

区间衍生粒子滤波器*

宁小磊[†] 王宏力 张 琪 陈连华

(第二炮兵工程学院, 西安 710025)

(2009 年 9 月 15 日收到; 2009 年 10 月 24 日收到修改稿)

针对非线性、非高斯环境下具有不确定动态模型参数的系统状态估计问题, 提出了一种新颖的区间衍生粒子滤波算法. 该算法利用区间滤波生成的重要性密度函数, 在系统状态转移概率密度的基础上, 融入最新的系统观测数据, 从而提高了对系统状态后验概率的逼近程度. 为了进一步提高算法的实时性, 提出一种类似光子衍射的粒子衍生过程, 进而缓解了滤波精度与运算量之间的矛盾. 通过陀螺/星敏感器组合定姿问题验证了该算法的有效性和鲁棒性.

关键词: 粒子滤波, 区间滤波, 粒子衍生, 姿态估计

PACC: 0250, 0260, 0547, 0290

1. 引 言

粒子滤波 (particle filter, 简称 PF) 通过将具有强大计算能力的 Monte Carlo 采样方法和 Bayes 推断结合起来, 从而实现了参数和状态的在线估计. 由于不受非线性、非高斯系统的限制, 目前被广泛应用于目标跟踪、故障检测、信号处理和导航与定位等领域^[1-4]. 然而, 在标准粒子滤波器的设计过程中存在运算量大和粒子退化等问题, 限制了其在工程领域中的实际应用.

为了解决粒子退化问题, 目前有两种比较好的途径^[2-4]: 选取好的重要性函数和进行重采样. 针对重要性函数的选择问题, Doucet 等^[2]已经证明 $p(\mathbf{x}_k/\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{z}_k)$ 是最优的重要性函数, 它能使重要性权值的方差最小. 然而, 从 $p(\mathbf{x}_k/\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{z}_k)$ 得到样本的困难程度几乎等同于直接从目标概率抽取样本, 因此很少采用^[1]. 通常的做法是选取状态转移概率 $p(\mathbf{x}_k/\mathbf{x}_{k-1})$ 作为重要性函数, 但用 $p(\mathbf{x}_k/\mathbf{x}_{k-1})$ 产生预测样本时未考虑系统最新观测, 因此产生的样本同真实后验产生的样本偏差较大, 导致滤波效果较差.

再看最优重要性函数 $p(\mathbf{x}_k/\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{z}_k)$, 虽然它并不实用, 但由其表示式可以得到启示, 产生下一个预测样本依赖于已有样本和最新观测^[1]. 因此, 为了既利用最近观测又便于抽样实现, 最直接的方法就是给

$p(\mathbf{x}_k/\mathbf{x}_{k-1})$ 融入最新观测数据的影响. 目前就如何将最新观测融入 $p(\mathbf{x}_k/\mathbf{x}_{k-1})$ 优化粒子采样过程已取得一些成果, 如扩展 kalman 粒子滤波算法 (extend kalman particle filter, 简称 EPF) 和基于样本 unscented 变换的 kalman 粒子滤波算法 (unscented kalman particle filter, 简称 UPF) 等^[4-8]. 但问题是 $p(\mathbf{x}_k/\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{z}_k)$ 的信息量由 $p(\mathbf{x}_k/\mathbf{x}_{k-1})$ 和 \mathbf{z}_k 两部分组成, 如果获得了 $p(\mathbf{x}_k/\mathbf{x}_{k-1})$ 的准确信息而忽略或没有 \mathbf{z}_k 的信息, 那么为了得到更优的重要性函数, 可以通过上述方法做到; 但另一种情况是, 已经给 $p(\mathbf{x}_k/\mathbf{x}_{k-1})$ 最大限度地融入最新观测的影响, 此时的观测 \mathbf{z}_k 也比较准确, 但状态转移 $p(\mathbf{x}_k/\mathbf{x}_{k-1})$ 不准确, 那么使用上述方法进行改进, 效果并不明显.

目前, 还未见相关文献对状态转移 $p(\mathbf{x}_k/\mathbf{x}_{k-1})$ 不准确时, 如何获取更优的重要性函数进行研究. 但这一情况在现实中却广泛存在, 因为任何一个实际系统都具有不同程度的不确定性. 本文考虑到区间滤波^[5,6]可以处理系统参数不确切已知或随时间变化的状态估计问题, 尝试使用区间滤波给粒子滤波生成更好的重要性函数以解决上述情形下普通 kalman 滤波器失效的问题, 并进行了仿真实验.

2. 区间 kalman 滤波

考虑如下动态离散方程^[9]:

* 装备预研基金 (批准号: 51309060302) 资助的课题.

