

# 广义压缩粒子数态的非经典性质及其退相干\*

徐学翔<sup>1)2)</sup> 袁洪春<sup>2)</sup> 胡利云<sup>1)†</sup>

1) (江西师范大学物理与通信电子学院, 南昌 330022)

2) (上海交通大学物理系, 上海 200030)

(2009 年 10 月 5 日收到; 2009 年 11 月 17 日收到修改稿)

研究了三参数的压缩算符产生的广义压缩粒子数态的非经典性质及其在光子损失通道中的退相干问题. 利用有序算符内的积分技术和 Weyl 编序算符在相似变换下的不变性, 简洁地导出了广义压缩粒子数态的 Wigner 函数 (Laguerre-Gaussian 函数). 基于 Wigner 函数的演化积分公式, 解析地推导出了在耗散通道中的 Wigner 函数表达式. 特别地, 根据 Wigner 函数负部体积讨论了其非经典性.

**关键词:** 压缩效应,  $Q$ -参数, Wigner 函数, 非经典性质

**PACC:** 4250, 0365

## 1. 引 言

光场的非经典属性不但在理解量子物理的基本原理中起着关键性的作用, 而且是量子光学和量子信息处理中的一个重要研究课题. 实验上, 一些传统的量子态, 比如粒子数态、相干态以及压缩态等, 在量子信息处理中已得到了广泛应用<sup>[1]</sup>. 一般地, 非经典性是通过一些具体的量子统计特点体现出来的, 如光场的压缩特性<sup>[2]</sup>、亚泊松光子统计<sup>[3]</sup>及 Wigner 函数的部分负分布<sup>[4,5]</sup>等等. Wigner 相空间分布函数是量子相空间理论中最重要的组成部分, 它既是相空间理论的基础, 也是实际应用中主要的工具之一<sup>[6]</sup>. 但是由于 Wigner 分布函数的非正定性特点, 故不能作为一个真正意义上的概率分布函数, 通常称之为准概率分布函数. 通常情况下, 可以根据 Wigner 分布函数的负值部分来体现其非经典性质<sup>[7]</sup>. 关于一些非经典态的讨论, 可以参考文献<sup>[8—11]</sup>. 另一方面, 当非经典光场在介质中传播时, 它不可避免地会与周围的环境发生相互作用, 从而导致系统的耗散或相移, 破坏光场的非经典特性<sup>[12—15]</sup>.

自从 1970 年以来, 由于压缩态得到了越来越广泛的应用, 对于压缩算符和压缩态的研究成为量子光学领域的热点. Fan 等<sup>[16—18]</sup> 利用有序算符内的积

分技术 (IWOP 技术) 将压缩算符表达成坐标表象下的 ket-bra 积分型算符. 在 2000 年 Fan 等<sup>[19]</sup> 又提出了基于相干态表象下的与经典辛变换对应的压缩算符. 它是一个带有三参数的压缩算符, 称为广义压缩算符. 本文将研究利用该算符作用到粒子数态所得到的广义压缩粒子数态的非经典性质以及在光子耗散通道中的量子退相干问题.

本文首先介绍了相干态表象下的压缩算符及其对应的广义压缩粒子数态, 分析了其压缩效应,  $Q$  参数以及 Wigner 函数等非经典性质, 讨论广义压缩粒子数态在耗散通道中的退相干问题, 得到了 Wigner 分布函数演化的解析表达式. 通过绘制图形, 清楚地了解有关参数对 Wigner 分布函数的影响.

## 2. 广义压缩粒子数态

首先回顾带有三个参数的广义单模压缩算符. 从文献<sup>[20, 21]</sup> 可以知道, 这种压缩算符可以表达成相干态  $|z\rangle$  基下的 ket-bra 积分型形式, 即

$$U(r, s) = \int \sqrt{s} \frac{d^2 z}{\pi} |sz - rz^*\rangle \langle z|, \quad (1)$$

式中  $s, r$  为复数, 满足么模条件  $ss^* - rr^* = |s|^2 - |r|^2 = 1$ , 显然, 算符  $U(r, s)$  含有三个独立实参变量. 实际上,  $U(r, s)$  可以看作是经典正则变换

$$(z, z^*) \rightarrow (sz - rz^*, -r^*z + s^*z^*) \quad (2)$$

\* 国家自然科学基金 (批准号: 10775097, 10874174) 和江西省教育厅科学技术研究计划 (批准号: GJJ10097) 资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: hlyun2008@gmail.com; hlyun@jxnu.edu.cn

到量子力学 Hilbert 空间的一个映射. 将相干态<sup>[22,23]</sup>

$$|z\rangle = \exp\left(-\frac{|z|^2}{2} + za^\dagger\right) |0\rangle \quad (3)$$

代入(1)式中, 并利用有序算符内的积分技术 (IWOP 技术) 以及真空态正规乘积下的投影算符  $|0\rangle\langle 0| = : \exp(-a^\dagger a) :$ , 可得

$$\begin{aligned} U(r, s) &= \sqrt{s} \int \frac{d^2z}{\pi} : \exp \left[ -|s|^2 |z|^2 + \frac{r^* s}{2} z^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{rs^*}{2} z^{*2} + (sz - rz^*) a^\dagger + z^* a - a^\dagger a \right] : \\ &= \exp\left(-\frac{r}{2s^*} a^{\dagger 2}\right) \exp\left[\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) \ln \frac{1}{s^*}\right] \\ &\quad \times \exp\left(\frac{r^*}{2s^*} a^2\right), \end{aligned} \quad (4)$$

这里  $a^\dagger$  和  $a$  分别是光场的产生算符和湮没算符, 在

以上计算中利用了积分公式

$$\begin{aligned} &\int \frac{d^2z}{\pi} \exp(\zeta |z|^2 + \xi z + \eta z^* + fz^2 + gz^{*2}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - 4fg}} \exp\left(\frac{-\zeta\xi\eta + \xi^2 g + \eta^2 f}{\zeta^2 - 4fg}\right), \end{aligned} \quad (5)$$

其收敛条件是  $\text{Re}(\xi \pm f \pm g) < 0$ ,  $\text{Re}\left(\frac{\zeta^2 - 4fg}{\xi \pm f \pm g}\right) < 0$ .

