

三维钻石型等级晶格上量子 Heisenberg 系统的 临界性质*

邹维科 孔祥木[†] 王春阳 高中扬

(曲阜师范大学物理工程学院, 曲阜 273165)

(2009 年 5 月 2 日收到; 2009 年 11 月 15 日收到修改稿)

利用重整化群方法, 研究了三维钻石型等级晶格上的各向异性量子 Heisenberg 模型, 获得了系统的相图和临界性质. 结果表明: 对于铁磁系统, 在各向同性 Heisenberg 极限下, 系统存在有限温度的相变, 并计算了系统的序参量和临界指数; 对于反铁磁系统, 在各向同性 Heisenberg 极限下, 临界温度不等于零, 在临界线上不存在重入行为.

关键词: 相图, Heisenberg 模型, 钻石型等级晶格, 重整化群方法

PACC: 6460A, 6460C, 6460F

1. 引 言

各向异性量子 Heisenberg 模型在凝聚态物理、统计物理和量子信息等领域中有广泛的应用^[1-5]. 对于分形晶格上的 Heisenberg 系统的相变与临界性质, 人们已经做了大量研究. 1979 年, Berker 和 Ostlund^[6] 提出可以利用 Migdal-Kadanoff 重整化群 RG 方法研究钻石型等级晶格上自旋系统的临界性质, 并且可以严格计算系统的自由能. 1983 年, Caride 等^[7] 利用实空间 RG 方法研究了二维自相似等级晶格上的铁磁 Heisenberg 系统的相图与临界性质, 结果表明: 在讨论各向异性 Heisenberg 系统的临界性质时, 该晶格可以很好地模拟正方晶格, 当各向异性参数 $\Delta = 0$ 时该系统不存在有限温度的相变. Sousa 等^[8] 利用一种改进的量子 RG 方法研究了相同的问题, 给出了同样的结论. 1991 年, Chame^[9] 把实空间 RG 方法推广到远离临界点的区域研究了该系统的序参量, 发现在各向同性 Heisenberg 极限下, 有限温度时系统的序参量始终等于零, 表明该系统不存在有限温度的相变. 1993 年, Souza^[10] 利用实空间 RG 方法研究了二维自相似等级晶格上的反铁磁 Heisenberg 系统的临界性质, 结果表明在 $\Delta \leq 0.399$ 时, 临界温度 T_N 消失. 也

就是说, 当各向异性参数很小, 在有限温度时, 量子涨落能够破坏系统的有序相. 在临界线上存在重入行为. 在 $0 \leq \Delta < 1$ 时, 对于相同的 Δ 值反铁磁临界线上的值大于铁磁临界线上的值, 在 $\Delta = 1$ 时二者重合. 2000 年, Branco 和 Sousa^[11] 利用有限尺度 RG 方法和 Migdal-Kadanoff 近似方法研究了二维正方晶格上的反铁磁 Heisenberg 系统, 给出了相同的结论. 对于立方格子上的铁磁 Heisenberg 系统, 人们已经利用块自旋近似^[12], Migdal-Kadanoff 近似^[13,14] 和平均场 RG 方法^[15] 进行了研究. 结果表明, 在各向同性 Heisenberg 极限下系统是否存在有限温度的相变与晶格的维数有密切的关系.

本文利用格点消约 RG 方法研究三维钻石型等级晶格上的铁磁各向异性量子 Heisenberg 系统的相图和临界性质, 并且把 RG 方法推广到远离临界点的区域研究该系统的序参量. 给出系统的关联长度临界指数和序参量临界指数. 在研究铁磁系统的基础上, 利用等效变换和 RG 变换相结合的方法研究该晶格上的反铁磁系统, 给出系统的相图.