[†] E-mail: ningxiaolei21@163.com

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \Phi_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \Gamma_{k-1} \mathbf{w}_{k-1}, \\ \mathbf{z}_k &= \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $\{\mathbf{x}_k, k \in n\}$ 为状态序列, $\mathbf{x}_k \in R^{n_x}$ (n_x 为状态维数, R^{n_x} 表示 n_x 维状态空间); $\{\mathbf{y}_k, k \in n\}$ 为观测序列, \mathbf{y}_k 在 \mathbf{x}_k 给定的前提下条件独立, $\mathbf{y}_k \in R^{n_y}$ (n_y 为系统观测维数, R^{n_y} 表示 n_y 维观测空间); $\Phi_k \in R^{n_x \times n_x}$, $\Gamma_k \in R^{n_x \times p}$ 和 $\mathbf{H}_k \in R^{m \times n_x}$ 为常数矩阵; $\{\mathbf{w}_k, k \in n\}$ 和 $\{\mathbf{v}_k, k \in n\}$ 分别为状态噪声和观测噪声序列, 它们满足

$$\begin{aligned} E[\mathbf{w}_k] &= 0, \text{Cov}[\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_j] = E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_j^T] = \mathbf{Q}_k \delta_{kj}, \\ E[\mathbf{v}_k] &= 0, \text{Cov}[\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j] = E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_j^T] = \mathbf{R}_k \delta_{kj}, \\ \text{Cov}[\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_j] &= E[\mathbf{w}_k \mathbf{v}_j^T] = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

其中, $i, j = 0, 1, \dots$, 如果 $i = j, \delta_{ij} = 1$; 如果 $i \neq j, \delta_{ij} = 0$.

对于方程(1), 如果矩阵 Φ_k, Γ_k 和 \mathbf{H}_k 是确定的, 系统的初始状态 \mathbf{x}_0 是高斯分布随机变量, 且噪声的统计特性均已知, 传统 kalman 滤波器 (KF) 可给出未知状态量的最优估计值; 如果矩阵 Φ_k, Γ_k 和 \mathbf{H}_k 含有不确定元素, 而噪声 \mathbf{w}_k 和 \mathbf{v}_k 也有不确定的方差, 那么方程(1)变为^[9]

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k^1 &= \Phi_{k-1}^1 \mathbf{x}_{k-1}^1 + \Gamma_{k-1}^1 \mathbf{w}_{k-1}^1, \\ \mathbf{z}_k^1 &= \mathbf{H}_k^1 \mathbf{x}_k^1 + \mathbf{v}_k^1. \end{aligned} \quad (3)$$

上述方程中不确定的量用区间矩阵表示为

$$\begin{aligned} \Phi_k^1 &= \Phi_k + \Delta \Phi_k = [\Phi_k - |\Delta \Phi_k|, \\ &\quad \Phi_k + |\Delta \Phi_k|], \\ \Gamma_k^1 &= \Gamma_k + \Delta \Gamma_k = [\Gamma_k - |\Delta \Gamma_k|, \\ &\quad \Gamma_k + |\Delta \Gamma_k|], \\ \mathbf{H}_k^1 &= \mathbf{H}_k + \Delta \mathbf{H}_k = [\mathbf{H}_k - |\Delta \mathbf{H}_k|, \\ &\quad \mathbf{H}_k + |\Delta \mathbf{H}_k|], \\ \mathbf{Q}_k^1 &= \mathbf{Q}_k + \Delta \mathbf{Q}_k = [\mathbf{Q}_k - |\Delta \mathbf{Q}_k|, \\ &\quad \mathbf{Q}_k + |\Delta \mathbf{Q}_k|], \\ \mathbf{R}_k^1 &= \mathbf{R}_k + \Delta \mathbf{R}_k = [\mathbf{R}_k - |\Delta \mathbf{R}_k|, \\ &\quad \mathbf{R}_k + |\Delta \mathbf{R}_k|], \end{aligned}$$

其中, 对所有的 $k, |\Delta \Phi_k| \in R^{n_x \times n_x}, |\Delta \Gamma_k| \in R^{n_x \times p}, |\Delta \mathbf{H}_k| \in R^{m \times n_x}, |\Delta \mathbf{Q}_k| \in R^{n_x \times p}$ 和 $|\Delta \mathbf{R}_k| \in R^{m \times m}$ 是系数矩阵不确定的变化范围.

把(3)式所示的系统称为区间系统. 类似标准 KF 方程的推导过程, 针对(3)式所示区间系统推导基于区间的滤波方程. 这种滤波算法可针对系统参数在一定范围变化的系统进行估计. 基于区间的 KF 方程可描述为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k,k-1}^1 &= \Phi_{k,k-1}^1 \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^1, \\ \hat{\mathbf{x}}_k^1 &= \hat{\mathbf{x}}_{k,k-1}^1 + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k^1 - \mathbf{H}_k^1 \hat{\mathbf{x}}_{k,k-1}^1), \\ \mathbf{K}_k^1 &= \mathbf{P}_{k,k-1}^1 (\mathbf{H}_k^1)^T [\mathbf{H}_k^1 \mathbf{P}_{k,k-1}^1 (\mathbf{H}_k^1)^T + \mathbf{R}_k]^1^{-1}, \\ \mathbf{P}_{k,k-1}^1 &= \Phi_{k,k-1}^1 \mathbf{P}_{k-1}^1 (\Phi_{k,k-1}^1)^T + \Gamma_{k,k-1}^1 \mathbf{Q}_{k-1}^1 (\Gamma_{k,k-1}^1)^T, \\ \mathbf{P}_k^1 &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^1 \mathbf{H}_k^1) \mathbf{P}_{k,k-1}^1 (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^1 \mathbf{H}_k^1)^T \\ &\quad + \mathbf{K}_k^1 \mathbf{R}_k^1 (\mathbf{K}_k^1)^T. \end{aligned} \quad (4)$$

从(4)式可看出, 区间 kalman 滤波公式与常规 kalman 滤波公式的结构形式完全相同, 只是运算变量变为区间向量或区间矩阵. 因此, (4)式的滤波结果为一组区间估计, 即每一时刻对区间系统状态量的估计结果均为一区间, 整个估计结果由 2 条边界曲线组成. 为了得到每一时刻确定的估计, 需要对滤波结果进一步处理, 如将估计的 2 个边界值简单平均、利用模糊理论进行处理及加权处理等^[9].

