

位势问题改进的无网格局部 Petrov-Galerkin 法^{*}

郑保敬 戴保东[†]

(太原科技大学工程力学系, 太原 030024)

(2009 年 10 月 12 日收到; 2009 年 11 月 10 日收到修改稿)

将滑动 Kriging 插值法与无网格局部 Petrov-Galerkin 法相结合, 采用 Heaviside 分段函数作为局部弱形式的权函数, 提出改进的无网格局部 Petrov-Galerkin 法, 进一步将这种无网格法应用于位势问题, 并推导相应的离散方程. 因为滑动 Kriging 插值法构造的形函数满足 Kronecker 函数性质, 所以本文建立的改进的无网格局部 Petrov-Galerkin 法可以像有限元法一样直接施加边界条件; 由于采用 Heaviside 分段函数作为局部弱形式的权函数, 因此在计算刚度矩阵时只涉及边界积分, 而没有区域积分. 此外, 还对本方法中一些重要参数的选取进行了研究. 数值算例表明, 本文建立的改进的无网格局部 Petrov-Galerkin 法具有数值实现简单、计算量小以及方便施加边界条件等优点.

关键词: 无网格局部 Petrov-Galerkin 法, 滑动 Kriging 插值法, 无网格法, 位势问题

PACC: 0200, 0260, 4630C

1. 引 言

无网格法是一种新的求解偏微分方程边值问题的数值方法, 是目前科学和工程计算方法的研究热点之一^[1, 2]. 无网格法将求解域离散为独立的节点, 基本场函数的逼近不依赖网格, 在数值模拟断裂力学、大变形及移动边界等问题时具有很多基于网格的数值方法无法比拟的优点^[3-9]. 目前发展的无网格法主要包括无单元 Galerkin 法 (element-free galerkin method, EFG)^[10, 11], 再生核粒子法 (reproducing kernel particle method, RKPM)^[12, 13], 有限点法 (finite point method, FPM)^[14], 单位分解法 (partition of unity method)^[15], 点插值法 (point interpolation method, PIM)^[16], 最小二乘配点无网格法^[17]、复变量无网格方法^[18]、无网格局部 Petrov-Galerkin 法^[19] 以及基于边界积分方程的无网格法^[20-23] 等.

无网格局部 Petrov-Galerkin 法采用非 Galerkin 的局部弱形式, 其试函数和加权函数可以取自不同的函数空间, 数值积分是在基于节点的局部子域上进行的, 不需要积分背景网格, 因此是一种真正的无网格法, 该方法在很多领域得到了广泛应用^[24].

但是这一无网格法采用移动最小二乘法构造近似函数^[25], 形函数不满足 Kronecker- δ 函数性质, 因此不能直接施加本质边界条件, 影响了该方法的计算效率.

滑动 Kriging 插值法是一种基于随机过程的统计预测方法^[26], 其对区域变量求线性、无偏和最优内插估计值, 具有平滑效应和估计方程最小的统计特征, 而且构造的形函数满足 Kronecker- δ 函数的插值特性. 将滑动 Kriging 插值法引入无网格法, 可以明显提高无网格法的计算效率和精度^[27-29]. 本文将滑动 Kriging 插值法与无网格局部 Petrov-Galerkin 法相结合, 采用 Heaviside 分段函数作为局部弱式的权函数, 建立改进的无网格局部 Petrov-Galerkin 法, 将该方法应用于位势问题, 并推导了相应的离散方程.

本文详细推导滑动 Kriging 插值法以及求解位势问题的改进无网格局部 Petrov-Galerkin 法的离散方程, 并通过三个数值算例验证该方法的有效性.

2. 滑动 Kriging 插值法

2.1. 构造形函数

考虑定义在问题域 Ω 及其边界 Γ 上的场函数

^{*} 山西省自然科学基金 (批准号: 2007011009), 山西省高校科技研究开发计划 (批准号: 20091131), 太原科技大学博士启动基金 (批准号: 200708) 资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: Dai_baodong@126.com

$u(\mathbf{x})$, 设问题域通过 N 个场节点离散, 在任意点 \mathbf{x} 的支持域内有 n 个场节点, 若已知节点的场函数值为 $u(\mathbf{x}_1), \dots, u(\mathbf{x}_n)$, 则在点 \mathbf{x} 处的估计值可以通过已知节点的场函数值线性逼近

$$\bar{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}_i) = \boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{x}) \mathbf{U}_s, \quad (1)$$

其中 $\boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{x})$ 为系数向量, \mathbf{U}_s 为节点的场函数值向量.