2. 铁磁系统的相图和临界性质

考虑三维钻石型等级晶格上的各向异性 Heisenberg 系统, 其约化哈密顿量为

* 国家自然科学基金(批准号:10775088)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: kongxm@mail.qfnu.edu.cn

$$\mathbf{H} = \sum_{\langle ij \rangle} K[(1 - \Delta)(\sigma_i^x \sigma_j^x + \sigma_i^y \sigma_j^y) + \sigma_i^z \sigma_j^z], \quad (1)$$

其中 $K = J/k_B T$, $K > 0$ 和 $K < 0$ 分别对应铁磁系统和反铁磁系统, J 是系统的相互作用常数, k_B 是玻尔兹曼常数, T 是绝对温度; σ_i^α ($\alpha = x, y, z$) 是 i 格点上泡利矩阵的 α 分量, 求和遍及等级晶格上的近邻格点对. 各向异性参数 Δ 满足 $-\infty < \Delta \leq 1$. 当 $\Delta = 1$ 时为 Ising 系统, $\Delta = 0$ 时为各向同性 Heisenberg 系统, $\Delta \rightarrow -\infty$ 时为 XY 系统.

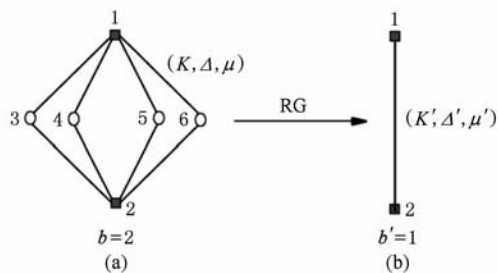


图 1 三维钻石型等级晶格上铁磁 Heisenberg 系统的 RG 变换
(a) 等级晶格的生成元, (b) 对生成元进行一步变换后的晶格

RG 变换方法广泛应用于经典自旋系统临界性质的研究中^[16-19], 利用这种方法对该系统进行研究, 在变换过程中, 因为相邻的生成元之间的哈密顿量是不对易的, 所以不能把生成元从晶格中分离出来. 为了达到分离出来得到系统的 RG 方程的目的, 在计算过程中忽略相邻生成元哈密顿量之间的不对易项. 基于这种近似, 可以用图 1(a) 所示的生成元来进行 RG 变换. 对图 1(a) 所示的生成元进行一步变换, 消去内部格点 3, 4, 5 和 6 上的自旋. 生成元变成了只含有 σ_1, σ_2 两个自旋的一条键, 如图 1(b) 所示^[20,21]. 这个过程可以用下式表示:

$$\exp(\mathbf{H}'_{12}) = \text{Tr}_{3456} \exp(\mathbf{H}_{123456}), \quad (2)$$

其中 Tr_{3456} 表示对图 1(a) 所示集团内点上的自旋求迹. RG 变换前后系统的约化哈密顿量分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{123456} = & \sum_{\langle ij \rangle} K[(1 - \Delta)(\sigma_{13}^{xy} + \sigma_{23}^{xy} + \sigma_{14}^{xy} + \sigma_{24}^{xy} \\ & + \sigma_{15}^{xy} + \sigma_{25}^{xy} + \sigma_{16}^{xy} + \sigma_{26}^{xy}) \\ & + \sigma_{13}^z + \sigma_{23}^z + \sigma_{14}^z + \sigma_{24}^z + \sigma_{15}^z \\ & + \sigma_{25}^z + \sigma_{16}^z + \sigma_{26}^z], \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}'_{12} = & K'_0 + K'[(1 - \Delta')(\sigma_1^x \sigma_2^x + \sigma_1^y \sigma_2^y) \\ & + \sigma_1^z \sigma_2^z], \quad (4) \end{aligned}$$

其中 $\sigma_{ij}^{xy} \equiv \sigma_i^x \sigma_j^x + \sigma_i^y \sigma_j^y$, $\sigma_{ij}^z \equiv \sigma_i^z \sigma_j^z$, (K, Δ) 和

(K', Δ') 分别表示 RG 变换前后系统的约化相互作用常数和各向异性参数. K'_0 是为了保持(2)式成立引入的常数.

