

二维映射神经元模型中的相干双共振*

汪茂胜[†] 黄万霞 崔执凤

(安徽师范大学物理系, 芜湖 241000)

(2009 年 10 月 23 日收到; 2009 年 11 月 28 日收到修改稿)

在具有稳定次阈值振荡特性的二维映射神经元模型中, 研究了在没有外界输入信号时噪声对体系动力学的影响. 通过数值计算发现了当体系的确定性动力学处于静息状态时, 噪声可以诱导出神经元膜电位的随机振荡, 而且随着噪声强度的变化, 这种振荡的相干性具有两个极大值. 另外我们还研究了当体系的确定性动力学处于稳定次阈值振荡及神经脉冲状态时的噪声效应, 结果表明噪声对体系动力学的影响与其确定性动力学的分岔特性密切相关.

关键词: 二维映射神经元模型, 相干双共振, 高斯白噪声, 次阈值振荡

PACC: 0547, 8730C

1. 引 言

在非线性体系中噪声可以导致各种各样有趣且违反直觉的现象^[1-7]. 其中最为著名的就是随机共振 (stochastic resonance, SR) 现象^[1,2], 它是指适当强度的噪声可以使非线性体系对微弱信号的响应达到极大值的现象. 因此, 人们可以利用 SR 原理, 从噪声背景中检测出弱信号, 甚至能够利用噪声来增加输出的信噪比 (signal-to-noise ratio, SNR), 提高输出信号的清晰度. 随着研究的进展, SR 的概念被大大地扩展, 其中较为显著是, 在没有外信号输入的条件下, 仅凭噪声就可以诱导和增强非线性体系的随机振荡. 为了区别于有外信号输入的 SR, 这种现象通常被称为自治随机共振 (autonomous stochastic resonance, ASR)、相干共振 (coherence resonance, CR) 或内信号随机共振 (internal signal stochastic resonance, ISSR)^[8-10]. 此外, 2002 年 Pikovsky 等^[11] 首先发现了类似于 SR 的体系尺度共振 (system-size resonance, SSR) 现象: 含有噪声的耦合非线性体系, 存在最佳的耦合单元数目, 使得体系给出最有序的输出, 这也是 SR 概念的一个重要推广.

神经元体系中的 SR 和 CR 现象是神经动力学

研究的一个值得强调的重要方面. 神经元是神经系统的基本处理单元, 它在产生动作电位的生物学过程中不可避免地要受到各种噪声的影响. 例如细胞膜上离子通道打开和关闭的随机性、化学突触释放神经递质的随机性以及其它神经元的随机突触输入电流等. 近年来, 人们在很多神经体系中研究了噪声的效应, 例如蟋蟀和蝙蝠利用 SR 原理增强感受能力^[12,13], 可激发 FitzHugh-Nagumo (FHN) 体系中的 CR^[9]、二维映射神经元模型中的 CR^[14] 和频率依赖的 SR^[15], 以及耦合的随机神经元体系中的 SSR^[16,17], 在钙离子振荡模型还发现了双重 SSR^[18,19]. 这些结果都表明, 噪声在神经元系统中扮演着重要的角色.

在本文中, 我们采用具有稳定次阈值振荡特性的二维映射神经元模型, 研究了在没有外界输入信号的情况下, 噪声对体系的振荡行为的影响. 通过计算机模拟, 我们发现了在体系的确定性动力学处于稳定定态的状态下, 噪声可以诱导出神经元膜电位的随机振荡, 而且随着噪声强度的变化, 这种振荡的相干性具有两个极大值, 即出现了相干双共振现象. 文中还研究了控制参数对体系的动力学的调控作用, 并结合该神经元模型的分岔特性定性地解释了相干双共振现象的形成机理.

* 国家自然科学基金 (批准号: 10674002)、安徽省高校省级自然科学研究重点项目 (批准号: KJ2010A129) 和安徽省高校青年教师科研资助计划 (批准号: 2008jq1055) 资助的课题.

