Q_2}\right)\right] / D, \quad (12)$$

$$Q_1 = mP_m + m'P_{m'}, \quad (13)$$

$$G_1 = (mP_m)(m'P_{m'}), \quad (14)$$

$$D = \sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{n'=1}^N C, \quad (15)$$

$$C = \frac{\alpha_m \alpha_{m'} \alpha_n \alpha_{n'}}{Q_1 Q_2}, \quad (16)$$

式中  $\beta = \sigma_0/w_0$  称为光束的相干长度<sup>[24]</sup>. 将(13)和(14)式中的  $m$  和  $m'$  分别用  $n$  和  $n'$  代替即可得到  $Q_2$  和  $G_2$ .

部分空间相干光通过湍流大气传输, 其二阶矩  $\langle r^2 \rangle$  和  $\langle \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\theta} \rangle$  的一般传输公式为<sup>[25]</sup>

$$\langle r^2 \rangle = \langle r^2 \rangle_0 + 2\langle \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\theta} \rangle_0 z + \langle \boldsymbol{\theta}^2 \rangle_0 z^2 + (4/3)Tz^3, \quad (17)$$

$$\langle \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\theta} \rangle = \langle \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\theta} \rangle_0 + \langle \boldsymbol{\theta}^2 \rangle_0 z + 2Tz^2. \quad (18)$$

这里  $\langle \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\theta} \rangle = \langle x\theta_x \rangle + \langle y\theta_y \rangle$ ,  $\langle \cdot \rangle_0$  表示  $z=0$  平面处对应的二阶矩, 并且

$$T = \pi^2 \int_0^\infty \kappa^3 \Phi_n(\kappa) d\kappa. \quad (19)$$

式中  $\Phi_n(\kappa)$  为湍流介质的折射率起伏空间谱密度函数.

将(10)式与(17)式(当  $T=0$  时, 即自由空间)比较后得到

$$\langle r^2 \rangle_0 = A,$$

$$\langle \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\theta} \rangle_0 = 0,$$

$$\langle \boldsymbol{\theta}^2 \rangle_0 = B.$$

将此结果代入(17)和(18)式中, 得到部分相干平顶光束通过湍流大气传输时二阶矩  $\langle r^2 \rangle$  和  $\langle \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\theta} \rangle$  的表达式为

$$\langle r^2 \rangle = A + Bz^2 + (4/3)Tz^3, \quad (20)$$

$$\langle \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\theta} \rangle = Bz + 2Tz^2. \quad (21)$$

任意场的等效曲率半径可以用二阶矩定义为<sup>[26]</sup>

$$R = \frac{\langle r^2 \rangle}{\langle \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\theta} \rangle}. \quad (22)$$

将(20)和(21)式代入(22)式中, 得到部分相干平顶光束通过湍流大气传输的等效曲率半径的解析公式

$$R = \frac{A + Bz^2 + (4/3)Tz^3}{Bz + 2Tz^2}. \quad (23)$$

下面给出(23)式的三种特例.

(i) 当  $M = N = 1$  时, (23)式简化为 GSM 光束通过湍流大气传输的等效曲率半径的解析公式

$$R = \frac{\frac{1}{2}w_0^2 + \frac{2}{k^2w_0^2}\left(1 + \frac{1}{\beta^2}\right)z^2 + \frac{4}{3}Tz^3}{\frac{2}{k^2w_0^2}\left(1 + \frac{1}{\beta^2}\right)z + 2Tz^2}. \quad (24)$$

(ii) 当  $T = 0$  时, (23)式简化为部分相干平顶光束在自由空间中传输的等效曲率半径的解析公式

$$R_{\text{free}} = \frac{A + Bz^2}{Bz}. \quad (25)$$

(iii) 当  $z \rightarrow \infty$  时, (25)和(23)式分别简化为部分相干平顶光束在自由空间和湍流大气中传输时远场等效曲率半径的近似解析公式

$$R_{\text{free}\infty} = \lim_{z \rightarrow \infty} R_{\text{free}} \approx z, \quad (26)$$

$$R_{\infty} = \lim_{z \rightarrow \infty} R \approx \frac{B}{2T} + \frac{2}{3}z. \quad (27)$$