滑动 Kriging 插值方法采用无偏估计和线性回归模型^[30], 其近似函数为

$$\begin{aligned} u^h(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}) a_j + \gamma(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a} + \gamma(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (2)$$

式中 $\mathbf{p}^T(\mathbf{x})$ 为多项式基函数, 对于二维问题通常采用线性基; \mathbf{a} 为待定系数向量. $\gamma(\mathbf{x})$ 是一个期望为 0, 方差为 σ^2 , 协方差不为 0 的随机过程, 表示实际过程与线性回归模型的局部偏差. 采用线性回归模型对 n 个节点进行插值, 则 $\gamma(\mathbf{x})$ 的协方差为

$$\text{cov}\{\gamma(\mathbf{x}_i), \gamma(\mathbf{x}_j)\} = \sigma^2 \mathbf{R}[\mathbf{R}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)], \quad (3)$$

其中 $\mathbf{R}[\mathbf{R}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)]$ 为对角线为 1 的对称相关矩阵; $\mathbf{R}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ 为关于节点 \mathbf{x}_i 和 \mathbf{x}_j 之间的相关函数, 通常取下列高斯函数:

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \exp(-\theta r_{ij}^2), \quad (4)$$

其中 θ 为模型参数, 且有 $\theta \geq 0$; r_{ij} 为节点 \mathbf{x}_i 与 \mathbf{x}_j 之间的距离.

任意点 \mathbf{x} 与所给的个节点之间的相关函数向量为

$$\mathbf{r}^T(\mathbf{x}) = \{R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1), R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2), \dots, R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n)\}^T, \quad (5)$$

在给定的 n 个节点处的函数值已知时, 可用向量表示为

$$\mathbf{U}_s = \{u(\mathbf{x}_1), u(\mathbf{x}_2), \dots, u(\mathbf{x}_n)\}^T. \quad (6)$$

当采样线性回归近似时, 可得

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{P}_m \mathbf{a} + \boldsymbol{\gamma}, \quad (7)$$

式中 $\mathbf{P}_m, \boldsymbol{\gamma}$ 分别为已知节点处基函数值所形成的矩阵及线性逼近的误差向量, 且

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_m &= \begin{Bmatrix} \mathbf{p}(\mathbf{x}_1) \\ \mathbf{p}(\mathbf{x}_2) \\ \vdots \\ \mathbf{p}(\mathbf{x}_n) \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & p_2(\mathbf{x}_1) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_1) \\ p_1(\mathbf{x}_2) & p_2(\mathbf{x}_2) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\mathbf{x}_n) & p_2(\mathbf{x}_n) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_1(\mathbf{x}), \gamma_2(\mathbf{x}), \dots, \gamma_n(\mathbf{x})\}^T. \quad (9)$$

因此(1)式与(2)式之间的误差函数为

$$\begin{aligned} \bar{u}(\mathbf{x}) - u^h(\mathbf{x}) &= \boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{x}) \mathbf{U}_s - u^h(\mathbf{x}) \\ &= \boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{x}) (\mathbf{P}_m \mathbf{a} + \boldsymbol{\gamma}) \\ &\quad - (\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a} + \gamma(\mathbf{x})) \\ &= \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\gamma} - \gamma(\mathbf{x}) + (\mathbf{P}_m^T \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}) \\ &\quad - \mathbf{p}(\mathbf{x}))^T \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (10)$$

要保证无偏估计, 必须满足如下约束条件:

$$\mathbf{P}_m^T \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}) - \mathbf{p}(\mathbf{x}) = 0. \quad (11)$$

(10)式中误差函数的均方差为

$$\begin{aligned} \text{MSE}[\bar{u}(\mathbf{x}) - u^h(\mathbf{x})] \\ = E[\boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{x}) \mathbf{U}_s - u^h(\mathbf{x})]^2. \end{aligned} \quad (12)$$