[†] E-mail: maosheng@ustc.edu

2. 模型描述及体系的分岔特性

Rulkov^[20]于2002年最早提出了二维映射神经元模型. 当模型中的控制参数取不同值时, 此模型可以分别处于静息(silence)、连续神经脉冲(continuous spikes)和爆发式神经脉冲(bursts of spikes)等不同的动力学状态. 2004年, Shilnikov和Rulkov^[21]对这个二维映射神经元模型做了一些修改, 修改后的模型在取适当的控制参数值时具有稳定的次阈值振荡行为. 修改后的二维映射神经元模型的动力学方程为

$$x_{n+1} = f_{\alpha}(x_n, y_n + \beta), \tag{1a}$$

$$y_{n+1} = y_n - \mu(x_n + 1 - \sigma), \tag{1b}$$

这里 x 表示神经元的跨膜电压, y 表示神经元细胞膜上离子通道的门控离子(通常指 Ca^{2+})的浓度, 下标 n 表示迭代序数. 参数 α, σ 和 $0 < \mu \ll 1$ 决定了单个神经元的动力学行为. 由于参数 μ 是一个很小的量, 所以 x 和 y 分别是快速动力学变量和慢速动力学变量. β 和 σ 描述外部对系统的影响, 也可以表示外界的刺激电流, σ 也常被用来作为控制单个神经元动力学行为的参量. 其中非线性函数 $f_{\alpha}(x_n, y_n + \beta)$ 是一个分段函数, 具体形式如下:

$$f_{\alpha}(x, y + \beta) = \begin{cases} -\alpha^2/4 - \alpha + y + \beta & (x < -1 - \alpha/2), \\ \alpha x + (x + 1)^2 + y + \beta & (-1 - \alpha/2 \leq x \leq 0), \\ y + 1 + \beta & (0 < x < y + 1 + \beta), \\ -1 & (x \geq y + 1 + \beta). \end{cases} \tag{2}$$

我们选取 σ 作为控制参数, 研究了在无外界刺激电流, 即 $\beta = 0.0$ 的情况下, 体系的确定性动力学行为. 模拟结果表明, 随着控制参数 σ 的变化, 体系可分别处于静息状态、次阈值振荡(subthreshold oscillations)状态和神经脉冲(spikes)状态. 体系的分岔特性如图1(a)所示, 体系在 $\sigma \approx -0.0050$ 处发生 Andronov-Hopf 分岔^[21], 体系动力学由稳定的定态转变为稳定的次阈值振荡. 随着

σ 的进一步增大, 体系则由稳定的次阈值振荡再次转变为神经脉冲状态. 我们这里所作的分岔图和文献[21]中的图3一致, 关于此分岔图的产生机理此文献中也有介绍. 图1(b)给出了体系在不同控制参数 σ 下对应的相空间轨迹, 当 $\sigma < -0.0050$ 时, 体系处于稳定定态; 当 $-0.0050 < \sigma < 0.0$ 时, 小幅振荡出现, 当 $\sigma > 0.0$ 时, 体系出现大幅的振荡.