(26)式表明, 部分相干平顶光束在自由空间中传输时远场可以看作一个由  $z = 0$  点发出, 半径为  $z$  的球面波, 这一结论与光束参数 ( $\beta, M$  和  $N$ ) 无关. (27)式表明, 湍流要改变光束远场处的等效曲率半径, 湍流越强  $R_{\infty}$  越小. 并且, 湍流中  $R_{\infty}$  与光束参数有关; 但随着传输距离  $z$  的进一步增加, 光束参数对等效曲率半径的影响相对减弱.

### 3. 数值计算结果及分析

数值计算中采用 Tatarskii 谱, 即<sup>[27]</sup>

$$\Phi_n(\kappa) = 0.033C_n^2\kappa^{-11/3}\exp\left(-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}\right), \quad (28)$$

式中  $\kappa_m = 5.92/l_0$ ,  $l_0$  为湍流的内尺度,  $C_n^2$  是折射率结构常数, 它表征湍流的强弱. 当湍流的内尺度取典型值  $l_0 = 0.01$  m, 代入(19)式积分后得到  $T = 7.6113C_n^2$ .

本文数值计算中, 取  $\lambda = 1.06$   $\mu\text{m}$ ,  $w_0 = 0.02$  m.

图 1 为部分相干平顶光束的等效曲率半径  $R$  随折射率结构常数  $C_n^2$  的变化曲线. 图 1 表明, 湍流使得光束的  $R$  减小, 并且  $C_n^2$  越大  $R$  下降越多.

图 2 为部分相干平顶光束的等效曲率半径  $R$  随传输距离  $z$  的变化曲线. 由图 2 可知, 随着传输距离的变化,  $R$  出现一个极小值. 当湍流不是很强时, 湍流几乎不会改变其极小值出现的位置  $z_{\text{min}}$ . 例如,

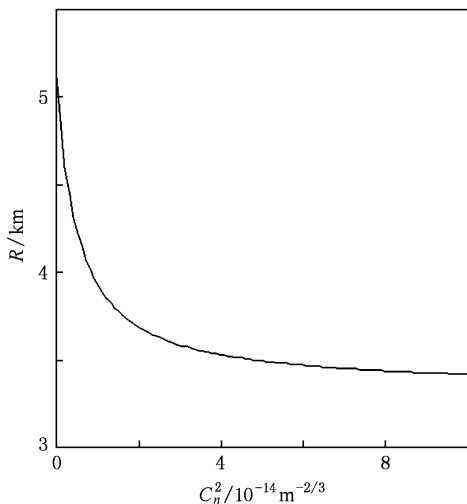


图 1  $R$  随  $C_n^2$  的变化  $z = 5$  km,  $M = N = 10$ ,  $\beta = 1$

图 2 中当  $C_n^2 = 10^{-14}$   $\text{m}^{-2/3}$  和  $C_n^2 = 0$  时, 具有相同的  $z_{\text{min}} = 800$  m. 只有当湍流足够强时等效曲率半径极小值  $R_{\text{min}}$  出现的位置  $z_{\text{min}}$  才会改变, 例如, 图 2 中当  $C_n^2 = 10^{-13}$   $\text{m}^{-2/3}$  时,  $z_{\text{min}} = 600$  m.