由于粒子滤波处理的是非线性、非高斯系统滤波问题, 因此需要将区间 kalman 滤波推广到非线性滤波上去, 最简单的是将区间非线性方程线性化, 使区间非线性滤波问题转化为区间线性滤波问题. 如用泰勒展开将方程线性化后得到的扩展区间 kalman 滤波与(4)式相同, 只是 $F(\hat{\mathbf{x}}_{k,k-1}) = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k,k-1}}, \mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}_{k,k-1}) = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k,k-1}}$ 变为雅克比矩阵.

3. 区间衍生粒子滤波算法

鉴于区间滤波对参数不确切已知或随时间变化的非线性系统具有较强的鲁棒性, 提出将区间滤波引入粒子滤波的重要性抽样中, 形成区间粒子滤波器 (interval particle filter, IPF). 基本思路是在系统初始化之后, 使用区间滤波更新所有新采样的粒子, 根据区间滤波的计算结果 (这时得到的均值和方差都是区间形式), 生成更好的重要性函数. 由于考虑了最新观测, 该重要性函数比先验分布更逼近真实概率分布, 从而能够有效抑制粒子退化和枯竭问题. 然而, IPF 在改善粒子滤波性能的同时, 带来了两个问题: 1) 在选取相同初始粒子数的情况下, IPF 在滤波精度上有所提高, 同时计算量也明显增加了; 2) 如何从生成的区间重要性函数中抽取样本. 下面给出这两个问题的解决方案.

分析 IPF 流程, 其计算量增加主要集中在使用区间滤波生成更好的重要性函数, 并从中抽取样本. 两者相对而言, 主要集中在生成更好的重要性

函数.为了解决 IPF 算法存在的上述问题,一个最直接的方法是减少更新粒子的时间,但减少粒子更新时间也就是要相应地减少更新的粒子数,这会使滤波精度下降.为此,提出一种新颖的类似光子衍射的粒子衍生 (particles diffracting) 方法.该方法在保证不减少参与状态估计粒子数的同时,却减少了区间滤波更新粒子的时间,从而达到提高算法实时性的目的.基本思想是减少区间滤波更新的粒子,相应地增加从重要性函数中抽取的粒子,这样便减少了粒子更新时间(这时参与状态估计的粒子数并没有减少).虽然在这个过程中,也增加了粒子抽取时间,但相比于更新一个粒子,从重要性函数中抽取一个粒子花费的时间要少得多(高斯分布采样法,如目前较常用且快速的 Ziggurat 算法,抽取 1 个粒子,需 4 次乘法和 4 次加法;区间 kalman 滤波更新一个粒子需迭代一次(4)式,此式中甚至含有矩阵求逆,很明显其运算量远远大于 4 次乘法),把这种基于粒子衍生的区间粒子滤波器称为区间衍生粒子滤波器(interval diffracted particle filter, IDPF).IDPF 通过减少粒子更新的时间达到提高实时性的目的,同时没有减少参与状态估计的粒子数,因此, IDPF 在维持与 IPF 相当估计精度的条件下降低了算法运算量.

3.1. 算法的总体思路

在 IPF 算法中,仅从每个区间重要性函数中抽取一个粒子代替更新之前的粒子,这其实是对已有信息资源的浪费.因为区间重要性函数融合了先验、转移和最新观测等信息,采样一次并没有充分利用这个信息资源族.为什么从每个区间重要性函数中仅能抽取一个粒子呢?经过分析,原来 IPF 中的每个粒子要“独立”地完成采样—预测—权值更新—输出”这一循环迭代过程.如果从重要性函数中抽取多个粒子将无法完成权值更新过程,导致迭代失败.本文提出的 IDPF 算法成功解决了 IPF 算法的这个瓶颈,实现了从一个重要性函数中抽取多个粒子,下面叙述设计 IDPF 的关键点.

第一步,确定参与更新的粒子数 N . 确定用于生成一簇区间重要性函数的初始粒子数,即滤波所需的重要性函数的个数.

第二步,衍生粒子.从生成的 N 个区间重要性函数中的每个区间重要性函数中抽取 M^i (i 表示第 i 个区间重要性函数, M 表示从第 i 个区间重要性函

数中抽样的粒子数)个粒子.同时将对应的更新前的粒子权值进行分裂,分配给抽取的 M^i 个粒子(为简单起见,平均分配).这样就得到一个新粒子集 $\{\mathbf{x}_k^j, w_k^i/M^i, i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M^i\}$.上述粒子更新和抽取过程类似于光子的衍射,因此形象地称其为“粒子衍生”过程,这也是衍生粒子滤波名称的由来.但区间滤波生成的重要性函数与普通重要性函数是不同的,区间滤波生成的重要性函数是一簇均值和方差都以区间形式出现的高斯分布.如何从这一族高斯型区间重要性函数中抽样是区间衍生粒子滤波算法的关键技术之一.这里给出两种解决方案.

方案一 标称值法.对区间滤波结果(区间形式的均值和方差)作进一步处理,求出“标称值”.这样区间重要性函数就变为普通重要性函数.