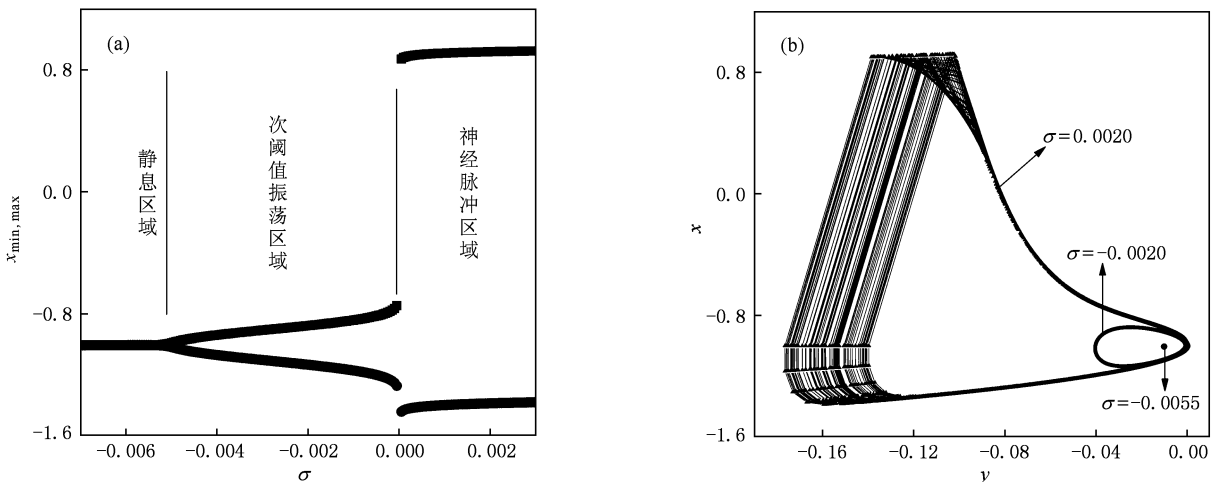


图1 不同控制参数 σ 下体系的确定性动力学特性 $\alpha = 0.99, \beta = 0.0, \mu = 0.02$. (a) 体系的确定性动力学随控制参数 σ 的分岔图, (b) 体系的控制参数处于分岔图中三个不同区域时对应的相空间轨迹

3. 相干双共振现象

为了研究噪声对此映射神经元模型的动力学的影响,我们在上面的方程中加入噪声项,而外界刺激电流 β 仍然取为 0.0,即考虑没有外界输入信号的情况,此时的动力学方程变为

$$x_{n+1} = f_{\alpha}(x_n, y_n + \beta) + \xi_n, \quad (3a)$$

$$y_{n+1} = y_n - \mu(x_n + 1 - \sigma), \quad (3b)$$

这里 ξ_n 是均值为 0, 方差为 S 的高斯白噪声, S 的大小也表征了噪声的强弱, 可视为噪声强度.

首先,我们研究了静息状态区域内靠近分岔点处噪声的作用,取控制参数 $\sigma = -0.0055$,其他参数与图 1 中保持一致.我们模拟了不同噪声强度 S 的情况下神经元膜电位的时间演化,结果如图 2 所示,自下向上 $\lg S$ 的取值分别为 -5.0 , -3.0 , -2.2 , -1.5 和 -1.0 .我们知道 $\sigma = -0.0055$ 是低于阈值的静息状态区域,然而在考虑了噪声时,随着噪声强度的不同,体系的动力学行为完全改变了.例如,当 $\lg S = -5.0$,即噪声强度很小时,这样的噪声不足以触发动作电位,膜电位 x_n 在稳定状态附近只出现很小的波动.随着噪声强度的增加,比如, $\lg S = -3.0$ 时,随机波动会变为小幅的随机振荡, $\lg S = -2.2$ 时,神经元膜电位会在小幅随机振荡的背景下出现为数较少的大幅的动作电位.再如, $\lg S = -1.5$, -1.0 时,产生动作的数目会随着噪声强度的进一步增加而增多,但噪声强度过大时,就会使得动作电位的时间规整性变差.

为了定量表示膜电位随机振荡的规整性,我们计算了膜电位时间序列的有效 SNR^[22].我们首先对体系的动力学方程(3a),(3b)进行迭代运算,共记录 16384 个点.之后从时间序列采用 Welch 开窗函数估算出功率谱密度,例如图 3 中灰色曲线对应 $\sigma = -0.0055$ 及 $\lg S = -3.0$ 的功率谱图,对此灰色曲线进行平滑(取原始数据点的最近邻 49 点,即左右各 24 个平均)就可得到图中光滑的黑色曲线,可以看出有一个明显的尖峰.由此光滑的功率谱曲线,我们进一步定义有效信噪比如下:

$$\gamma_{\text{SNR}} = \frac{P(\omega_B)}{P(\omega_A)} \cdot \frac{\omega_B}{\omega_C - \omega_B}, \quad (4)$$

其中 ω_B 为尖峰所对应的频率, $P(\omega_B)$ 表示频率 ω_B 处的功率谱密度, ω_A 是介于 $\omega = 0$ 和 $\omega = \omega_B$ 之间的功率谱曲线的最低点处对应的频率, $\Delta\omega = \omega_C -$