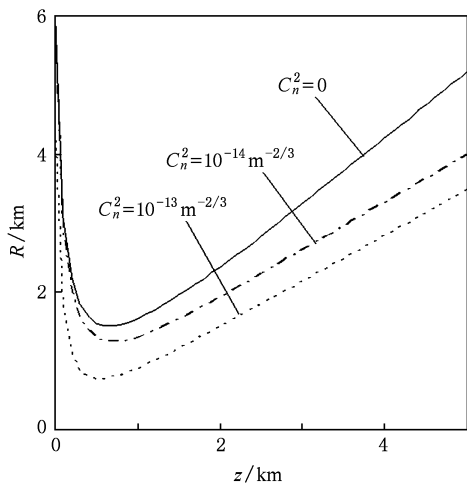


图 2  $R$  随  $z$  的变化  $M = N = 10$ ,  $\beta = 1$

图 3(a) 和 (b) 分别为部分相干平顶光束的等效曲率半径  $R$  和相对等效曲率半径  $R/R_{\text{free}}$  随光束相干长度  $\beta$  的变化曲线. 显然,  $R/R_{\text{free}}$  越小表明  $R$  受湍流的影响越大. 图 3(a) 表明, 在自由空间或弱湍流大气中 (例如  $C_n^2 = 0, 10^{-15}$   $\text{m}^{-2/3}$ ),  $R$  随着  $\beta$  的增大而增大; 但是, 当湍流强度较大时 (例如  $C_n^2 = 10^{-14}$   $\text{m}^{-2/3}$ ),  $R$  随着  $\beta$  的增大而减小. 并且当  $\beta$  足够大时 (完全相干平顶光束),  $R$  趋于恒定值  $R_{\text{full}}$ . 例如, 当  $C_n^2 = 0, 10^{-15}, 10^{-14}$   $\text{m}^{-2/3}$  时, 分别有  $R_{\text{full}} = 3.5, 3.1$  和  $2.4$  km. 图 3(b) 表明,  $R/R_{\text{free}}$  随着  $\beta$  的增

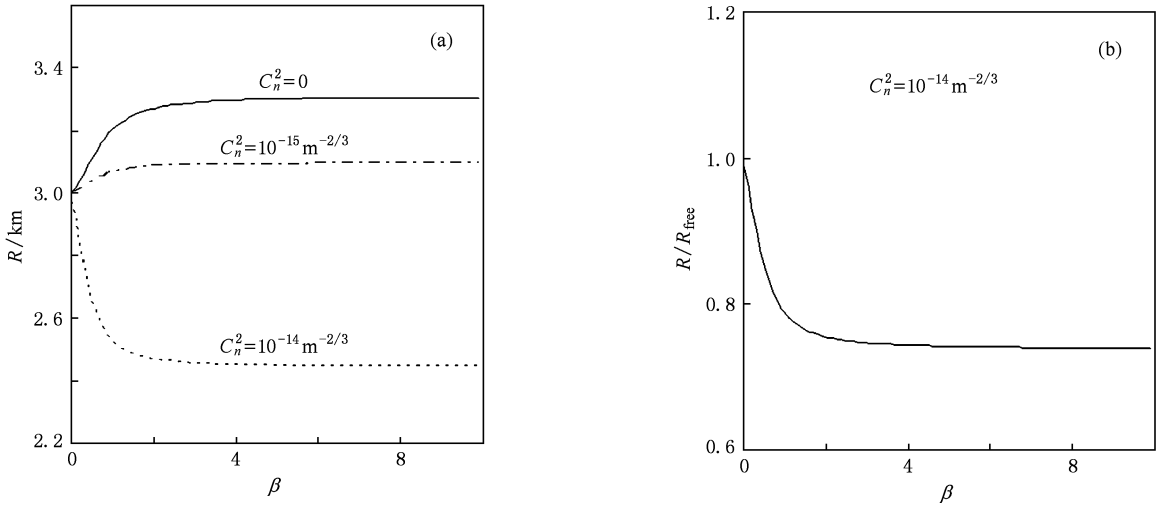


图3  $R$  和  $R/R_{\text{free}}$  随  $\beta$  的变化  $z=3 \text{ km}$ ,  $M=N=10$ . (a)  $R$  随  $\beta$  的变化, (b)  $R/R_{\text{free}}$  随  $\beta$  的变化

大而减小,即随着  $\beta$  的增大  $R$  受湍流的影响增大.