利用 Caride 等^[7,22] 提出的计算方法, 通过计算(2)式中的部分迹就可以求出 RG 方程. 在 σ_1^z 和 σ_2^z 的共同表象中, 结合(4)式把(2)式中的 $\exp(\mathbf{H}'_{12})$ 进行级数展开可得

$$\begin{aligned} \exp(\mathbf{H}'_{12}) = & 1 + K'[(1 - \Delta')\sigma_{12}^{xy} + \sigma_{12}^z] + K'_0 \\ & + \frac{\{K'[(1 - \Delta')\sigma_{12}^{xy} + \sigma_{12}^z] + K'_0\}^2}{2!} \\ & + \frac{\{K'[(1 - \Delta')\sigma_{12}^{xy} + \sigma_{12}^z] + K'_0\}^3}{3!} \\ & + \dots, \quad (5) \end{aligned}$$

考虑到泡利算符之间的对易和反对易关系, (5)式右端可以简化为

$$\begin{aligned} \exp(\mathbf{H}'_{12}) = & a' + b'_{12}(\sigma_1^x \sigma_2^x + \sigma_1^y \sigma_2^y) \\ & + c'_{12} \sigma_1^z \sigma_2^z, \quad (6) \end{aligned}$$

其中, a', b'_{12}, c'_{12} 是 K'_0, K', Δ' 的函数, 它们之间的函数关系式可由下面的计算求出.

\mathbf{H}'_{12} 在 σ_1^z 和 σ_2^z 的共同表象中的矩阵形式为

$$\mathbf{H}'_{12} = \begin{bmatrix} K' + K'_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K' + K'_0 & 2K'(1 - \Delta') & 0 \\ 0 & 2K'(1 - \Delta') & -K' + K'_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K' + K'_0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

由(7)式可以计算出 $\exp(\mathbf{H}'_{12})$ 的矩阵形式为

$$\exp(\mathbf{H}'_{12}) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2(e^{\lambda_2} + e^{\lambda_3}) & 1/2(e^{\lambda_2} - e^{\lambda_3}) & 0 \\ 0 & 1/2(e^{\lambda_2} - e^{\lambda_3}) & 1/2(e^{\lambda_2} + e^{\lambda_3}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_4} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

其中

$$\lambda'_1 = \lambda'_4 = K' + K'_0, \quad (9)$$

$$\lambda'_2 = -K' + K'_0 + 2W', \quad (10)$$

$$\lambda'_3 = -K' + K'_0 - 2W' \quad (11)$$

为 \mathbf{H}'_{12} 的本征值, 这里

$$W' = K'(1 - \Delta'). \quad (12)$$

(6)式右端在 σ_1^z 和 σ_2^z 的共同表象中的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} a' + c'_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a' - c'_{12} & 2b'_{12} & 0 \\ 0 & 2b'_{12} & a' - c'_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a' + c'_{12} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

联立(8)和(13)式可以得到 K' 和 Δ' 与展开系数 a' , b'_{12}, c'_{12} 之间的关系式为

$$\exp(4K') = \frac{(a' + c'_{12})^2}{(a' - c'_{12})^2 - 4b'^2_{12}}, \quad (14)$$

$$\exp(4K'\Delta') = \frac{(a' + c'_{12})^2}{(a' - c'_{12} + 2b'_{12})^2}. \quad (15)$$

用同样的方法,把 $\exp(\mathbf{H}_{123456})$ 在 $\{\sigma_i^z\}$ ($i=1,2,\dots,6$)的共同表象中展开,考虑到泡利算符之间的对易与反对易关系, $\exp(\mathbf{H}_{123456})$ 的展开式可简化为