由(4)式容易导出  $U$  下的么正变换关系

$$\begin{aligned} U^\dagger a U &= sa - ra^\dagger, \\ U^\dagger a^\dagger U &= s^* a^\dagger - r^* a. \end{aligned} \quad (6)$$

当广义压缩算符  $U(r, s)$  作用到粒子数态  $|n\rangle$  上, 就得到了广义压缩粒子数态  $U(r, s) |n\rangle$ . 利用相干态与粒子数态的内积关系

$$\langle z | n \rangle = \frac{z^{*n}}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{1}{2}|z|^2}, \quad (7)$$

和积分公式(5), 得到

$$\begin{aligned} U(r, s) |n\rangle &= \sqrt{s} \int \frac{d^2z}{\pi} |sz - rz^*\rangle \langle z | n \rangle \\ &= \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{n!}} \int \frac{d^2z}{\pi} z^{*n} \exp\left(-|sz|^2 + \frac{r^* s}{2} z^2 + \frac{rs^*}{2} z^{*2} + sa^\dagger z - ra^\dagger z^*\right) |0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{s^* n!}} \left(\sqrt{-\frac{r^*}{2s^*}}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-r \sqrt{-\frac{r^*}{2s^*}} a^\dagger\right)^k \\ &\quad \times H_{n+k} \left(-\sqrt{-\frac{s^*}{2r^*}} sa^\dagger\right) \exp\left(\frac{rsa^{\dagger 2}}{2}\right) |0\rangle, \end{aligned} \quad (8)$$

这里在差到一个相因子的程度上已把  $s^{*-1/2} |s|$  视为  $s$ , 且在推导中已用到了关于 Hermite 多项式的母函数公式

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n = \exp(2xt - t^2), \quad (9)$$

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} \exp(ft^2 + 2xt) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\sqrt{-f})^n}{(k-n)!} (\sqrt{-f}t)^{k-n} H_k\left(\frac{x}{\sqrt{-f}}\right), \quad (10)$$

以及

$$\begin{aligned} &\int \frac{d^2z}{\pi} z^{*n} \exp(\zeta |z|^2 + \xi z + \eta z^* + fz^2 + gz^{*2}) \\ &= \frac{\partial^n}{\partial \eta^n} \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - 4fg}} \exp\left[\frac{-\zeta\xi\eta + \xi^2 g + \eta^2 f}{\zeta^2 - 4fg}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - 4fg}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sqrt{\frac{f}{4fg - \zeta^2}} \eta\right)^k \\ &\quad \times H_{k+n} \left(\frac{\frac{\zeta\xi}{2(4fg - \zeta^2)}}{\sqrt{\frac{f}{4fg - \zeta^2}} \left(\frac{f}{4fg - \zeta^2}\right)^n}\right) \exp\left(\frac{\xi^2 g}{\zeta^2 - 4fg}\right). \end{aligned} \quad (11)$$

由(8)式可以看出, 广义压缩粒子数态实际上可看作 Hermite 多项式激发压缩真空态的叠加形式. 以下部分将讨论该量子态的一些统计属性以及其 Wigner 函数特征.

当  $s = \cosh\lambda$ ,  $r = \sinh\lambda$ ,  $U(r, s)$  退化为通常的单模压缩算符  $S(\lambda)$ , 且

$$\begin{aligned} S(\lambda) &= \exp\left[-\frac{\lambda}{2}(a^{\dagger 2} - a^2)\right] \\ &= \exp\left(-\frac{\tanh\lambda}{2}a^{\dagger 2}\right)\exp\left[\left(a^{\dagger}a + \frac{1}{2}\right)\ln\frac{1}{\cosh\lambda}\right] \\ &\quad \times \exp\left(\frac{\tanh\lambda}{2}a^2\right), \end{aligned} \quad (12)$$

其中  $\lambda$  是压缩参数, 相应地压缩粒子数态<sup>[24]</sup>为

$$\begin{aligned} S(\lambda) |n\rangle &= \frac{\left(\sqrt{-\frac{\tanh\lambda}{2}}\right)^n}{\sqrt{n! \cosh\lambda}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \\ &\quad \times \left(-\sinh\lambda \sqrt{-\frac{\tanh\lambda}{2}}a^{\dagger}\right)^k \\ &\quad \times H_{n+k}\left(-\cosh\lambda \sqrt{-\frac{1}{2\tanh\lambda}}a^{\dagger}\right) \\ &\quad \times \exp\left(\frac{\sinh 2\lambda}{4}a^{\dagger 2}\right) |0\rangle. \end{aligned} \quad (13)$$

### 3. 广义压缩粒子数态的非经典性质

下面研究广义压缩粒子数态的压缩效应、 $Q$  参数以及 Wigner 函数等非经典性质.

#### 3.1. 压缩效应

对于单模量子光场, 其两个正交复振幅分量可定义为

$$X = \frac{a + a^{\dagger}}{\sqrt{2}}, \quad P = \frac{a - a^{\dagger}}{\sqrt{2}i}. \quad (14)$$

由于  $[X, P] = i$ , 可见它们是一对共轭量. 根据 Heisenberg 不确定原理可知, 任意一对满足关系式  $[X, P] = i$  的共轭量, 其方均涨落之积必须大于或等于某一常数, 即  $(\Delta X)(\Delta P) \geq 1/4$ . 如果光场的正交分量满足  $(\Delta X) \leq 1/2$  或  $(\Delta P) \leq 1/2$ , 则称光场在  $X$  分量上或  $P$  分量上存在压缩效应.

利用广义压缩算符的变换关系式(6), 可得  $X$ ,  $P$  等算符在广义压缩态中的期望值为

$$\langle X \rangle = \langle P \rangle = 0, \quad (15)$$

和

$$\langle X^2 \rangle = \frac{2n+1}{2}(s^*s + rr^* - rs - s^*r^*),$$

$$\langle P^2 \rangle = \frac{2n+1}{2}(rs + s^*s + rr^* + s^*r^*). \quad (16)$$

由以上关系可得

$$\begin{aligned} (\Delta X)^2(\Delta P)^2 &= \frac{(2n+1)^2}{4}(r^2r^{*2} + s^2s^{*2} \\ &\quad - r^{*2}s^{*2} - r^2s^2). \end{aligned} \quad (17)$$

当  $s = \cosh\lambda$ ,  $r = \sinh\lambda$ , 对应于通常的压缩粒子数态情况, 则相应的正交分量的量子涨落为

$$\langle X^2 \rangle = \frac{2n+1}{2}e^{-2\lambda},$$

$$\langle P^2 \rangle = \frac{2n+1}{2}e^{2\lambda},$$

$$\Delta X \Delta P = \frac{2n+1}{2}. \quad (18)$$

此结果与文献[25, 26]中的结果是一致的.

#### 3.2. Mandel- $Q$ 参数

为进一步展示广义压缩粒子数态的光子统计属性, 借助  $Q$  参数<sup>[27]</sup>, 其定义为

$$Q = \frac{\langle a^{\dagger 2} a^2 \rangle}{\langle a^{\dagger} a \rangle^2} - \langle a^{\dagger} a \rangle, \quad (19)$$

该参数反映了所考虑的光场与具有泊松分布特征的相干态光场光子数分布偏离情况. 当  $Q=0$  时, 为泊松分布; 而当  $Q>0$  ( $Q<0$ ) 时, 则为超(亚)泊松分布. 对于广义压缩粒子数态, 利用(5)式, 计算可得

$$\langle a^{\dagger} a \rangle = n + (2n+1)|r|^2, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \langle a^{\dagger 2} a^2 \rangle &= (6n^2 + 6n + 3)|r|^4 \\ &\quad + (6n^2 + 2n + 1)|r|^2 \\ &\quad + (n^2 - n), \end{aligned} \quad (21)$$

则  $Q$  参数为

$$Q = \frac{2(n^2 + n + 1)|r|^4 + (2n^2 + 1)|r|^2 - n}{n + (2n+1)|r|^2}. \quad (22)$$

从(22)式可知, 当  $n=0$  时,  $Q=2|r|^2+1>0$ , 即压缩真空态是超泊松分布的, 而当  $n \neq 0$ ,  $|r| \rightarrow 0$  时,  $Q \rightarrow -1$ , 即粒子数态, 则对应于亚泊松分布.