为了确定最优线性无偏估计, 将(12)式作为目标函数, (11)式作为约束条件, 根据 Lagrange 乘子法将其转化为无条件极小值问题. 通过对向量 $\boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{x})$ 求偏导数为零得到一组方程, 求解此方程组可得到最优线性无偏估计条件下的插值函数为

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{r}^T(\mathbf{x}) \mathbf{R}_Q^{-1} (\mathbf{U}_s - \mathbf{P}_m \boldsymbol{\alpha}), \quad (13)$$

其中

$$\boldsymbol{\alpha} = [\mathbf{P}_m^T \mathbf{R}_Q^{-1} \mathbf{p}]^{-1} \mathbf{P}_m^T \mathbf{R}_Q^{-1} \mathbf{U}_s, \quad (14)$$

式中 \mathbf{R}_Q 为 $n \times n$ 阶矩阵

$$\mathbf{R}_Q = \begin{bmatrix} 1 & R(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & \cdots & R(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_n) \\ R(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) & 1 & \cdots & R(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_1) & R(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_2) & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

为了便于表述, 定义

$$\mathbf{S}_\alpha = (\mathbf{P}_m^T(\mathbf{x}) \mathbf{R}_Q^{-1} \mathbf{P}_m)^{-1} \mathbf{P}_m^T \mathbf{R}_Q^{-1}, \quad (16)$$

$$\mathbf{S}_\beta = \mathbf{R}_Q^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{P}_m \mathbf{S}_\alpha), \quad (17)$$

式中 \mathbf{I} 为 $n \times n$ 阶的单位矩阵. (13)式可改写为

$$u^h(\mathbf{x}) = [\mathbf{P}^T(\mathbf{x}) \mathbf{S}_\alpha + \mathbf{r}^T(\mathbf{x}) \mathbf{S}_\beta] \mathbf{U}_s, \quad (18)$$

或

$$u^h(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}) \mathbf{U}_s = \sum_k \phi_k(\mathbf{x}) u_k, \quad (19)$$

式中 $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}), \phi_k(\mathbf{x})$ 分别为形函数矩阵和形函数, 且有

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}) = \{\phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x}), \dots, \phi_n(\mathbf{x})\}, \quad (20)$$

$$\phi_k(\mathbf{x}) = \sum_j p_j(\mathbf{x}) S_{\alpha jk} + \sum_i r_i(\mathbf{x}) S_{\beta ik}, \quad (21)$$

式中 $S_{\alpha jk}$ 为矩阵 \mathbf{S}_α 的第 j 行、第 k 列元素, $S_{\beta ik}$ 为矩阵 \mathbf{S}_β 的第 i 行、第 k 列元素.

形函数 $\phi_k(\mathbf{x})$ 关于 x 和 y 的导数分别为

$$\begin{aligned}\phi_{k,x} &= \frac{\partial \phi_k(\mathbf{x})}{\partial x} \\ &= \sum_j^m \frac{\partial p_j(\mathbf{x})}{\partial x} S_{\alpha j k} + \sum_i^n \frac{\partial r_i(\mathbf{x})}{\partial x} S_{\beta i k},\end{aligned}\quad (22)$$

$$\begin{aligned}\phi_{k,y} &= \frac{\partial \phi_k(\mathbf{x})}{\partial y} \\ &= \sum_j^m \frac{\partial p_j(\mathbf{x})}{\partial y} S_{\alpha j k} + \sum_i^n \frac{\partial r_i(\mathbf{x})}{\partial y} S_{\beta i k}.\end{aligned}\quad (23)$$

2.2. 与形函数有关的相关参数选择

(4)式中 θ 为待定参数.以一维情况为例,考虑定义在问题域 $\Omega=[0,1]$ 内一组离散节点 $[0,0.25,0.5,0.75,1]$,在 $x=0.5$ 处不同参数对应的形函数及形函数导数如图1和图2所示,其中 θ 取值范围为0.1—500.由图1和图2可见,参数 θ 对形函数及形函数导数影响很大.为了得到最佳的参数 θ ,可通过对已知函数的曲线拟合检验形函数的插值误差.我们研究发现参数 θ 的选取与区域内节点间的距离有关,可用如下公式表示:

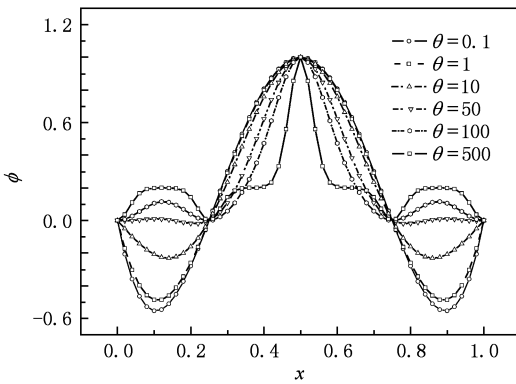


图1 形函数

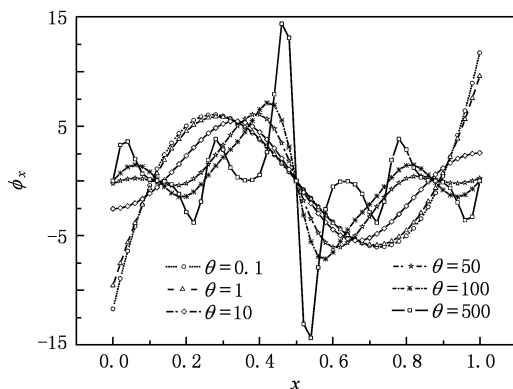


图2 形函数导数

$$\theta = \omega/h^2, \quad (24)$$

其中 ω 为常数, h 为节点间距离.通常 $\omega=0.03-0.2$ 可取得较理想效果,在本文中 ω 取为0.1.

2.3. 形函数的性质

可以证明(21)式所给的形函数满足 Delta 函数性质和一致性条件^[27],即

$$\phi_k(\mathbf{x}_j) = \begin{cases} 1 & (k=j; k, j=1, 2, \dots, n), \\ 0 & (k \neq j; k, j=1, 2, \dots, n), \end{cases} \quad (25)$$

$$\sum_{k=1}^n \phi_k(\mathbf{x}) = 1, \quad (26)$$

$$\sum_{k=1}^n \phi_k(\mathbf{x}) x_k = x. \quad (27)$$

3. 改进的无网格局部 Petrov-Galerkin 法

工程实际问题中的稳态热传导、电磁场和重力场等问题归结为位势问题,而位势问题的研究又可归结为椭圆型偏微分方程的求解问题,这类偏微分方程一般可以简化为 Poisson 方程或 Laplace 方程.

下面以二维 Poisson 方程为例,研究位势问题的改进的无网格局部 Petrov-Galerkin 法.设问题域为 Ω ,边界为 $\Gamma(\Gamma=\Gamma_u \cup \Gamma_i)$,则对应的控制微分方程为

$$\nabla^2 u = p(\mathbf{x}) \quad (\Omega \text{ 内}), \quad (28)$$

$$u = \bar{u} \quad (\Gamma_u \text{ 上}), \quad (29)$$

$$q = \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q} \quad (\Gamma_i \text{ 上}), \quad (30)$$

其中 u 是任意场点的位势函数, $p(\mathbf{x})$ 是给定的源函数, n 是边界上的单位外法线矢量, \bar{u} 是本质边界 Γ_u 上的已知位势函数, \bar{q} 是自然边界 Γ_i 上的法向流量.

将问题域及其边界用 N 个节点离散,在任意节点 I 对应的子域内采用加权残数法,可得

$$\int_{\Omega_q} w_I (\nabla^2 u - p(\mathbf{x})) d\Omega = 0, \quad (31)$$

式中 w_I 是以节点 I 为中心的权函数, Ω_q 为与节点 I 对应的局域子域,应该注意到,式(31)对于任意形状和大小的子域都是成立的,为了计算简单,通常选择简单的矩形或圆形子域.