$$\begin{aligned} \exp(\mathbf{H}_{123456}) = & a + \sum_{i < j} [b_{ij}\sigma_{ij}^{xy} + c_{ij}\sigma_{ij}^z] \\ & + \sum_{i < j, k < l} [d_{\langle ij \rangle \langle kl \rangle} \sigma_{ij}^{xy} \sigma_{kl}^{xy} \\ & + e_{\langle ij \rangle \langle kl \rangle} \sigma_{ij}^{xy} \sigma_{kl}^z + f_{\langle ij \rangle \langle kl \rangle} \sigma_{ij}^z \sigma_{kl}^z] \\ & + \sum_{i < j, k < l, m < n} [g_{\langle ij \rangle \langle kl \rangle \langle mn \rangle} \sigma_{ij}^{xy} \sigma_{kl}^{xy} \sigma_{mn}^{xy} \\ & + h_{\langle ij \rangle \langle kl \rangle \langle mn \rangle} \sigma_{ij}^{xy} \sigma_{kl}^{xy} \sigma_{mn}^z \\ & + q_{\langle ij \rangle \langle kl \rangle \langle mn \rangle} \sigma_{ij}^{xy} \sigma_{kl}^z \sigma_{mn}^z \\ & + r_{\langle ij \rangle \langle kl \rangle \langle mn \rangle} \sigma_{ij}^z \sigma_{kl}^z \sigma_{mn}^z], \quad (16) \end{aligned}$$

求和遍及图 1(a)中的所有格点, $(ij) \neq (kl) \neq (mn)$. $a, b_{ij}, c_{ij}, \dots, r_{\langle ij \rangle \langle kl \rangle \langle mn \rangle}$ 是 K, Δ 的函数. 对(16)式中格点 3, 4, 5 和 6 上的自旋求迹, 并利用(2)式, 可得 $a' = 16a, b'_{12} = 16b_{12}, c'_{12} = 16c_{12}$. 进而得到 RG 方程为

$$K' = g(K, \Delta), \quad \Delta' = h(K, \Delta), \quad (17)$$

其中 $g(K, \Delta)$ 和 $h(K, \Delta)$ 的形式非常复杂, 这里不再给出其详细的表达式.

利用 RG 方程(17), 可以得到系统的相图. 在 $0 \leq \Delta \leq 1$ 时, 系统存在两个稳定不动点 $(\Delta, 1/K) = (1, 0)$ 和 $(1, \infty)$, 两个不稳定不动点 $(\Delta, 1/K) = (0, 2.695)$ 和 $(1, 3.83)$ 与文献[21, 23, 24]中的结果相同, 这两个不稳定不动点分别对应 Heisenberg 不动点和 Ising 不动点. 进一步计算了关联长度临界指数 ν , 在 Heisenberg 不动点, $\nu = 1.51091$; 在 Ising 不动点, $\nu = 1.06482$. 连接 Heisenberg 不动点和 Ising 不动点的临界线把相图分成两部分: 铁磁相(F)和顺磁相(P), 并且显示了各向同性 Heisenberg 系统到 Ising 系统的交跨行为(见图 2). 由此说明, 当 $0 < \Delta \leq 1$ 时, 该系统与 Ising 系统属于同一普适类.

在各向同性($\Delta = 0$)和各向异性($0 < \Delta \leq 1$)情况下, 系统都存在有限温度的相变. 这与三维等级晶

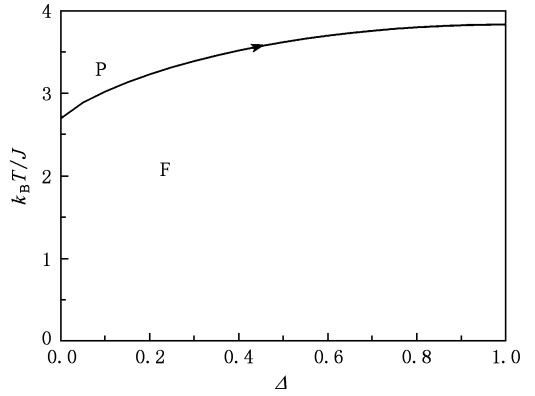


图 2 铁磁 Heisenberg 系统的相图

格上 Heisenberg 系统的结论一致^[12-15], 但与二维等级晶格上在各向同性 Heisenberg 极限下, 有限温度时系统不存在有序相的结论不同^[7, 8]. 这很好地证实了文献[25]和[26]给出的结论, 在维度大于 2 的分形晶格上 Heisenberg 系统存在对称性自发破缺, 进一步证明了 Mermin-Wagner 定理在分形结构上的正确性. 这也说明分形维度越低, 量子涨落效应越明显(对于一维各向同性 Heisenberg 系统, 在 $T \geq 0$ 时, 量子涨落能够破坏系统的有序相. 对于二维晶格上的各向同性 Heisenberg 系统, 在有限温度时系统不存在有序相但基态有序^[8]).