方案二 直接法,即直接从区间重要性函数中抽取粒子.方法是:首先,按照需要抽取的粒子数 M^i ,将区间滤波结果 $[\underline{\mathbf{x}}_{k,k}^i, \bar{\mathbf{x}}_{k,k}^i]$ 分成 M^i 个小区间 $[\underline{\mathbf{x}}_{k,k}^{i1}, \bar{\mathbf{x}}_{k,k}^{i1}], [\underline{\mathbf{x}}_{k,k}^{i2}, \bar{\mathbf{x}}_{k,k}^{i2}], \dots, [\underline{\mathbf{x}}_{k,k}^{iM^i}, \bar{\mathbf{x}}_{k,k}^{iM^i}]$,在各小区间上任取一点 $\hat{\mathbf{x}}_{k,k}^{ij}$ ($\underline{\mathbf{x}}_{k,k}^{ij} \leq \hat{\mathbf{x}}_{k,k}^{ij} \leq \bar{\mathbf{x}}_{k,k}^{ij}$),作为一个重要性函数的均值(简单起见,可以选区间初始值、区间均值或区间结束值).这样从一个区间滤波结果便可以得到 M^i 个以 $\hat{\mathbf{x}}_{k,k}^{ij}$ ($j = 1, 2, \dots, M^i$) 为均值的高斯型重要性函数;然后,从这 M^i 个高斯重要性函数抽取样本进行估计.需要补充的是,根据需要,从这 M^i 个高斯型重要性函数抽取的样本数可以不限一个.也就是说经过这样的处理,问题又回归到粒子衍生上去了.其进一步的阐释如图 1 所示.

直接法中还有一个问题没有解决,即如何匹配 M^i 个以 $\hat{\mathbf{x}}_{k,k}^{ij}$ ($j = 1, 2, \dots, M^i$) 为均值的高斯型重要性函数的方差.我们的想法是,根据有效粒子数的多少来确定.如果有效粒子数比较多,也就是说大部分粒子都分布在真实状态的周围,此时选择较大的方差,以增加粒子集的多样性.因为粒子的权值与它和真实值的接近程度成正比,有效粒子数比较多说明与真实值接近的粒子多,这时匹配较大的方差,将不会引起大量的粒子退化,从而保证了算法的跟踪能力和计算精度;相反,如果有效粒子数比较少,这就意味着大部分粒子没有分布在真实状态的周围,此时选择较小的方差,以保证粒子集中的有足够的有效粒子.其实,在这种情况下,可以从大权值粒子生成的重要性函数中多抽取几个粒子,以增加有效粒子数,适当地减少从小权值粒子生成的

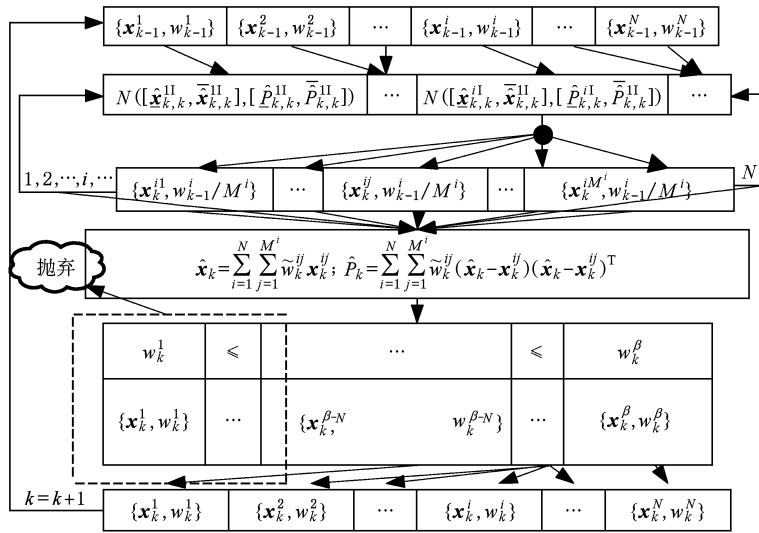


图1 区间衍生粒子滤波过程图示 衍生—排序—恢复, $\beta = \sum_{i=1}^N M^i$

重要性函数中抽取粒子(甚至不抽取),以降低粒子退化的概率,从而保证有充分的支持粒子集描述后验概率密度。

第三步,输出结果.对新粒子集 $\{\mathbf{x}_k^{ij}, w_k^i/M^i, i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M^i\}$ 进行权值更新、归一化后,输出估计结果(均值、方差和后验概率等)。这时参与状态估计的粒子明显多于更新时的粒子。因此,下一步需要解决的问题是如何使衍生后的粒子数 $\sum_{i=1}^N M^i$ 恢复到粒子更新时的粒子数 N 。

第四步,权值恢复.对参与输出估计的所有粒子 $\{\mathbf{x}_k^{ij}, \tilde{w}_k^i, i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M^i\}$ 按照权值递增的顺序进行排队后,参照初始预测样本容量保留前面的 N 个高权值粒子,抛弃剩余的所有低权值粒子。此时,留下的粒子数比参与估计过程的粒子少,它们已经不能满足归一化权值的关系式 $\sum_{i=1}^N \tilde{w}_k^i = 1$, 因此还需要对保留下来的这些粒子重新进行权值归一化处理,称这个过程为“权值恢复”。具体做法是:对保留下来的每个粒子的权值乘以对应的衍生粒子数 M^i , 然后对处理后的粒子集权值重新归一化,得到新的粒子集 $\{\mathbf{x}_k^i, \tilde{w}_k^i, i = 1, 2, \dots, N\}$, 为下一时刻的迭代做准备。