对(31)式采用分部积分和高斯散度定理,可得

$$\int_{\Gamma_q} w_I n_i u_{,i} d\Gamma - \int_{\Omega_q} (w_{I,i} u_{,i} + w_I p) d\Omega = 0 \quad (i=1,2), \quad (32)$$

局部积分域 Ω_q 的边界 Γ_q 由三部分组成, $\Gamma_q = \Gamma_{qi} \cup \Gamma_{qt} \cup \Gamma_{qu}$, 如图 3 所示, 其中 Γ_{qi} 为积分子域的内部边界, 其与全局边界不相交; Γ_{qt} 为与积分子域相交的那部分自然边界条件; Γ_{qu} 为与积分子域相交的那部分本质边界条件. 因此, (32) 式可写成

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_{qi}} w_l n_i u_{,i} d\Gamma + \int_{\Gamma_{qt}} w_l n_i u_{,i} d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_{qu}} w_l n_i u_{,i} d\Gamma - \int_{\Omega_q} (w_l u_{,i} u_{,i} + w_l p) d\Omega \\ & = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

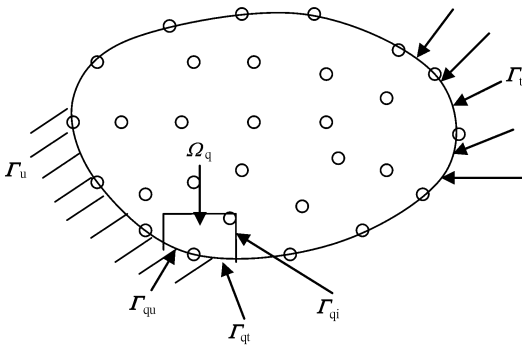


图 3 节点子域的边界条件

为了简化上式, 采用 Heaviside 分段函数作为权函数

$$w(\mathbf{x}) = \begin{cases} c & \mathbf{x} \in \Omega_q, \\ 0 & \mathbf{x} \notin \Omega_q, \end{cases} \quad (34)$$

上式 c 为任意常数, 通常取 $c = 1$.

在 (33) 式中引入自然边界条件, 可得

$$-\int_{\Gamma_{qi}} q d\Gamma - \int_{\Gamma_{qu}} q d\Gamma = \int_{\Gamma_{qt}} \bar{q} d\Gamma + \int_{\Omega_q} p d\Omega. \quad (35)$$

为了得到系统离散方程, 将 (19) 式代入 (35) 式, 可得到节点 l 的系统离散方程

$$-\int_{\Gamma_{qi}} \mathbf{n} \mathbf{B} u d\Gamma - \int_{\Gamma_{qu}} \mathbf{n} \mathbf{B} u d\Gamma = \int_{\Gamma_{qt}} \bar{q} d\Gamma + \int_{\Omega_q} p d\Omega, \quad (36)$$

式中

$$\mathbf{n} = [n_x \quad n_y], \quad (37)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial \phi_n}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (38)$$

在 (36) 式对应的局部区域内采用高斯积分, 则

$$\begin{aligned} & - \sum_{k=1}^{n_{gt}} \hat{w}_k \mathbf{n} \mathbf{B}(\mathbf{x}_{Qk}) \mathbf{u} | \mathbf{J}_{qi}^B | - \sum_{k=1}^{n_{gt}} \hat{w}_k \mathbf{n} \mathbf{B}(\mathbf{x}_{Qk}) \mathbf{u} | \mathbf{J}_{qu}^B | \\ & = \sum_{k=1}^{n_{gt}} \hat{w}_k \bar{q} | \mathbf{J}_{qt}^B | + \sum_{k=1}^{n_g} \hat{w}_k p | \mathbf{J}_q^D |. \end{aligned} \quad (39)$$

式中 n_g 为区域内的高斯点总数, n_{gt} 为边界曲线上的高斯点总数, \hat{w}_k 为高斯点 \mathbf{x}_{Qk} 的权因子, \mathbf{J}_q^D 为局部积分域内面积积分的 Jacobian 矩阵, \mathbf{J}_{qi}^B , \mathbf{J}_{qu}^B 和 \mathbf{J}_{qt}^B 分别为局部积分域边界上曲线积分的 Jacobian 矩阵. (39) 式的矩阵形式为

$$\mathbf{K}_l \mathbf{u} = f_l, \quad (40)$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_l &= - \sum_{k=1}^{n_{gt}} \hat{w}_k \mathbf{n} \mathbf{B}(\mathbf{x}_{Qk}) | \mathbf{J}_{qi}^B | \\ & - \sum_{k=1}^{n_{gt}} \hat{w}_k \mathbf{n} \mathbf{B}(\mathbf{x}_{Qk}) | \mathbf{J}_{qu}^B |, \end{aligned} \quad (41)$$

$$f_l = \sum_{k=1}^{n_{gt}} \hat{w}_k \bar{q} | \mathbf{J}_{qt}^B | + \sum_{k=1}^{n_g} \hat{w}_k p | \mathbf{J}_q^D |. \quad (42)$$