3. 铁磁系统的序参量

为了得到 Δ 取不同值时铁磁系统序参量 $M(K)$ 随温度的变化, 把 RG 方法推广到远离临界点的区域^[9]. 引入关于 μ 的 RG 方程, 其中 μ 是格点上的约化磁矩, 原则上可以选初始值 $\mu = 1$. 为了使计算更为简单, 我们固定图 1(a) 和 (b) 中外点 1 上的自旋在 z 轴方向, 其他格点上的自旋方向完全任意. 在给定位形中, 每个格点对集团磁矩 z 分量 m_z 的贡献正比于格点的配位数^[27]. 每种位形将以玻尔兹曼因子为权重, 对集团磁矩 z 分量 m_z 的平均值贡献一个数值. 在 RG 变换过程中, 集团磁矩 z 分量的平均值保持不变,

$$\langle m'^z_{12} \rangle = \langle m^z_{123456} \rangle,$$

即

$$\begin{aligned} & \text{Tr}_2 [\exp(\mathbf{H}'_{12})(\sigma_1^z + \sigma_2^z)\mu^z] / \text{Tr}_2 [\mathbf{H}'_{12}] \\ & = \text{Tr}_{23456} [\exp(\mathbf{H}_{123456})(4\sigma_1^z + 4\sigma_2^z + 2\sigma_3^z \\ & \quad + 2\sigma_4^z + 2\sigma_5^z + 2\sigma_6^z)\mu^z] / \text{Tr}_{23456} [\mathbf{H}_{123456}]. \quad (18) \end{aligned}$$

把(6)和(16)式代入(18)式,经过计算集团磁矩的表达式 $\langle m_{12}^z \rangle$ 和 $\langle m_{123456}^z \rangle$ 可以表示为

$$\langle m_{12}^z \rangle = [(a' + c'_{12})/a']\mu', \quad (19)$$

$$\langle m_{123456}^z \rangle = [(4a + 4c_{12} + 2c_{13} + 2c_{14} + 2c_{15} + 2c_{16})/a]\mu, \quad (20)$$

利用(19)和(20)式,可以确定 μ 和 μ' 之间的函数关系为

$$\mu' = f(K, \Delta, \mu), \quad (21)$$

其中 $f(K, \Delta, \mu)$ 的具体形式很复杂,这里不再给出其详细表达式.

在有序相,把 $t = \tanh(2K)$ 代入 RG 方程(17), RG 流收敛于 Ising 不动点($t = 0, \Delta = 1$). 把所得数据 $t = \tanh(2K)$ 代入(21)式并利用式子

$$M(K, \Delta) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu^{(n)} / B^{nd}), \quad (22)$$

可以得到 $M(t, \Delta)^{[9]}$,其中已经利用初始值 $\mu = 1$, $\mu^{(n)}$ 是经过 n 次重整化变换格点上的约化磁矩, B 表示变换的标度因子 $B = b/b'$, d 表示晶格的分形维数, n 表示重整化变换的次数.进而可以得到 Δ 取不同值时,约化磁化强度 $M(T)/M(0)$ 随温度 $k_B T/J$ 的变化.

在图3中,我们给出 Δ 取不同值时 $M(T)/M(0)$ 随 $k_B T/J (= 1/K)$ 的变化曲线.研究表明,在 $0 \leq \Delta \leq 1$ 时,系统都存在磁化强度 $M(K) > 0$,这与二维等级晶格上的在各向同性 Heisenberg 极限下系统磁化强度始终为零的结论明显不同^[9,28].当 $K \leq K'_c$ 时, $M(K) = 0$,其中 K'_c 是与 $M(K) = 0$ 对应的温度,与图2中直接计算得到的临界线上的 K_c 相等.在 $K > K'_c$ 时, $M(K) > 0$,特别是当 $\Delta = 0$ 和 $K > K'_c$ 时, $M(K) > 0$,这很好地证实了三维钻石型等级晶格上的各向同性 Heisenberg 系统存在有限温度的相变.