为清楚看到  $Q$  参数随压缩参数的演化特征, 绘制了不同  $n$  的情形下,  $Q$  参数随  $|r|$  的变化情况. 如图 1 所示, 对于给定的粒子数  $n$ , 当  $|r|$  的值超过某一阈值时,  $Q$  参数则由负值变成正值; 随粒子数  $n$  的增加, 相应的阈值却减少. 这里应该指出的是, 尽管  $Q$  参数是正的, 但一个量子态仍然可以是非经典的. 以上给出的例子就是这种情况, 其非经典性也可以

从 Wigner 函数的负定性看出.

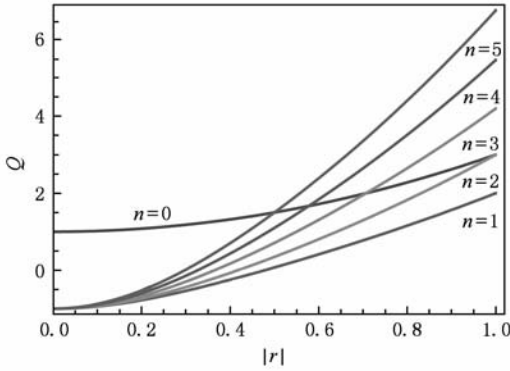


图 1 广义压缩粒子数态的  $Q$  参数在不同  $n$  情况下随  $|r|$  的变化

### 3.3. 广义压缩粒子数态的 Wigner 函数

密度算符  $\rho$  的 Wigner 函数

$$W(x, p) = \text{Tr}[\rho \Delta w(x, p)], \quad (23)$$

其中  $\Delta w(x, p)$  是单模 Wigner 算符, 其 Weyl 编序形式为 (引进“ $\ddot{\cdot}$ ”作为 Weyl 编序的记号)<sup>[28]</sup>

$$\Delta w(x, p) = \ddot{\cdot} \delta(p - P) \delta(x - X) \ddot{\cdot}. \quad (24)$$

这是一个重要的算符恒等式, 即 Wigner 算符的 Weyl 编序是 Dirac  $\delta$  函数. 注意到

$$\begin{aligned} X &= (a + a^\dagger) / \sqrt{2}, \\ P &= (a - a^\dagger) / (\sqrt{2}i), \\ \alpha &= (x + ip) / \sqrt{2}, \end{aligned} \quad (25)$$

上式可写为

$$\begin{aligned} \Delta w(x, p) &\rightarrow \Delta w(\alpha, \alpha^*) \\ &= \frac{1}{2} \ddot{\cdot} \delta(a^\dagger - \alpha^*) \delta(a - \alpha) \ddot{\cdot}. \end{aligned} \quad (26)$$

注意算符的 Weyl 编序具有独特的性质, Weyl 编序在相似变换操作下具有“不变性”,

$$\begin{aligned} S^{-1} \ddot{\cdot} f(a^\dagger, a) \ddot{\cdot} S \\ = \ddot{\cdot} f(S^{-1} a^\dagger S, S^{-1} a S) \ddot{\cdot}, \end{aligned} \quad (27)$$

即相似变换算符  $S$  的作用可以穿过 Weyl 编序记号“ $\ddot{\cdot}$ ”. 根据这个性质, 可方便地导出 Wigner 算符的变换公式.

利用变换关系式(6)和(26), 则 Wigner 算符在广义压缩算符下的变换为

$$\begin{aligned} &U^\dagger(r, s) \Delta w(\alpha, \alpha^*) U(r, s) \\ &= \frac{1}{2} U^\dagger(r, s) \ddot{\cdot} \delta(a^\dagger - \alpha^*) \delta(a - \alpha) \ddot{\cdot} U(r, s) \\ &= \frac{1}{2} \ddot{\cdot} \delta(s^* a^\dagger - r^* a - \alpha^*) \delta(sa - ra^\dagger - \alpha) \ddot{\cdot} \\ &= \frac{1}{2} \ddot{\cdot} \delta(a^\dagger - \beta^*) \delta(a - \beta) \ddot{\cdot} \\ &= \Delta w(\beta, \beta^*), \end{aligned} \quad (28)$$

其中

$$\beta = r\alpha^* + s^*\alpha. \quad (29)$$

(28)式表明, Wigner 算符在广义压缩算符  $U(r, s)$  的作用下, 形式仍然是一个单模 Wigner 算符. 因此, 立即可给出粒子数态  $|n\rangle$  在新的 Wigner 算符  $\Delta w(\beta, \beta^*)$  下的 Wigner 函数, 即

$$\begin{aligned} W_n(\beta, \beta^*) &= \langle n | \Delta w(\beta, \beta^*) | n \rangle \\ &= \frac{(-1)^n}{\pi} e^{-2|\beta|^2} L_n(4|\beta|^2), \end{aligned} \quad (30)$$

其中  $\beta$  与  $\alpha$  的关系由(29)式给出,  $L_n(x)$  是 Laguerre 多项式, 其定义为

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{x^k}{k!}. \quad (31)$$

因此, 广义压缩粒子数态  $U(r, s) |n\rangle$  的 Wigner 函数解析式为

$$\begin{aligned} W(\alpha, \alpha^*) &= \langle n | U^\dagger(r, s) \Delta w(\alpha, \alpha^*) U(r, s) | n \rangle \\ &= \langle n | \Delta w(\beta, \beta^*) | n \rangle \\ &= \frac{(-1)^n}{\pi} e^{-2|\beta|^2} L_n(4|\beta|^2). \end{aligned} \quad (32)$$

由此可见, 算符的 Weyl 编序在相似变换下的“不变性”给 Wigner 函数的导出带来了很大的方便. 特别地, 当  $s = \cosh \lambda$ ,  $r = \sinh \lambda$ , 即通常意义下的单模压缩粒子数态, Wigner 函数(32)退化为

$$\begin{aligned} W(\alpha, \alpha^*) &= \frac{(-1)^n}{\pi} \\ &\times \exp(-2|\alpha \cosh \lambda + \alpha^* \sinh \lambda|^2) \\ &\times L_n(4|\alpha \cosh \lambda + \alpha^* \sinh \lambda|^2). \end{aligned} \quad (33)$$

为清楚地展示不同粒子数  $n$  以及压缩参数  $\lambda$  对 Wigner 分布函数影响, 绘制三维  $x$ - $p$  相空间图形. 由图 2 可以看出, 当粒子数  $n$  为偶数时, 在 Wigner 函数的相空间分布中心处, 有一个向上的峰; 而当粒子数  $n$  为奇数时, 峰向下. 对于给定的压缩参数, Wigner 函数分布随  $n$  的增加而出现了“震荡型”分布, 这保留了粒子数态的 Wigner 函数的特点. 此外, 在  $x$  方向上呈现了明显的压缩.