对整个问题域内所有的 N 个场节点应用局部弱形式, 可以得到 N 个独立的线性方程, 将所有这些方程基于节点编号进行组装, 即可得到系统的总体刚度矩阵方程

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}. \quad (43)$$

由于系统的总体刚度矩阵方程是逐点将 (40) 式按行摆放形成的, 因此在施加本质边界条件时, 只需将整体刚度矩阵中本质边界上节点所对应行对角线元素改为 1, 其他元素改为零, 右边向量矩阵对应位置按已知本质边界条件施加, 即可得到修正后的整体刚度矩阵和向量矩阵. 求解修正后的总体刚度矩阵方程, 即可得到所有节点的位势函数值.

4. 数值算例

为了验证本文建立的改进的无网格局部 Petrov-Galerkin 法求解位势问题的有效性, 分别对 Laplace 方程和 Poisson 方程进行数值求解, 并与解析解进行对比.

例 1 考虑矩形域上由 Laplace 方程描述的稳态温度场问题, 对应的微分方程为

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$x \in [0, 5], y \in [0, 10].$$

边界条件为

$$\begin{aligned}
 u(x,0) &= 0, \quad 0 < x < 5, \\
 u(0,y) &= 0, \quad 0 < y < 10, \\
 u(x,10) &= 100\sin(\pi x/10), \quad 0 < x < 5, \\
 \frac{\partial u(5,y)}{\partial n} &= 0, \quad 0 < y < 10.
 \end{aligned}$$

温度场的解析解为

$$u(x,y) = \frac{100\sin(\pi x/10)\sinh(\pi y/10)}{\sinh(\pi)}.$$

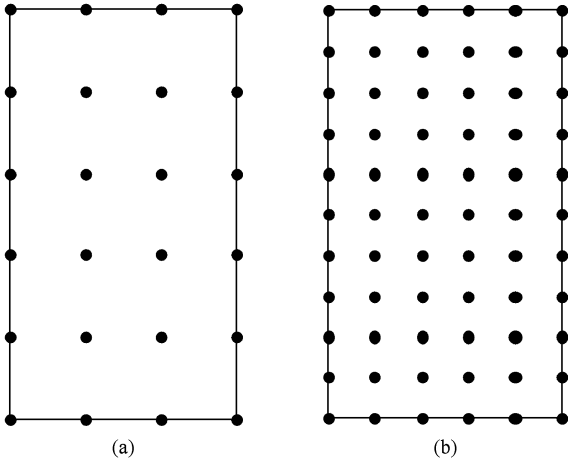


图 4 节点布置 (a)24 个节点;(b)66 个节点

如图 4 所示,在矩形区域 Ω 内分别均匀布置了 4×6 和 6×11 个节点. 图 5 为在 $x=4$ 处温度的数值解与解析解对比;图 6 为在 $y=8$ 处温度的数值解与解析解的对比. 在数值积分过程中节点影响域半径取 3.0,局部积分子域半径取 0.5,采用 2 个高斯积分点. 从图中可以看出本文数值解和解析解比较符合,且 66 个节点的数值解比 24 个节点的数值解更精确.