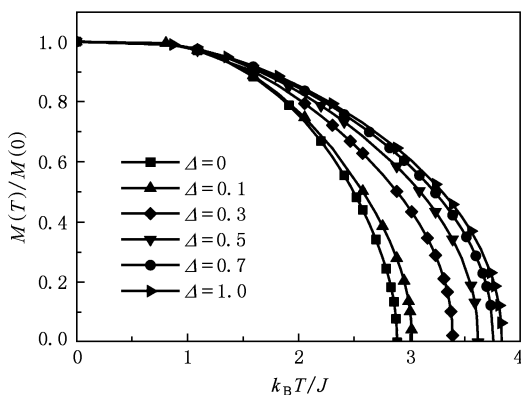


图3 在 Δ 取不同值时,约化磁化强度随温度 $k_B T/J (= 1/K)$ 的变化曲线

在临界点附近,磁化强度以 $M = A(1 - T/T_c)^\beta$ 的形式给出.利用图3中的数据拟合 $\ln M = \beta \ln(1 - T/T_c) + \ln A$,可得当 $0 < \Delta \leq 1$ 时,序参量临界指数 $\beta = 0.463$,这与文献[23]和[24]中的结果一致;当 $\Delta = 0$ 时, $\beta = 1$.这与前面通过相图得到的结论一致,在 $0 < \Delta \leq 1$ 时,系统属于 Ising 普适类.

4. 反铁磁系统的相图

以上我们研究了三维钻石型等级晶格上的铁磁 Heisenberg 系统,本节将研究该晶格上的反铁磁 Heisenberg 系统,其哈密顿量如(1)式所示.由于该晶格的结构特点,使得在零温时直接通过格点消约变换反铁磁系统的基态将变为铁磁系统的基态,这意味着系统存在等效的铁磁相互作用,所以不能直接通过格点消约 RG 方法求得系统的 RG 方程.我们利用等效变换和 RG 变换相结合的方法,利用等效变换给出等效的铁磁系统.然后,利用 RG 变换给出等效铁磁系统的 RG 方程.对于反铁磁系统,由于第 n 代和第 $n-1$ 代等级晶格上系统的配分函数之间满足下面的关系: $z_{n-1}(K', \Delta') = \text{Tr}_n [z_n(K, \Delta)]$,其中 Tr_n 表示对第 n 代等级晶格内点上的自旋求迹,可以认为在热力学极限 $n \rightarrow \infty$ 时,反铁磁和铁磁系统之间存在等效关系.因此,如果已经知道等效铁磁 Heisenberg 系统的临界条件就可以求得反铁磁 Heisenberg 系统的临界条件^[29,30].

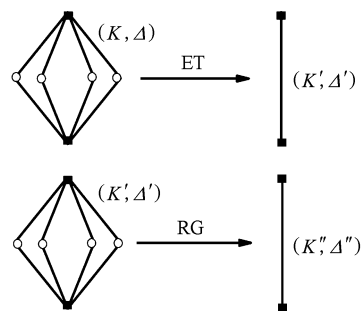


图4 反铁磁 Heisenberg 系统的等效变换(ET)和重整化群变换(RG)

如图4所示,对于反铁磁系统,忽略晶格不同生成元之间哈密顿量的不对易项,利用等效变换(ET)即对生成元内点上的自旋求迹得到等效铁磁系统

$$\exp(\mathbf{H}'_{12}) = \text{Tr}_{3456} \exp(\mathbf{H}_{123456}), \quad (23)$$

式中 \mathbf{H}_{123456} 为生成元上反铁磁系统的哈密顿量,如(3)式所示其中 $K < 0$. \mathbf{H}'_{12} 如(4)式所示,为等效变换后等级晶格上一条键上铁磁系统的哈密顿量.按

照求解铁磁系统 RG 方程 (17) 的方法可以得到 (24) 式, 利用第一部分的 RG 方程 (17) 给出等效铁磁系统的 RG 方程 (25),

$$K' = g(K, \Delta), \quad \Delta' = h(K, \Delta), \quad (24)$$

$$K'' = g(K', \Delta'), \quad \Delta'' = h(K', \Delta'), \quad (25)$$

其中, $K < 0$ 对应反铁磁系统, $K' > 0$ 和 $K'' > 0$ 对应铁磁系统.