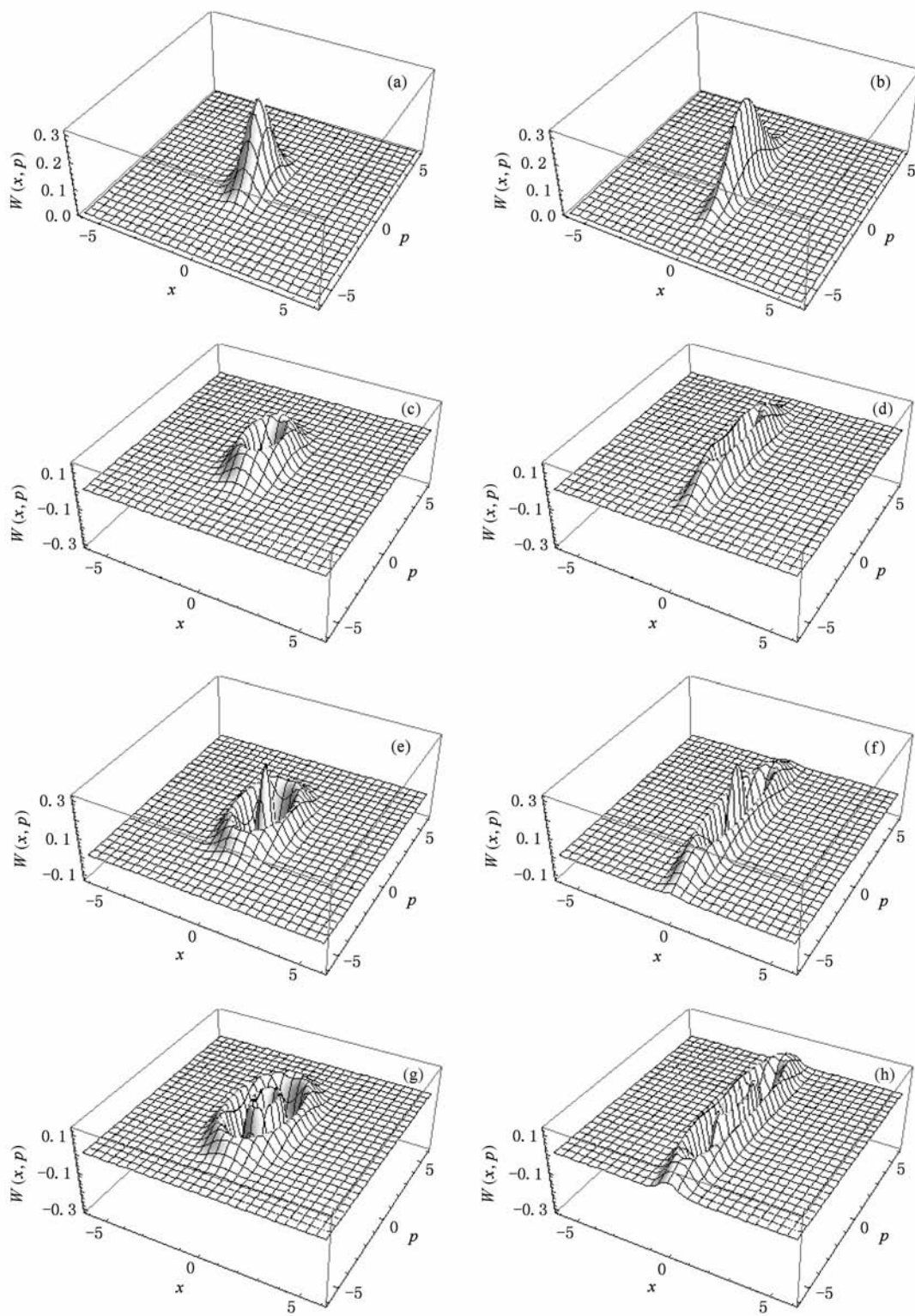


图2 压缩粒子数态 Wigner 分布函数图形 (a) $\lambda = 0.3, n = 0$ ; (b) $\lambda = 0.8, n = 0$ ; (c) $\lambda = 0.3, n = 1$ ; (d) $\lambda = 0.8, n = 1$ ; (e) $\lambda = 0.3, n = 2$ ; (f) $\lambda = 0.8, n = 2$ ; (g) $\lambda = 0.3, n = 3$ ; (h) $\lambda = 0.8, n = 3$

#### 4. 耗散通道中的 Wigner 函数

当广义压缩粒子数态经过振幅衰减通道,其密度矩阵演化可用如下算符主方程来描述:

$$\frac{d\rho}{dt} = \kappa(2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a), \quad (34)$$

这里  $\kappa$  表示衰减系数. 利用热场动力学理论以及纠缠态表象方法,文献[29]导出了单模光场在耗散通道中的 Wigner 函数演化方程,即

$$W(\alpha, \alpha^*, t) = \frac{2}{T} \int \frac{d^2z}{\pi} e^{-\frac{2}{T} |\alpha - ze^{-\kappa t}|^2} W(z, z^*, 0),$$

$$T = 1 - e^{-2\kappa t}, \quad (35)$$

其中  $W(z, z^*, 0)$  为初始时刻量子态的 Wigner 函数. 从(35)式可知,当  $t \rightarrow 0, T \rightarrow 0$ ,

$$\frac{2}{\pi T} \exp\left(-\frac{2}{T} |\alpha - ze^{-\kappa t}|^2\right) \rightarrow \delta(\alpha - z) \delta(\alpha^* - z^*),$$

则  $W(\alpha, \alpha^*, t) \rightarrow W(\alpha, \alpha^*, 0)$ . 这样,只要初始 Wigner 函数知道,通过对其积分就可以得到任意时刻的 Wigner 函数.