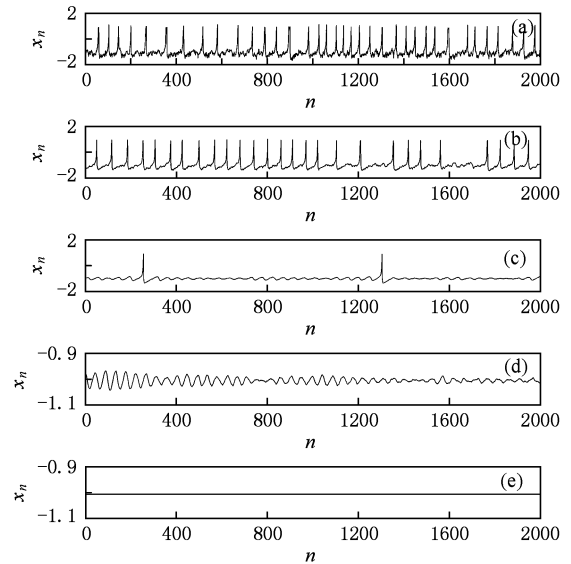


图 2 $\sigma = -0.0055$ 时,不同 S 对应的神经元膜电位的时间演化 (a) $\lg S = -1.0$, (b) $\lg S = -1.5$, (c) $\lg S = -2.2$, (d) $\lg S = -3.0$, (e) $\lg S = -5.0$ (值得注意的是, (d), (e) 的纵坐标范围与其他图不一样)

ω_B 定义为在 ω_B 与其右侧功率谱值降到尖峰处功率谱值的 $1/e$ 时所对应的频率之差,即有 $P(\omega_C) = P(\omega_B)/e$.由此可以看出,SNR 值越大,尖峰相对越高、越窄,振荡信息越强,因此 SNR 值的大小可以有效地表征随机振荡的强度.

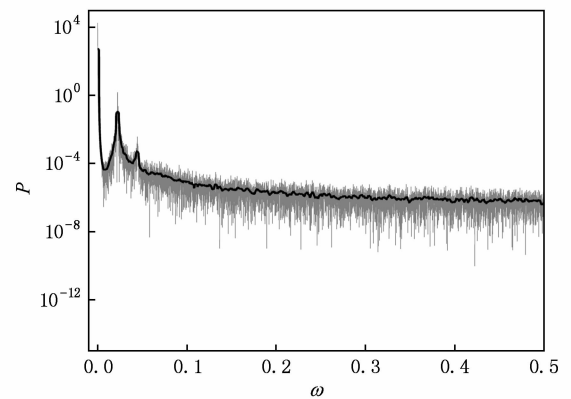


图 3 噪声诱导随机振荡的功率谱图 $\sigma = -0.0055$, $\lg S = -3.0$,其他参数与图 1 中的一致

接下来,我们计算了在不同的控制参数 σ 下,SNR 值随噪声强度 S 的变化曲线,对每一个给定的噪声强度,我们计算了 10 次时间序列的有效信噪比并最后取其平均值,结果如图 4 所示.当控制参数为 $\sigma = -0.0055$ 时,有效信噪比随噪声强度的变化曲线在 $\lg S = -3.0$ 和 $\lg S = -1.5$ 处有两个

极大值,也就是说,存在两个合适的噪声强度,它们所诱导的随机振荡的规整性最好,我们称这种现象为“相干双共振”.当控制参数取在次阈值振荡区域,如 $\sigma = -0.0010$ 时,SNR值随 S 的增大一开始是逐渐减少的,后来在较大的噪声强度时有所增加,并且在大约也是 $\lg S = -1.5$ 处有一个极大值.当控制参数取在神经脉冲区域,如 $\sigma = 0.0010$ 时,SNR值随 S 的增大一开始几乎保持不变,之后在较大的噪声区域内随噪声强度的增加单调递减,也就是说,噪声在此区域内起破坏性作用.