3.2. 区间衍生粒子滤波算法

综上所述,区间衍生粒子滤波算法的具体步骤可归纳如下:

步骤1 衍生重要性抽样.在 $k-1$ 时刻,利用最新的系统观测对粒子集 $\{\mathbf{x}_{k-1}^i, \tilde{w}_{k-1}^i, i = 1, 2, \dots, N$ 中的每个粒子进行区间滤波,得到每个粒子的均值和方差的区间估计 $[\underline{\mathbf{x}}_{k,k}^i, \bar{\mathbf{x}}_{k,k}^i]$ 和 $[\underline{\mathbf{P}}_{k,k}^i, \bar{\mathbf{P}}_{k,k}^i]$, 此时重要性函数由一簇以 $[\underline{\mathbf{x}}_{k,k}^i, \bar{\mathbf{x}}_{k,k}^i]$ 为均值、 $[\underline{\mathbf{P}}_{k,k}^i, \bar{\mathbf{P}}_{k,k}^i]$ 为方差的区间高斯分布构成,即

$$q(\mathbf{x}_k/\mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{z}_{1:k})$$

$$= N(\mathbf{x}_k^i, [\underline{\mathbf{x}}_{k,k}^i, \bar{\mathbf{x}}_{k,k}^i], [\underline{\mathbf{P}}_{k,k}^i, \bar{\mathbf{P}}_{k,k}^i]).$$

从上式定义的重要性函数中无法直接产生预测样本。这时,可以求 $[\underline{\mathbf{x}}_{k,k}^i, \bar{\mathbf{x}}_{k,k}^i]$ 和 $[\underline{\mathbf{P}}_{k,k}^i, \bar{\mathbf{P}}_{k,k}^i]$ 的“标称值” $\hat{\mathbf{x}}_{k,k}^i$ 和 $\hat{\mathbf{P}}_{k,k}^i$ 。再从以 $\hat{\mathbf{x}}_{k,k}^i$ 为均值、以 $\hat{\mathbf{P}}_{k,k}^i$ 为方差的一簇高斯型重要性函数中的每个重要性函数中抽取粒子 $\{\mathbf{x}_k^i\}_1^{M^i} \sim N(\mathbf{x}_k^i, \hat{\mathbf{x}}_{k,k}^i, \hat{\mathbf{P}}_{k,k}^i)$, 并对 $k-1$ 时刻的每个粒子的权值 $\{\tilde{w}_{k-1}^i\}_1^N$ 进行分裂 $\{w_{k-1}^i/M^i\}_1^N = \{w_{k-1}^{ij}, i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M^i\}$, 得到预测样本集 $\{\mathbf{x}_k^{ij}, (w_{k-1}^i/M^i), i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M^i\} \sim N(\mathbf{x}_k^i, \hat{\mathbf{x}}_{k,k}^i, \hat{\mathbf{P}}_{k,k}^i)$ 。或者,还可以将区间滤波结果 $[\underline{\mathbf{x}}_{k,k}^i, \bar{\mathbf{x}}_{k,k}^i]$ 分成 M^i 个小区间 $[\underline{\mathbf{x}}_{k,k}^{i1}, \bar{\mathbf{x}}_{k,k}^{i1}], [\underline{\mathbf{x}}_{k,k}^{i2}, \bar{\mathbf{x}}_{k,k}^{i2}], \dots, [\underline{\mathbf{x}}_{k,k}^{iM^i}, \bar{\mathbf{x}}_{k,k}^{iM^i}]$, 在各小区间上任取一点 $\hat{\mathbf{x}}_{k,k}^{ij} (\underline{\mathbf{x}}_{k,k}^{ij} \leq \hat{\mathbf{x}}_{k,k}^{ij} \leq \bar{\mathbf{x}}_{k,k}^{ij})$, 作为高斯型重要性函数的均值,方差按总体思路所述原则进行匹配。然后,从生成的这个重要性函数中抽取样本 $\{\mathbf{x}_k^{ij}, (w_{k-1}^i/M^i), i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M^i\} \sim N(\mathbf{x}_k^i, \hat{\mathbf{x}}_{k,k}^{ij}, \hat{\mathbf{P}}_{k,k}^i)$, 进行计算。

新样本集由于充分利用了最新系统观测,因而可以改进粒子的抽样精度.

步骤 2 计算权值.

$$w_k^{ij} = w_{k-1}^{ij} p(\mathbf{z}_k / \mathbf{x}_k^{ij}) p(\mathbf{x}_k^{ij} / \mathbf{x}_{k-1}^{ij}) \times q(\mathbf{x}_k^{ij} / \mathbf{x}_{k-1}^{ij}, \mathbf{z}_k). \quad (5)$$

步骤 3 归一化权值.

$$\tilde{w}_k^{ij} = w_k^{ij} / \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M^i} w_k^{ij}. \quad (6)$$

步骤 4 结果输出.