利用关系式  $H_{n,n}(x, y) = n! (-1)^n L_n(xy)$ , (32)式可改写成

$$W(\alpha) = \frac{e^{-2|s^* \alpha + r\alpha^*|^2}}{\pi n!} \times H_{n,n}[2(s\alpha^* + r^* \alpha), 2(s^* \alpha + r\alpha^*)]. \quad (36)$$

将(36)式代入(35)式,并利用双变量 Hermite 多项

式的母函数关系式,

$$H_{n,n}(x, y) = \frac{\partial^{n+n}}{\partial \tau^n \partial \sigma^n} \times \exp[-\tau\sigma + \tau x + \sigma y] \Big|_{\tau=\sigma=0}, \quad (37)$$

可得  $U(r, s) |n\rangle$  在耗散通道中的 Wigner 函数演化方程为

$$W(\alpha, \alpha^*, t) = \frac{2}{\pi n! T} \frac{\partial^{n+n}}{\partial \tau^n \partial \sigma^n} \exp\left(-\frac{2}{T} |\alpha|^2 - \tau\sigma\right) \times \int \frac{d^2z}{\pi} \exp\left[-\frac{2e^{-2\kappa t}}{T} |z|^2 - 2(|r|^2 + |s|^2) |z|^2 + \left(\frac{2\alpha^* e^{-\kappa t}}{T} + 2\tau r^* + 2\sigma s^*\right) z + \left(\frac{2\alpha e^{-\kappa t}}{T} + 2\tau s + 2\sigma r\right) z^* - 2r^* s^* z^2 - 2rsz^{*2}\right] \Big|_{\tau=\sigma=0}. \quad (38)$$

进一步利用积分公式(5),并且假定

$$A = 4(1 + T^{-2} e^{-4\kappa t}) + 8 \frac{e^{-2\kappa t}}{T} (|r|^2 + |s|^2),$$

$$B = \frac{4(1 - 2e^{-2\kappa t})}{AT^2},$$

$$D = \frac{8e^{-2\kappa t}}{AT} sr^*,$$

$$C = \frac{8e^{-\kappa t}}{AT^2} [(1 - 2e^{-2\kappa t})r^* \alpha + s\alpha^*],$$

(38)式简化为

$$W(\alpha, \alpha^*, t) = \frac{2}{\pi n! T / A} \exp\left\{\frac{8e^{-2\kappa t}}{AT^2} \left[-(2|s|^2 - e^{2\kappa t})|\alpha|^2 - r^* s^* \alpha^2 - rs\alpha^{*2}\right]\right\} \times \frac{\partial^{n+n}}{\partial \tau^n \partial \sigma^n} \exp(B\sigma\tau + C\tau + C^* \sigma + D\tau^2 + D^* \sigma^2) \Big|_{\tau=\sigma=0}. \quad (39)$$

进一步将  $\exp(B\sigma\tau)$  展成级数形式,并相应写成微分形式得

$$W(\alpha, \alpha^*, t) = \frac{2}{\pi n! T / A} \exp\left\{\frac{8e^{-2\kappa t}}{AT^2} \left[-(2|s|^2 - e^{2\kappa t})|\alpha|^2 - r^* s^* \alpha^2 - rs\alpha^{*2}\right]\right\} \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial C^k} \frac{\partial^k}{\partial C^{*k}} \frac{\partial^{n+n}}{\partial \tau^n \partial \sigma^n} \exp(C\tau + C^* \sigma + D\tau^2 + D^* \sigma^2) \Big|_{\tau=\sigma=0}, \quad (40)$$

利用单变量 Hermite 多项式  $H_n(x)$  的母函数关系

$$H_n(x) = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \exp(2xt - t^2) \Big|_{t=0}, \quad (41)$$

(40)式可变为

$$W(\alpha, \alpha^*, t) = \frac{2|D|^n}{\pi n! T / A} \exp\left\{\frac{8e^{-2\kappa t}}{AT^2} \left[-(2|s|^2 - e^{2\kappa t})|\alpha|^2 - r^* s^* \alpha^2 - rs\alpha^{*2}\right]\right\}$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial C^k} H_n \left( \frac{C}{2i\sqrt{D}} \right) \frac{\partial^k}{\partial C^{*k}} H_n \left( -\frac{C^*}{2i\sqrt{D^*}} \right), \quad (42)$$

通过作适当的变量代换, 并利用  $H_n(x)$  的微分迭代关系

$$\frac{d^l}{dx^l} H_n(x) = \frac{2^l n!}{(n-l)!} H_{n-l}(x), \quad (43)$$

将(42)式化为

$$W(\alpha, \alpha^*, t) = \frac{2n! |D|^n}{\pi T \sqrt{A}} \exp \left\{ \frac{8e^{-2\kappa t}}{AT^2} \left[ -(2|s|^2 - e^{2\kappa t}) |\alpha|^2 - r^* s^* \alpha^2 - rs\alpha^{*2} \right] \right\} \\ \times \sum_{k=0}^n \frac{(B/|D|)^k}{k! [(n-k)!]^2} \left| H_{n-k} \left( -iC/(2\sqrt{D}) \right) \right|^2. \quad (44)$$

上式即为广义压缩粒子数态在耗散通道中的 Wigner 函数演化方程解析表达式. 当  $t \rightarrow 0, T \rightarrow 0$  时, (44) 式恰好可以退化为初始时刻的 Wigner 函数解析表达式(32). 特别地, 当  $n=0$  时, (44) 式退化为广义压缩真空态在耗散通道中的 Wigner 函数演化方程解析表达式, 即

$$W(\alpha, \alpha^*, t) \\ = \frac{2}{\pi T \sqrt{A}} \exp \left\{ \frac{8e^{-2\kappa t}}{AT^2} \left[ -(2|s|^2 - e^{2\kappa t}) \right. \right. \\ \left. \left. \times |\alpha|^2 - r^* s^* \alpha^2 - rs\alpha^{*2} \right] \right\}. \quad (45)$$

当  $s = \cosh\lambda, r = \sinh\lambda$  时, 并且假定

$$M_\lambda = 4Te^{-2\kappa} \sinh^2\lambda + 1,$$

$$B_\lambda = \frac{1 - 2e^{-2\kappa t}}{M_\lambda},$$

$$C_\lambda = \frac{2e^{-\kappa t}}{M_\lambda} \left[ (1 - 2e^{-2\kappa t}) \alpha \sinh\lambda + \alpha^* \cosh\lambda \right],$$

$$D_\lambda = \frac{T}{M_\lambda} e^{-2\kappa t} \sinh 2\lambda,$$

$$c_x = \frac{e^{2\lambda - 2\kappa t} - T}{M_\lambda}, \quad c_p = \frac{e^{-2\kappa t - 2\lambda} - T}{M_\lambda},$$

得到通常的压缩粒子数态在耗散通道中的 Wigner 函数演化方程解析表达式

$$W(\alpha, \alpha^*, t) = \frac{2n! |D_\lambda|^n}{\pi \sqrt{M_\lambda}} e^{-c_x x^2 - c_p p^2} \\ \times \sum_{k=0}^n \frac{(B_\lambda/|D_\lambda|)^k}{k! [(n-k)!]^2}$$

$$\times \left| H_{n-k} \left( -iC_\lambda/(2\sqrt{D_\lambda}) \right) \right|^2. \quad (46)$$

特别地, 在初始时刻  $t=0$ , (46) 式恰恰就变成了(33)式, 即通常的压缩粒子数态 Wigner 函数解析式; 当系统与环境相互作用时间足够长 ( $\kappa t \rightarrow \infty$ ),

(46) 式变成  $W(\alpha, \alpha^*, \infty) = \frac{e^{-x^2 - p^2}}{\pi}$ , 恰恰就是真空

态的 Wigner 函数. 这表明在系统与外界相互作用很长一段时间后, 单模量子系统都退化为真空态. 由此可见, 当相互作用时间超过某一阈值时, Wigner 函数的负区域将消失.