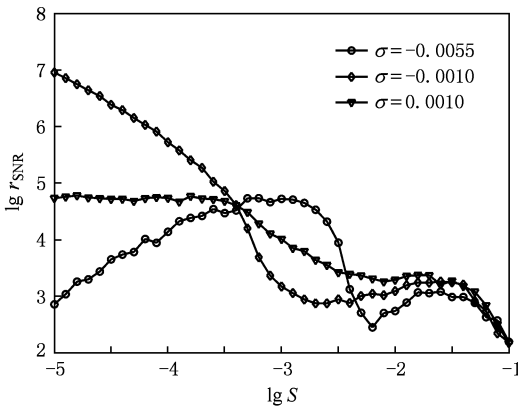


图4 不同控制参数 σ 下有效信噪比 γ_{SNR} 随噪声强度 S 的变化曲线.图中各曲线中的参数除 σ 外都与图1中的一致

以上结果说明体系的“相干双共振”现象与该模型的确定性动力学的分岔特性密切相关.图5中我们对体系的确定性动力学和噪声诱导的随机振荡随控制参数 σ 的分岔图进行了比较,但此分岔图只能说明处于图中所给的参数条件下体系是否出现了次阈值的振荡以及是否出现了大振幅的动作电位,而没有表明这些动力学行为在时间上的规则性.由图5可知,当控制参数位于静息态区域,但靠近次阈值振荡区域时,体系处于稳定的非振荡态但具有可激发性,此时小的噪声会将体系拉至出现次阈值振荡的区域,同时较大的噪声将诱导出大振幅的动作电位,驱使体系进入神经脉冲区域.所以体系会出现“相干双共振”现象,而且SNR曲线中第一个极大值对应于小幅的随机振荡,而第二个峰值则与大幅的随机振荡相符合.当控制参数位于次阈值振荡区域时,在没有噪声的情况下,体系就会出现确定性的振荡行为,此时小的噪声就只会起到破坏性的作用,但较大的噪声还是会诱导出大幅的随机振荡,所以SNR曲线只会出现一个共振峰,而且对应于大幅的随机振荡.同样,如果体系的控

制参数位于神经脉冲区域,此时即使没有噪声,体系也会产生大幅随机振荡的膜电位,因而噪声只会破坏振荡的规整性,就不会出现相干共振现象.

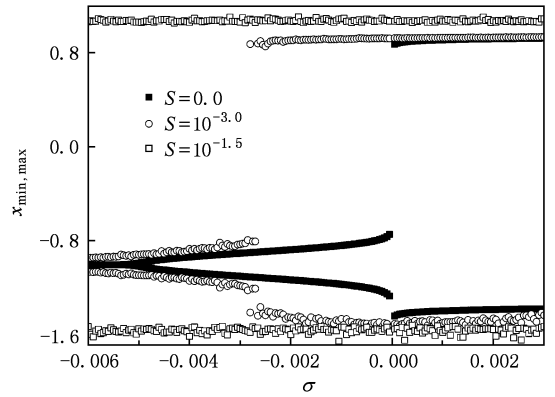


图5 体系的确定性动力学随控制参数 σ 的分岔图($S = 0.0$)与噪声诱导的随机振荡的最大值 $x_{\text{min}, \text{max}}$ 和最小值 $x_{\text{min}, \text{min}}$ 随控制参数 σ 的分岔图($S = 10^{-3.0}$, $S = 10^{-1.5}$)其他参数与图1中的一致

需要指出的是,作者之前曾研究了此具有稳定次阈值振荡特性的二维映射神经元模型中频率依赖的SR现象^[15].本文与文献[15]的主要区别在于,文献[15]中研究是在噪声的作用下体系对外界输入信号的响应,而本文中则没有外界输入信号,仅仅考虑噪声对体系的动力学的影响.由于本文中没有外界输入信号,文献[15]中用于定量表征噪声和外界信号合作所诱导的随机振荡的输出信号对输入信号频率的线性响应也就不能适用本文的情况了.因此在本文中我们计算有效信噪比,并发现了体系的相干双共振现象.

4. 结 论

综上所述,通过计算噪声所诱导的随机振荡的时间序列的有效信噪比,我们研究了噪声在二维映射神经元模型中的作用.发现了噪声诱导的随机振荡和体系的相干双共振现象,而且通过分析可知,这种相干双共振现象与体系的确定性动力学的分岔特性密切相关,只有当控制参数 σ 处于静息态区域时,才会出现相干双共振,并且在SNR曲线的两个峰值处噪声所诱导的随机振荡具有完全不同的频率和振幅特性,因此这种相干双共振现象显示出噪声的一种选择作用,也可能是神经元体系更好地发挥功能时所采用的机理.