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M^i} \tilde{w}_k^{ij} \mathbf{x}_k^{ij}, \quad (7)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_k = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M^i} \tilde{w}_k^{ij} (\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k^{ij}) (\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k^{ij})^T, \quad (8)$$

$$p(\mathbf{x}_k / \mathbf{z}_k) \approx \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M^i} \tilde{w}_k^{ij} \delta(\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k^{ij}). \quad (9)$$

步骤 5 优选粒子. 对 $\sum_{i=1}^N M^i$ 个粒子按照权值进行排序, 选出前面的 N 个粒子, 抛弃剩余的粒子.

步骤 6 权值恢复. 对保留下来的 N 个粒子所对应的在步骤 3 计算出的粒子权值分别乘以 M^i 后, 重新归一化

$$\tilde{w}_k^i = \tilde{w}_k^i / \sum_{i=1}^N w_k^i. \quad (10)$$

步骤 7 重采样. 如果有效样本数 N_{eff} 小于阈值, 对粒子进行重采样, 即保留或复制权值较大的粒子, 删除权值较小的粒子, 得到等权值样本集 $\{\mathbf{x}_k^i, 1/N, i = 1, \dots, N\}$.

3.3. 衍生粒子有效性分析

增加粒子数可以提高粒子滤波器的性能, 从这个角度可以对 IDPF 的有效性进行分析, 即证明 IPF 与 IDPF 这两种抽样方法生成的粒子是等效的. 如果此命题得证, 在抽取相同的粒子时, IDPF 抽样方法相对于 IPF 抽样方法使用的时间少, 就提高了运行速度. 同样, 在一定运行速度的要求下, IDPF 抽样方法可以抽取更多的粒子参与状态估计, 就提高了滤波精度.

定理 IPF 和 IDPF 得到的抽样粒子集等效.

证明 选择相同的粒子数参与状态估计, 即

$$N = \sum_{i=1}^{N'} M^i, \text{ 其中, } N \text{ 为 IPF 选取的更新粒子数; } N' \text{ 为 IDPF 选取的更新粒子数.}$$

由上述分析可知, 这两种方法得到的参与状态估计的粒子都融入了状态转移 $p(\mathbf{x}_k / \mathbf{x}_{k-1})$ 和最新观测信息, 从这个方面说它

们并没有不同, 都比直接从状态转移 $p(\mathbf{x}_k / \mathbf{x}_{k-1})$ 抽取的粒子更接近直接从真实后验分布抽取的粒子. 不同的是部分粒子来源的重要性函数不同, 这可以解释为粒子更新前的新采样抽取了不同的粒子, 那么经区间滤波器更新后得到的均值和方差(区间型重要性函数)一般也不同, 但差别不会太大. 这种解释其实是合理的, 因为在抽取粒子时是随机的. 这时就可以把 IDPF 不同于 IPF 参与状态估计的粒子等效为新采样时刻抽取了不同的样本得到的, 这就是说它们可以看成经过了区间滤波器的更新, 然后从生成的区间型重要性函数中抽取的, 即这部分粒子来自新采样时刻抽取了不同的样本得到的不同的重要性函数, 所以它们不会影响滤波效果.

当然, 选择不同的粒子数参与状态估计, 即

$$N \neq \sum_{i=1}^{N'} M^i, \text{ 上述结论也成立.}$$

综上所述, 命题得证.

3.4. 算法有效性分析

由前分析知, IDPF 不减少参与状态估计的粒子数, 且每个粒子都融入了最新观测的影响, 因此, 在选取相同粒子参与状态估计的情况下, IDPF 获得了滤波精度和算法实时性的双重提高; 在一定运行速度的要求下, IDPF 可以抽取更多的粒子参与状态估计来提高滤波精度.

IDPF 根据粒子权值大小可以自适应地调整衍生粒子数(对应大权值粒子的重要性函数, 衍生的粒子多; 对应小权值粒子的重要性函数, 衍生的粒子少), 更增加了有效粒子数, 从而可以有效抑制粒子退化问题.

IDPF 根据有效粒子数的多少自适应地对每个区间的重要性函数匹配方差, 当有效粒子数较多时, 匹配较大的方差; 当有效粒子数较少时, 匹配较小的方差. 这样通过匹配大方差增加了粒子的多样性, 从而可以有效抑制粒子枯竭问题.

区间 kalman 滤波是一种处理参数不确切已知或随时间变化的非线性系统的有效方法, 因此, IDPF 具有比一般粒子滤波改进算法更强的鲁棒性.

4. 算法性能仿真

4.1. 问题描述

以陀螺/星敏感器组合定姿问题来验证所提算

法的有效性. 基于 Rodrigues 参数 (RPs) 描述的姿态估计模型如下^[10]:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t) + \mathbf{I}(\mathbf{x}, t) \mathbf{w}(t), \quad (11)$$

其中, $\mathbf{x} = [\Phi_E, \Phi_N, \Phi_U, \omega_{bE}, \omega_{bN}, \omega_{bU}, \omega_{rE}, \omega_{rN}, \omega_{rU}]^T$, $\Phi = [\Phi_E, \Phi_N, \Phi_U]^T$ 为东、北、天方向的姿态 RPs; $\omega' = \omega + \omega_b + \omega_r + n_g$ 为陀螺输出角速率, ω' 为陀螺的输出值, ω_b 为陀螺的随机常值漂移, ω_r 为相关漂移并设其一阶马尔科夫过程, 且 $\dot{\omega}_r = -D_r \omega_r + n_r$, D_r 为相关系数, n_g, n_r 为噪声;

$$f(\mathbf{x}, t) = \left[\frac{1}{2}(\omega + \Phi \times \omega + (\Phi \cdot \omega)\Phi), -D_r \omega_r, 0 \right];$$

$$\mathbf{I}(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}((I_{3 \times 3}) + [\Phi \times] + \Phi \Phi \Phi^T) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

($[\Phi \times]$ 为 Φ 的反对称矩阵); $w(t)$ 为系统噪声.