利用 RG 方程 (25), 我们可以得到等效铁磁系统的临界线上的 (K', Δ') 和不动点, 然后利用等效变换 (24) 式把 (K', Δ') 和不动点变换为反铁磁临界线上值 (K, Δ) 和不动点, 进而得到反铁磁系统的相图如图 5 所示.

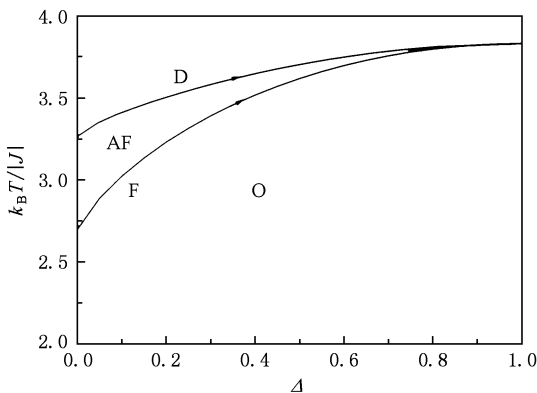


图 5 反铁磁和铁磁 Heisenberg 系统相图的比较

反铁磁临界线 (AF) 把相图分为有序相 (O) 和无序相 (D), 系统存在着两个稳定不动点 $(\Delta, 1/K) = (1, 0)$ 和 $(1, -\infty)$, 两个不稳定不动点 $(\Delta, 1/K) = (0, -3.265)$ 和 $(1, -3.83)$. 通过与铁磁系统临界线 (F) 的比较发现, 在 $0 \leq \Delta < 1$ 时, 对于相同的 Δ 值, 临界线 AF 上的值大于临界线 F 上的值; 在 $\Delta = 1$ 时, 两者重合. 在各向同性 Heisenberg 极限下, 反铁磁系统的临界温度 T_N 不等于零, 并且在临界线上不存在重入行为. 这与利用平均场 RG 方法求得立方晶格上 Heisenberg 系统的结论一致^[31], 但与二维等级晶格上反铁磁 Heisenberg 系统的结论明显不同^[10,11].

5. 结 论

本文研究了三维钻石型等级晶格上铁磁和反铁磁各向异性 Heisenberg 系统的相图与临界性质. 对于铁磁系统: 给出了 Heisenberg 不动点和 Ising 不动点以及相应的临界指数, 指出在各向同性 Heisenberg 极限下, 系统存在有限温度的相变. 通过对序参量 $M(K)$ 的研究我们发现, 在 $0 \leq \Delta \leq 1$ 时, 系统始终存在序参量 $M(T) > 0$. 对于反铁磁系统: 在各向同性 Heisenberg 极限下, 临界温度 T_N 不等于零并且在临界线上不存在重入行为.