- [1] Wellens T, Shatokhin V, Buchleitner A 2004 *Rep. Prog. Phys.* **67** 45
- [2] Gammaitoni L, Hänggi P, Jung P, Marchesoni F 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 223
- [3] Wang B H, Lu Q S, Lü S J, Lang X F 2009 *Chin. Phys. B* **18** 872
- [4] Xing Z C, Xu W, Rong H W, Wang B Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 824 (in Chinese) [邢真慈、徐伟、戎海武、王宝燕 2009 物理学报 **58** 824]
- [5] Lin M, Fang L M, Zheng Y J 2009 *Chin. Phys. B* **18** 1725
- [6] Wang H Q, Yu L C, Chen Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 5070 (in Chinese) [王慧巧、俞连春、陈勇 2009 物理学报 **58** 5070]
- [7] Wang C Q, Xu W, Zhang N M, Li H Q 2009 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 749 (in Chinese) [王朝庆、徐伟、张娜敏、李海泉 2009 物理学报 **57** 749]
- [8] Hu G, Ditzinger T, Ning C Z, Haken H 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 807
- [9] Pikovsky A, Kurths J 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 775
- [10] Jiang Y, Zhong S, Xin H 2000 *J. Phys. Chem. A* **104** 8521
- [11] Pikovsky A, Zaikin A, de la Casa M A 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 050601
- [12] Levin J E, Miller J P 1996 *Nature* **380** 165
- [13] Narins P M 2001 *Nature* **410** 644
- [14] Song Y, Zhao T J, Liu J W, Wang X Q, Zhan Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4020 (in Chinese) [宋杨、赵同军、刘金伟、王向群、展永 2006 物理学报 **55** 4020]
- [15] Wang M S 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6833 (in Chinese) [汪茂胜 2009 物理学报 **58** 6833]
- [16] Wang M S, Hou Z H, Xin H W 2004 *ChemPhysChem* **5** 1602
- [17] Wang M S, Hou Z H, Xin H W 2005 *Phys. Lett. A* **334** 93
- [18] Shen C S, Zhang J Q, Chen H S 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6315 (in Chinese) [申传胜、张季谦、陈含爽 2007 物理学报 **56** 6315]
- [19] Ma J, Li H Y, Hou Z H, Xin H W 2008 *Chin. J. Chem. Phys.* **21** 521
- [20] Rulkov N F 2002 *Phys. Rev. E* **65** 041922
- [21] Shilnikov A L, Rulkov N F 2004 *Phys. Lett. A* **328** 177
- [22] Hou Z H, Xin H W 2003 *J. Chem. Phys.* **119** 11508

Coherence bi-resonance in a two-dimensional neural map^{*}

Wang Mao-Sheng[†] Huang Wan-Xia Cui Zhi-Feng

(Department of Physics, Anhui Normal University, Wuhu 241000, China)

(Received 23 October 2009; revised manuscript received 28 November 2009)

Abstract

The influence of noise on the dynamics of a two-dimensional neural map with self-sustained subthreshold oscillations is studied by numerical simulation. When the injected current is absent and the control parameter is located in the silence region, numerical results show that stochastic oscillations of the membrane potential can be induced by noise. Moreover, the coherence of such oscillations shows two maxima with the variation of the noise strength. The effect of control parameter on the dynamics of the system has also been investigated. Interestingly, it is found that the occurrence of coherence bi-resonance is closely associated with the distinct characteristics of the bifurcation of the deterministic dynamics.

Keywords: two-dimensional neural map, coherence bi-resonance, Gaussian white noise, subthreshold oscillations

PACC: 0547, 8730C

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10674002), the Key Program of the Natural Science Foundation of the Education Commission of Anhui Province, China (Grant No. KJ2010A129), and the Sustainment Fund for Young Teachers in Colleges and Universities of Anhui Province, China (Grant No. 2008jq1055).

[†] E-mail: maosheng@ustc.edu