下面列举几种特例. 当  $n=0$  时, (46) 式退化为通常的压缩真空态在耗散通道中的 Wigner 函数演化方程解析表达式

$$W_{n=0}(\alpha, \alpha^*, t) \\ = \frac{1}{\pi \sqrt{M_\lambda}} \exp(-c_x x^2 - c_p p^2). \quad (47)$$

当  $t \rightarrow 0, M_\lambda = 1, c_x = e^{2\lambda}, c_p = e^{-2\lambda}$  时,  $W_{n=0}(\alpha, \alpha^*, 0) = \frac{e^{-2\lambda x^2 - e^{-2\lambda} p^2}}{\pi}$ , 即为压缩真空态的 Wigner 函数; 而

当  $t \rightarrow \infty, M_\lambda = 1, c_x = 1, c_p = 1$  时,  $W(\alpha, \alpha^*, \infty) = \frac{e^{-x^2 - p^2}}{\pi}$ . 当  $n=1$  时, 得到  $S(\lambda) |1\rangle$  在耗散通道中的

Wigner 函数演化表示

$$W_{n=1}(\alpha, \alpha^*, t) \\ = \frac{1}{\pi} (\mathfrak{S}x^2 + \mathfrak{T}p^2 + \mathfrak{R}) e^{-c_x x^2 - c_p p^2}, \quad (48)$$

其中

$$\mathfrak{S} = 2 \frac{[2e^{-4\kappa t} T + e^{-4\kappa} (e^{2\kappa t} - 2T) \cosh 2\lambda - e^{-2\kappa t} T' \sinh 2\lambda]}{M_\lambda^{5/2}},$$

$$\mathfrak{I} = 2 \frac{[2e^{-4\kappa t} T + e^{-4\kappa t} (e^{2\kappa t} - 2T) \cosh 2\lambda + e^{-2\kappa t} T' \sinh 2\lambda]}{M_\lambda^{5/2}},$$

$$\mathfrak{R} = \frac{T'}{M_\lambda^{3/2}}, \quad T' = 1 - 2e^{-2\kappa t}.$$

当  $t \rightarrow 0, T \rightarrow 0$ , 导致  $c_x \rightarrow e^{2\lambda}, c_p \rightarrow e^{-2\lambda}, \mathfrak{S} \rightarrow 2e^{2\lambda}, \mathfrak{I} \rightarrow 2e^{-2\lambda}, \mathfrak{R} \rightarrow -1$ , 得到  $S(\lambda) |1\rangle$  的 Wigner 函数

$$W_{n=1}(\alpha, \alpha^*, t = 0) = \frac{1}{\pi} (2e^{2\lambda} x^2 + 2e^{-2\lambda} p^2 - 1) e^{-e^{2\lambda} x^2 - e^{-2\lambda} p^2}. \quad (49)$$

显然, 它是一个非高斯型的分布函数; 而当  $t \rightarrow \infty$  时,  $T \rightarrow 1$ , 导致  $c_x \rightarrow 1, c_p \rightarrow 1, \mathfrak{S} \rightarrow 0, \mathfrak{I} \rightarrow 0, \mathfrak{R} \rightarrow 1$ , 得到  $S(\lambda) |1\rangle$  的 Wigner 函数在通道中为  $W_{n=1}(\alpha, \alpha^*, \infty) = \frac{e^{-x^2 - p^2}}{\pi}$ .

为了清楚地了解 Wigner 函数的负定性, 在  $(x, p)$  相空间中讨论  $W(\alpha, \alpha^*, t)$  在不同  $n$  情况下有关参数的影响, 绘制三维图形. 图 3 给出的是压缩单粒子数态 ( $n=1$ ) 在通道中不同时刻的 Wigner 函数图形, 图 4 是当  $n=2$  和  $n=3$  情况下在通道中不同时刻的 Wigner 函数图形. 从图 3 和图 4 可以发现, 随着时间的推移, 压缩粒子数态在耗散量子通道中的 Wigner 函数最终演化为真空态的高斯形式.

由(46)式不难看出, 只要条件  $B_\lambda > 0$  满足, 即

要求

$$\kappa t > \kappa t_c \equiv \frac{1}{2} \ln 2, \quad (50)$$

则 Wigner 函数将不可能出现负值区域. 因此,  $\kappa t_c$  是 Wigner 函数可能出现负部的最大时间限度, 且与压缩参数无关, 只要超过该时间阈值, 任何情况下的 Wigner 函数都不会有负值.

事实上, Wigner 函数的负值是反映光场非经典性质的一个重要标志. 为了对量子态的非经典性进行度量, 人们提出了不少方法, 如非经典“深度”、Bell 不等式以及 Wigner 函数的负部区域体积等. 其中 Wigner 函数的负部区域体积  $\delta$  定义如下:

$$\delta = \frac{1}{2} \int dx dp [ |W(x, p)| - W(x, p) ], \quad (51)$$

只要量子态的 Wigner 函数已知, 通过数值积分就可以得到负部区域体积. 根据定义, 相干态和压缩真空态的  $\delta$  都为零, 这是因为它们的 Wigner 函数是非负的. 也通过这种方式来研究压缩粒子数态在耗散量子通道中的情况. 图 5 给出了当  $\lambda = 0.3$  和  $\lambda =$