基于星光的姿态观测采用 QUEST 算法, 该方法可直接得到姿态 RPs 参数 Φ , 将 Φ 作为观测, 可得观测方程

$$\mathbf{z}_k = \Phi = \mathbf{H} \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \quad (12)$$

其中, $\mathbf{H} = [I_{3 \times 3}, \mathbf{0}_{3 \times 3}]$, \mathbf{v}_k 为观测噪声.

初始仿真条件见表 1.

表 1 初始仿真条件

陀螺常值漂移/(°/h)	0.05
陀螺随机漂移/(°/h)	0.01
陀螺相关时间常数/s	3600
加速度计零偏/g	1×10^{-4}
加速度计零偏相关时间常数/s	1800
俯仰、方向、滚动误差角/(')	20, 30, 60

4.2. 陀螺/星敏感器组合定姿系统区间化

陀螺和加速度计是惯性单元的关键器件. 因此, 建立精确的陀螺随机漂移模型和加速度计零偏模型十分重要. 然而, 在实际工程应用中陀螺和加速度计的特性是很复杂的^[9], 所以系统的模型参数会随着系统的运行发生变化. 例如, 由于载体运行速度的变化和环境温度变化等方面的原因, 其一阶马尔科夫模型的相关时间常数是不确定的, 即

$$\dot{\varepsilon} = \tau_1^1 \varepsilon + \mathbf{w}_\varepsilon, \quad (13)$$

$$\dot{\eta} = \tau_2^1 \eta + \mathbf{v}_\eta, \quad (14)$$

这里, ε 代表陀螺随机漂移, η 代表加速度计零偏. 我们认为 τ_1, τ_2 在一定范围 (区间) 内随机变化, 并

将它们看作区间参数

$$\tau_1^1 = \tau_1 + \Delta\tau_1 = [\tau_1 - |\Delta\tau_1|, \tau_1 + |\Delta\tau_1|], \quad (15)$$

$$\tau_2^1 = \tau_2 + \Delta\tau_2 = [\tau_2 - |\Delta\tau_2|, \tau_2 + |\Delta\tau_2|], \quad (16)$$

式中, $\tau_1 = -\frac{1}{T_g}, \tau_2 = -\frac{1}{T_a}$. 过程噪声 w_k 的协方差阵由如下关系决定:

$$Q = 2\tau_i^1 \sigma \quad (i = 1, 2). \quad (17)$$

由于组合系统依赖于 τ_1 和 τ_2 , 这样, 系统的模型可以描述为一个区间系统.

4.3. 仿真结果与分析

取陀螺仪和加速度计随机漂移反相关时间参数的变化区间为

$$\tau_1^1 = [2.0 \times 10^{-4}, 3.0 \times 10^{-4}], \quad (18)$$

$$\tau_2^1 = [5.0 \times 10^{-4}, 6.0 \times 10^{-4}]. \quad (19)$$

仿真中用计算机产生三个不共线向量^[10], 来模拟三个星光观测向量, 并将其单位化, 其单位向量的观测误差分别设置为 $\sigma_1 = 0.01, \sigma_2 = 0.02, \sigma_3 = 0.05$; 观测更新周期为 0.5 s; 滤波周期为 0.5 s; 仿真时间为 1200 s. 根据上述初始设置条件, 在 Matlab7.0 环境下进行编程运行.

图 2 和图 3 给出了采用 IDPF 算法进行估计时的姿态估计误差 (此模型为混合线性/非线性系统, 仿真时采用 Rao-Blackwellization 技术, 使用 IDPF 估计非线性状态分量; 使用 KF 估计线性状态分量). 图 4 给出了粒子数目的选取和姿态估计误差之间的

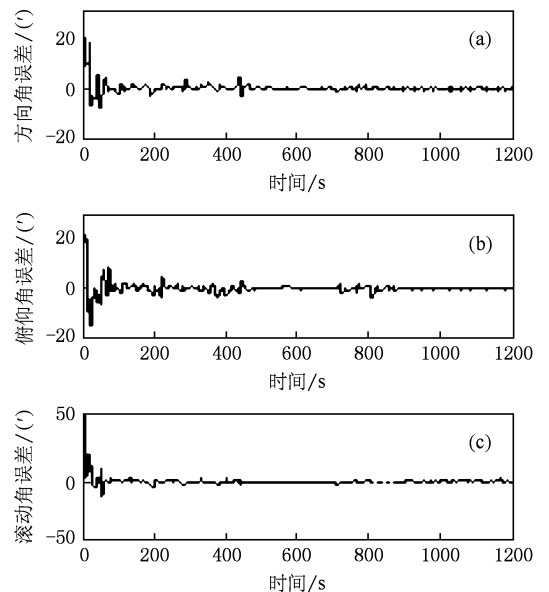


图 2 IDPF 姿态角估计误差 (a) 方向角估计误差, (b) 俯仰角估计误差, (c) 滚动角估计误差

关系,图中,1,2和3分别代表粒子数取100,200,600.