图4(a)和(b)分别为部分相干平顶光束的等效曲率半径  $R$  和相对等效曲率半径  $R/R_{\text{free}}$  随光束阶数  $M(N=M)$  的变化曲线. 由图4(a)可知,在自由空间中  $R$  随着  $M$  的增大而缓慢减小,而湍流使得其

变化更加缓慢. 由图4(b)可知,  $R/R_{\text{free}}$  随着  $M$  的增大而增大,即随着  $M$  的增大  $R$  受湍流的影响减小. 但是,不同  $M$  值的部分相干平顶光束的  $R$  受湍流影响的差别不大,例如图4(b)中,当  $M=1, 13$  时,分别有  $R/R_{\text{free}} \approx 0.79, 0.84$ .

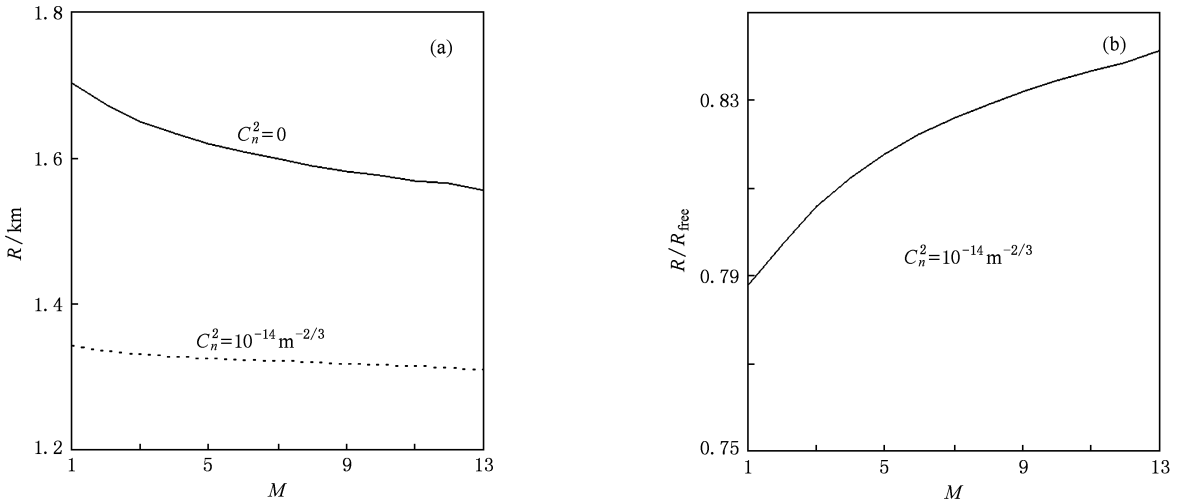


图4  $R$  和  $R/R_{\text{free}}$  随  $M$  的变化  $z=1 \text{ km}$ ,  $\beta=1$ ,  $M=N$ . (a)  $R$  随  $M$  的变化, (b)  $R/R_{\text{free}}$  随  $M$  的变化

## 4. 结 论

本文推导出了部分相干平顶光束在湍流大气中传输的等效曲率半径  $R$  的解析表达式,详细地研究了湍流对等效曲率半径  $R$  的影响. 研究表明,部分相干平顶光束的等效曲率半径  $R$  由折射率结

构常数  $C_n^2$ 、传输距离  $z$ 、光束相干长度  $\beta$  和光束阶数  $M(N)$  等因数共同确定. 湍流使得光束的  $R$  减小,但是只有当湍流足够强时沿光传输方向等效曲率半径极小值出现的位置才会改变. 在自由空间中或弱湍流中,  $R$  随着  $\beta$  的增大而增大;但是在强湍流中,  $R$  随着  $\beta$  的增大而减小.  $R$  随着  $M(N)$  的增大而缓慢减小. 若  $\beta$  越大、 $M$  越小,则  $R$  受湍

流的影响越大. 此外, 不同光束参数的部分相干平顶光束在自由空间中传输时远场均可以看作等效曲率半径为  $z$  的球面波. 湍流大气中远场处的等效

曲率半径与光束参数有关; 但随着传输距离的进一步增加, 光束参数对等效曲率半径的影响相对减弱.