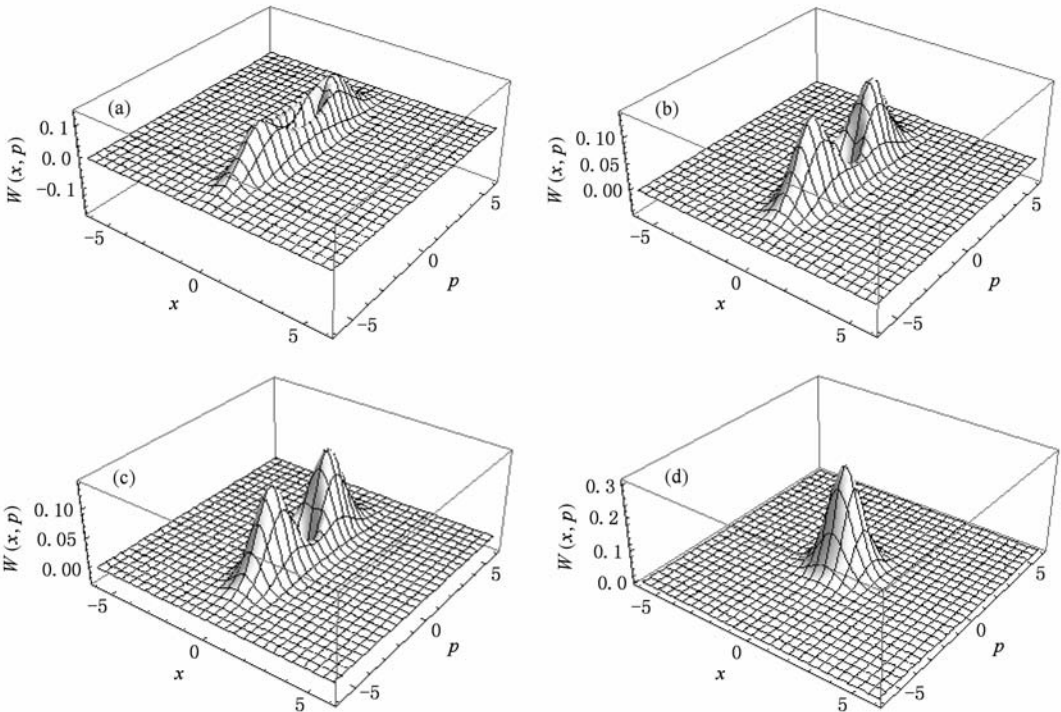


图 3 压缩粒子数态 Wigner 分布函数演化图形  $\lambda = 0.8, n = 1$ . (a)  $\kappa t = 0.05$ , (b)  $\kappa t = 0.2$ , (c)  $\kappa t = 0.25$ , (d)  $\kappa t = 4$



0.8 两种情况下, 不同压缩粒子态经过通道的  $\delta$  随  $\kappa t$  的变化情况. 由图 5 可知: 在给定压缩参数的情况下, 对于不同的粒子数  $n$ , 其 Wigner 函数的负部体积随时间的增加而逐渐减小; 当时间大于阈值时

间  $\frac{1}{2} \ln(\kappa t \approx 0.347)$ , Wigner 分布函数都没有负部出现; 比较图 5(a) 和 (b) 可知, 对于给定的  $n$  值, 压缩参数越大, Wigner 函数的负部体积则减小.

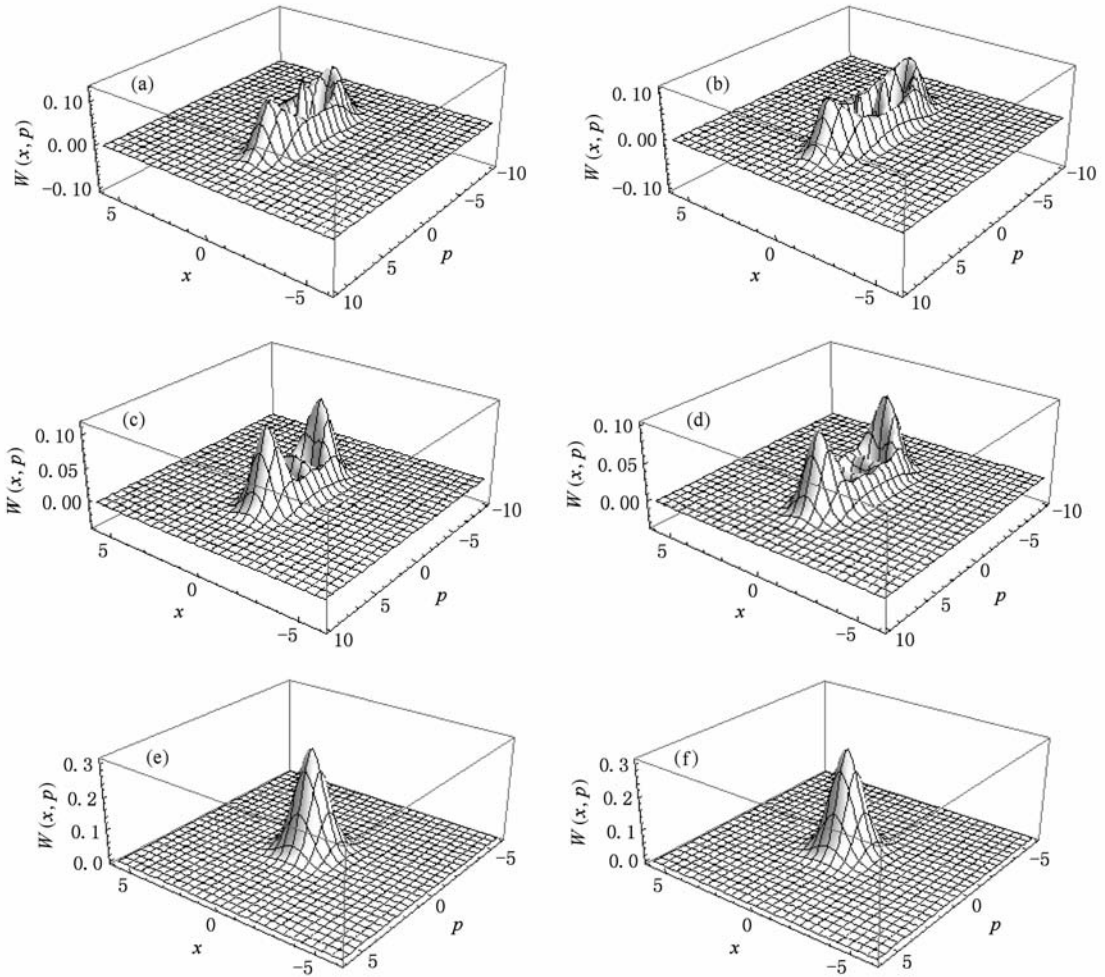


图 4 压缩粒子数态 Wigner 分布函数演化图形  $\lambda = 0.8$ . (a)  $n = 2, \kappa t = 0.05$ ; (b)  $n = 3, \kappa t = 0.05$ ; (c)  $n = 2, \kappa t = 0.2$ ; (d)  $n = 3, \kappa t = 0.2$ ; (e)  $n = 2, \kappa t = 4$ ; (f)  $n = 3, \kappa t = 4$