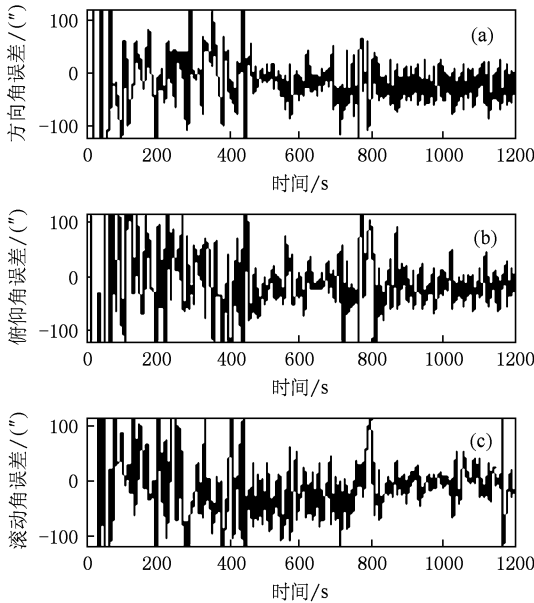


图3 IDPF 姿态角估计误差的局部放大 (a)方向角估计误差, (b)俯仰角估计误差,(c)滚动角估计误差

由图2和图3可以看出,IDPF在陀螺/星敏感器姿态估计中是可行的,滤波结果在动态条件下均比较稳定;IDPF可以应用于系统参数在一定范围内变化的动态模型,具有较强的鲁棒性.

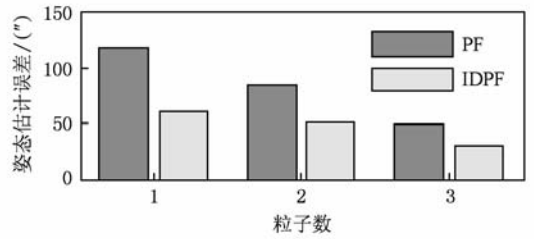


图4 粒子数与姿态角估计误差的关系

由图4可以看出,增加粒子数可以大幅提高粒子滤波(PF)和IDPF的估计精度,但是在实时组合导航系统中,当粒子数目的选取受到限制时,IDPF能在粒子数目比较少的情況下取得比PF更好的滤波效果.

5. 结 论

针对具有不确定参数的系统模型,通过将模型描述为区间系统,给出了基于区间滤波重要性采样方法的粒子滤波设计思路.同时,分析了区间衍生粒子滤波算法的有效性.最后,通过陀螺/星敏感器组合定姿进行了仿真计算,验证了该算法具有良好的稳定性,为设计高效鲁棒的粒子滤波器进行了初步探讨.

[1] Du Z C, Tang B, Li K 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 999 (in Chinese) [杜正聪、唐斌、李可 2006 物理学报 **55** 999]
 [2] Doucet A, Gordon N J, Krishnamurthy V 2001 *IEEE Trans. Signal Processing* **49** 613
 [3] Wang W F, Xiong R, Zhu J 2009 *Acta Automatica Sinica* **35** 1185 (in Chinese) [王文斐、熊蓉、褚健 2009 自动化学报 **35** 1185]
 [4] Cheng S Y, Zhang J Y 2008 *Acta Electronica Sinica* **36** 500 (in Chinese) [程水英、张剑云 2008 电子学报 **36** 500]
 [5] Chang C, Ansari R 2005 *IEEE Signal Processing Lett.* **12** 242

[6] Xiao F H, Yan G R 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 396 (in Chinese) [肖方红、闫桂荣 2004 物理学报 **53** 396]
 [7] Dong L F, Cheng J Y 2002 *Chin. Phys.* **11** 419
 [8] Xie W X, Xu W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1105 (in Chinese) [谢文贤、徐伟 2005 物理学报 **54** 1105]
 [9] Chen G, Wang J, Shieh L S 1997 *IEEE Trans. Aerospace Electron.* **33** 250
 [10] Wang X G, Li A H, Xu H L 2009 *Systems Engineering and Electronics* **31** 170 (in Chinese) [王新国、李爱华、许化龙 2009 系统工程与电子技术 **31** 170]

Interval diffracted particle filter^{*}

Ning Xiao-Lei[†] Wang Hong-Li Zhang Qi Chen Lian-Hua

(*The Second Artillery Engineering College, Xi'an 710025, China*)

(Received 15 September 2009; revised manuscript received 24 October 2009)

Abstract

A new particle filter based on interval filter and particle diffraction is proposed for the on-line estimation of non-Gaussian and nonlinear system with uncertain dynamics modeling. This algorithm computes the more accurate importance density function, which integrates the latest observations into the system state transition density, so that the approximation to the system posterior density is improved. At the same time, the workload of calculation is reduced by treating particle diffraction like light diffraction. A simulation experiment on the SINS/CNS (strap-down inertial navigation system/celestial navigation system) attitude estimation shows the effectiveness and robustness of the improved algorithm.

Keywords: particle filter, interval filter, particle diffraction, attitude estimation

PACC: 0250, 0260, 0547, 0290

^{*} Project supported by the Arming Pre-Research Foundation of China (Grant No. 51309060302) .

[†] E-mail: ningxiaolei21@163.com