- [1] Boyarchenkov A S, Ovchinnikov A S, Bostrem I G, Baranov N V, Hosokoshi Y, Inoue K 2005 *J. Phys.: Condens. Matt.* **17** 1769
- [2] Albuquerque A F, Troyer M, Oitmaa J 2008 *Phys. Rev. B* **78** 132402
- [3] Zhang S J, Jiang J J, Liu Y J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 531 (in Chinese) [张松俊、蒋建军、刘拥军 2008 物理学报 **57** 531]
- [4] Cai Z, Lu W B, Liu Y J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7267 (in Chinese) [蔡卓、陆文彬、刘拥军 2008 物理学报 **57** 7267]
- [5] Qin M, Tian D P, Tao Y J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 5395 (in Chinese) [秦猛、田东平、陶应娟 2008 物理学报 **57** 5395]
- [6] Berker A N, Ostlund S 1979 *J. Phys. C: Solid State Phys.* **12** 4961
- [7] Caride A O, Tsallis C, Zanette S 1983 *Phys. Rev. Lett.* **51** 145
- [8] Sousa J R, Branco N S, Boechat B, Cordeiro C 2003 *Phys. A* **328** 167
- [9] Chame A 1991 *J. Phys.: Condens. Matt.* **3** 9115
- [10] Souza A M 1993 *Phys. Rev. B* **48** 3744
- [11] Branco N S, Sousa J R 2000 *Phys. Rev. B* **62** 5742
- [12] Mariz A M, Santos R M, Tsallis C, Santos R R 1985 *J. Phys. Lett. A* **108** 95
- [13] Suzuki M, Takano H 1979 *Phys. Lett. A* **69** 426
- [14] Takano H, Suzuki M 1981 *J. Stat. Phys.* **26** 635
- [15] Plascak J A 1984 *J. Phys. A: Math. Gen.* **17** 597
- [16] Kong X M, Lin Z Q, Zhu J Y 2000 *Sci. Chin. Ser. A* **30** 661 (in Chinese) [孔祥木、林振全、朱建阳 2000 中国科学, A 辑 **30** 661]
- [17] Li Y, Kong X M, Huang J Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1346 (in Chinese) [李英、孔祥木、黄家寅 2002 物理学报 **51** 1346]
- [18] Liu J, Kong X M, Li Y P, Huang J Y 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2275 (in Chinese) [刘杰、孔祥木、李永平、黄家寅 2004 物理学报 **53** 2275]
- [19] Yin X C, Yin H, Kong X M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4901 (in Chinese) [尹训昌、尹慧、孔祥木 2006 物理学报 **55** 4901]
- [20] Sousa J R, Boechat B, Cordeiro C, Branco N S 2005 *Phys. Rev. E* **71** 016135
- [21] Branco N S, Sousa J R, Ghosh A 2008 *Phys. Rev. E* **77** 031129
- [22] Mariz A M, Tsallis C, Caride A O 1985 *J. Phys. C: Solid State Phys.* **18** 4189

- [23] Stinchcombe R B 1981 *J. Phys. C; Solid State Phys.* **14** 397
- [24] Yang Z R 1988 *Phys. Rev. B* **38** 728
- [25] Cassi D 1992 *Phys. Rev. Lett.* **68** 3631
- [26] Cassi D 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 2941
- [27] Caride A O, Tsallis C 1987 *J. Phys. A; Math. Gen.* **20** 665
- [28] Continentino M A, Mello E V 1990 *J. Phys.; Condens. Matter* **2** 3131
- [29] Qin Y, Yang Z R 1991 *Phys. Rev. B* **43** 8576
- [30] Yang Z R 1996 *Fractal Physics* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) 83—88 (in Chinese) [杨展如 1996 分形物理学(上海:上海科技教育出版社)第 83—88 页]
- [31] Sousa J R, Plascak J A 1997 *J. Phys. Lett. A* **237** 66

Critical behavior of the quantum Heisenberg model on three-dimensional diamond-type hierarchical lattice *

Zou Wei-Ke Kong Xiang-Mu[†] Wang Chun-Yang Gao Zhong-Yang

(College of Physics and Engineering, Qufu Normal University, Qufu 273165, China)

(Received 2 May 2009; revised manuscript received 15 November 2009)

Abstract

With a real-space renormalization-group method, the anisotropic quantum Heisenberg model on three-dimensional diamond-type hierarchical lattice is studied, and the phase diagram and critical properties are obtained. For the ferromagnetic system, it is shown that there is a finite-temperature phase transition for $\Delta = 0$ where Δ is the anisotropy parameter. The order parameter and critical exponents are also calculated. For the antiferromagnetic model, we find that the critical temperature is not equal to zero for $\Delta = 0$ and there is not reentrant behavior on the critical line.

Keywords: phase diagram, Heisenberg model, diamond-type hierarchical lattice, renormalization-group method

PACC: 6460A, 6460C, 6460F

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10775088).

[†] Corresponding author. E-mail: kongxm@mail.qfnu.edu.cn