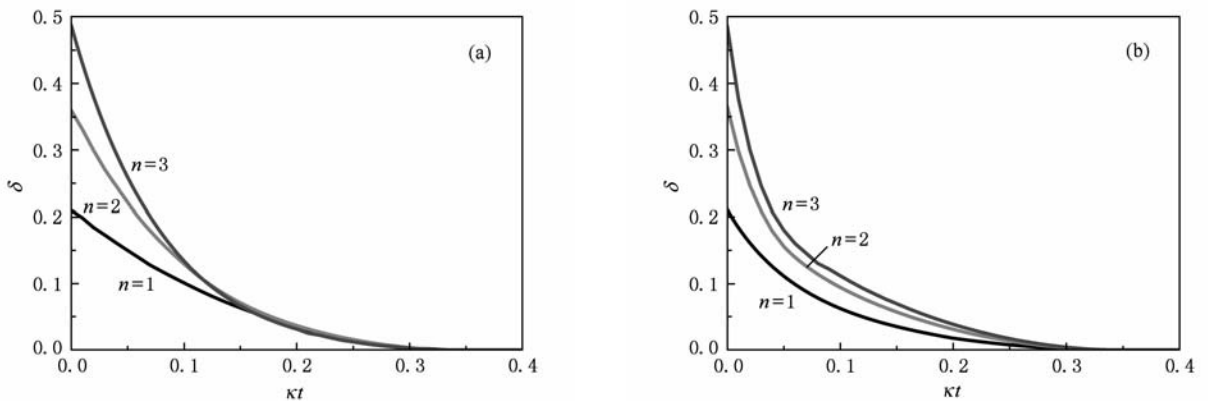


图 5 不同压缩粒子数态的  $\delta$  随  $\kappa t$  的变化 (a)  $\lambda = 0.3$ , (b)  $\lambda = 0.8$

## 5. 结 论

本文通过利用有序算符内的积分技术和量子力学相干态表象,研究了带三参数的广义压缩算符产生的广义压缩粒子数态的非经典性质以及在光子损失通道中的量子退相干问题.研究表明,广义压缩粒子数态实际上可作为 Hermite 多项式激发压缩真空态的叠加形式.为展现广义压缩粒子数态的非经典特性,计算了其压缩特征、 $Q$  参数以及 Wigner 函数等.特别地,利用算符的 Weyl 编序下相似不变

性质,解析地导出了广义压缩粒子数态的 Wigner 函数表达式,发现其实际上是一个 Laguerre-Gaussian 函数.此外,根据已经建立了的在耗散通道中的 Wigner 函数的时间演化公式,即初态 Wigner 函数与任意时刻的 Wigner 函数之间的关系,进一步导出了广义压缩粒子数态在耗散量子通道中的 Wigner 函数的解析表达式,并通过绘制图形展现演化情况.结果表明,当演化时间超过阈值  $\frac{1}{2}\ln 2$  时, Wigner 函数分布不会出现负部,且负部体积随压缩参数的增加而减少.

- 
- [1] Bouwmeester D 2000 *The Physics of Quantum Information* (Berlin: Springer)
- [2] Dodonov V V 2002 *J. Opt. B: Quantum Semiclassical Opt.* **4** R1
- [3] Short R, Mandel L 1983 *Phys. Rev. Lett.* **51** 384
- [4] Wigner E 1932 *Phys. Rev.* **40** 749
- [5] Hillery M 1984 *Phys. Rep.* **106** 121
- [6] Schleich W P 2001 *Quantum Optics in Phase Space* (Berlin: Wiley-VCH)
- [7] Anatole K, Karol Z 2004 *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **6** 396
- [8] Meng X G, Wang J S 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 4578 (in Chinese) [孟祥国、王继锁 2007 物理学报 **56** 4578]
- [9] Meng X G, Wang J S, Liang B L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2160 (in Chinese) [孟祥国、王继锁、梁宝龙 2007 物理学报 **56** 2160]
- [10] Hu L Y, Fan H Y 2009 *Chin. Phys. B* **18** 4657
- [11] Ye B, Xu W B, Gu B J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 0689 (in Chinese) [叶 宾、须文波、顾斌杰 2008 物理学报 **57** 0689]
- [12] Hu L Y, Fan H Y 2008 *J. Opt. Soc. Am. B* **25** 1955
- [13] Hu L Y, Fan H Y 2009 *Phys. Scr.* **79** 035004
- [14] Fan H Y, Hu L Y 2008 *Mod. Phys. Lett. B* **22** 2435
- [15] Fan H Y, Hu L Y 2008 *Opt. Commun.* **281** 5571
- [16] Fan H Y, Zaidi H R, Klauder J R 1987 *Phys. Rev. D* **35** 1831
- [17] Fan H Y, Zaidi H R 1988 *Phys. Rev. A* **37** 2985
- [18] Fan H Y 1997 *Representation and Transformation Theory in Quantum Mechanics* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technical Publisher) (in Chinese) [范洪义 1997 量子力学表象与变换论(上海:上海科技出版社)]
- [19] Fan H Y, Wunsche A 2000 *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **2** 464
- [20] Fan H Y, Chen J H 2002 *Commun. Theor. Phys.* **38** 147
- [21] Fan H Y 2005 *From Quantum Mechanics to Quantum Optics—Development of the Mathematical Physics* (Shanghai: Shanghai Jiao Tong University Press) (in Chinese) [范洪义 2005 从量子力学到量子光学——数理进展(上海:上海交通大学出版社)]
- [22] Glauber R J 1963 *Phys. Rev.* **130** 2529
- [23] Klauder J R, Skargerstam B S 1985 *Coherent States* (Singapore: World Scientific)
- [24] Olivares S, Paris M G A 2005 *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **7** S616
- [25] Hu L Y, Fan H Y 2009 *Chin. Phys. B* **18** 902
- [26] Fan H Y, Hu L Y 2009 *Chin. Phys. B* **18** 0611
- [27] Lee C T 1990 *Phys. Rev. A* **42** 1608
- [28] Fan H Y, Tang X B 2008 *Development of the Mathematical Physics in Quantum Mechanics* (Hefei: University of Science and Technology of China Press) (in Chinese) [范洪义、唐绪兵 2008 量子力学数理基础进展(合肥:中国科技大学出版社)]
- [29] Hu L Y, Fan H Y 2009 *Opt. Commun.* **282** 4379

# Nonclassicality and decoherence of generalized squeezed Fock state<sup>\*</sup>

Xu Xue-Xiang<sup>1)2)</sup> Yuan Hong-Chun<sup>2)</sup> Hu Li-Yun<sup>1)†</sup>

1) (*College of Physics and Communication Electronics, Jiangxi Normal University, Nanchang 330022, China*)

2) (*Department of Physics, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200030, China*)

(Received 5 October 2009; revised manuscript received 17 November 2009)

## Abstract

We study the nonclassicality and decoherence in photon-loss channel of generalized squeezed Fock state, which is related to the squeezed operator with three real parameters. By using the Weyl ordering invariance under similarity transformations and the technique of integration within an ordered product of operators, we obtain the compact Wigner function of the generalized squeezed Fock state (Laguerre-Gaussian function). According to the integration formula of the time evolution of the Wigner function, the Wigner expression in photon-loss channel is analytically deduced. In particular, we discussed the nonclassicality from the negativity of the Wigner function.

**Keywords:** squeezing effect,  $Q$ -parameter, Wigner function, nonclassicality

**PACC:** 4250, 0365

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10775097, 10874174) and the Research Foundation of the Education Department of Jiangxi Province, China (Grant No. GJJ10097).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: hlyun2008@gmail.com; hlyun@jxnu.edu.cn