- 
- [1] Gbur G, Wolf E 2002 *J. Opt. Soc. Am. A* **19** 1592
- [2] Dogariu A, Amarande S 2003 *Opt. Lett.* **28** 10
- [3] Shirai T, Dogariu A, Wolf E 2003 *J. Opt. Soc. Am. A* **20** 1094
- [4] Cai Y J, He S 2006 *Appl. Phys. Lett.* **89** 041117
- [5] Zhang E T, Ji X L, Lü B D 2009 *Chin. Phys. B* **18** 571
- [6] Roychowdhury H, Wolf E 2004 *Opt. Commun.* **241** 11
- [7] Ji X L, Zhang E T, Lü B D 2006 *Opt. Commun.* **259** 1
- [8] Lu W, Liu L, Sun J, Yang Q, Zhu Y 2007 *Opt. Commun.* **271** 1
- [9] Ji X L, Chen X W, Chen S H, Li X Q, Lü B D 2007 *J. Opt. Soc. Am. A* **24** 3554
- [10] Korotkova O, Salem M, Wolf E 2004 *Opt. Commun.* **233** 225
- [11] Salem M, Korotkova O, Dogariu A, Wolf E 2004 *Waves Rand. Med.* **14** 513
- [12] Eyyuboglu H T, Baykal Y, Cai Y 2007 *Appl. Phys. B* **89** 91
- [13] Ji X L, Huang T X, Lü B D 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 978 (in Chinese) [季小玲、黄太星、吕百达 2006 物理学报 **55** 978]
- [14] Wang T, Pu J X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6754 (in Chinese) [王涛、蒲继雄 2007 物理学报 **56** 6754]
- [15] Zhang E T, Ji X L, Lü B D 2009 *Chin. Phys. B* **18** 571
- [16] Chen X W, Ji X L 2010 *Chin. Phys. B* **19** 024203
- [17] Ji X L, Pu Z C 2010 *Chin. Phys. B* **19** 029201
- [18] Ricklin J C, Davidson F M 2002 *J. Opt. Soc. Am. A* **19** 1794
- [19] Seshadri S R 2000 *J. Opt. Soc. Am. A* **17** 780
- [20] Zahid M, Zubairy M S 1989 *Opt. Commun.* **70** 361
- [21] Li Y 2002 *Opt. Commun.* **206** 225
- [22] Mandel L, Wolf E 1995 *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [23] Siegman A E 1990 *Proc. SPIE* **1224** 2
- [24] Friberg A T, Turunen J 1988 *J. Opt. Soc. Am. A* **5** 713
- [25] Dan Y, Zhang B 2009 *Opt. Lett.* **34** 563
- [26] Weber H 1992 *Opt. Quantum Electron.* **24** 1027
- [27] Andrews L C, Phillips R L 1998 *Laser Beam Propagation Through Random Media* (Bellingham, Washington: SPIE Press)

# Effective radius of curvature of partially coherent flat-topped beam propagating through atmospheric turbulence\*

Ji Xiao-Ling<sup>†</sup>

(Department of Physics, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, China)

(Received 27 September 2009; revised manuscript received 26 October 2009)

## Abstract

The analytical expression for the effective radius of curvature  $R$  of a partially coherent flat-topped beam propagating through atmospheric turbulence is derived. It is shown that  $R$  decreases due to turbulence. However, position  $z_{\min}$  where  $R$  reaches its minimum will change due to the turbulence when the strength of turbulence is strong enough. The effective radius of curvature  $R$  increases with the increase of beam coherence parameter  $\beta$  when the strength of turbulence is weak, while  $R$  decreases with  $\beta$  increasing when the strength of turbulence is strong. The  $R$  decreases slowly with the increase of beam order  $M(N)$ . The  $R$  of partially coherent flat-topped beam with larger  $\beta$  and smaller  $M(N)$  is more sensitive to turbulence. In addition, in free space the wavefront of partially coherent flat-topped beam can be regarded as a spherical surface in the far-field, which is independent of the beam parameters. However, in turbulence the effective radius of curvature depends on the beam parameters in the near field and also in the far field.

**Keywords:** effective radius of curvature, turbulence, partially coherent flat-topped beam

**PACC:** 4260H, 4225, 9265

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60778048).

<sup>†</sup> E-mail: jixl100@163.com