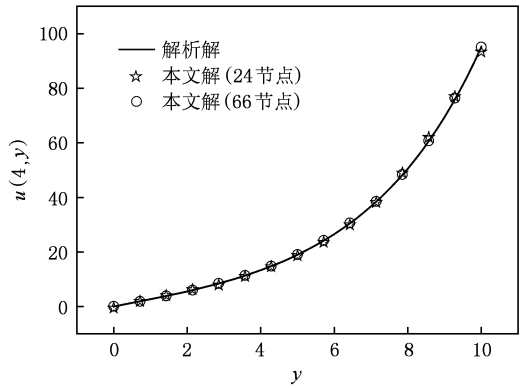


图 5 $x=4$ 处温度的数值解与解析解的比较

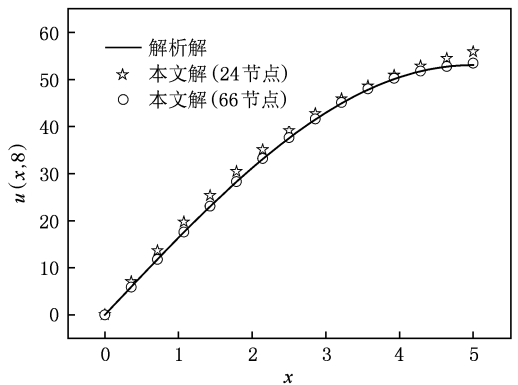


图 6 $y=8$ 处温度的数值解与解析解的比较

例 2 考虑矩形域上由 Poisson 方程描述的稳态温度场问题,对应的微分方程为

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4, \\
 x &\in [0,8], y \in [-3,3].
 \end{aligned}$$

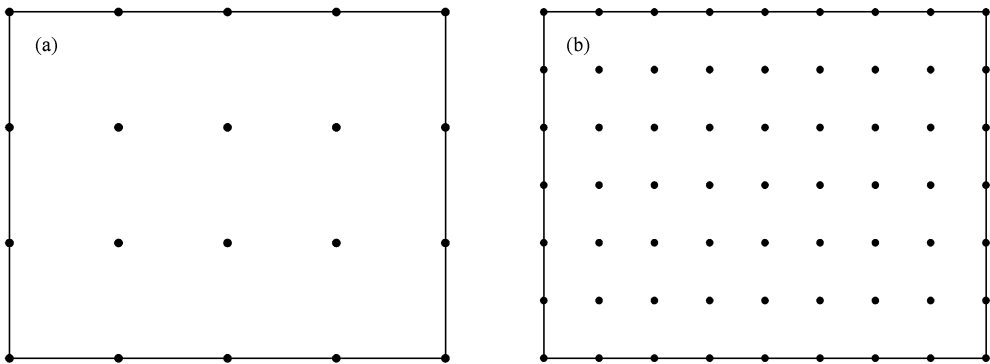


图 7 节点布置 (a)20 个节点;(b)63 个节点

边界条件为

$$\begin{aligned}
 u(0, y) &= y^2, & -3 < y < 3, \\
 u(8, y) &= 64 + y^2, & -3 < y < 3, \\
 u(x, 3) &= x^2 + 9, & 0 < x < 8, \\
 u(x, -3) &= x^2 + 9, & 0 < x < 8.
 \end{aligned}$$

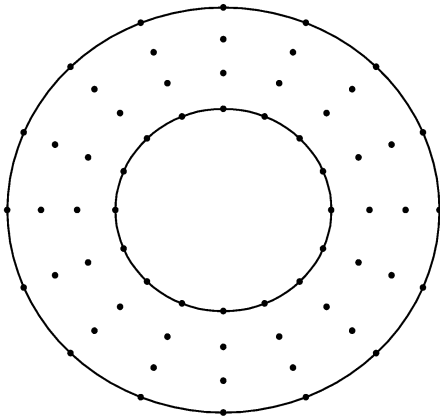
温度场的解析解为

$$u(x, y) = x^2 + y^2.$$

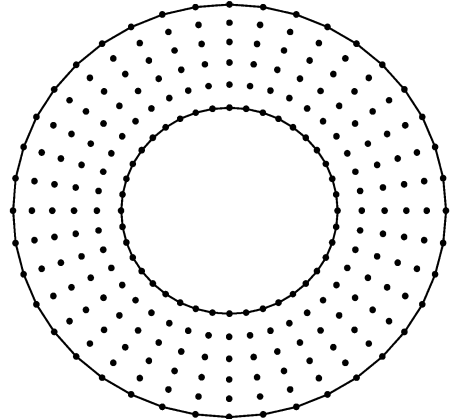
如图 7 所示,在矩形区域内分别均匀布置了 5×4 和 9×7 个节点. 图 8 为在 $x = 3$ 处温度的数值解与解析解比较. 在数值积分过程中节点影响域半径取 3.0,局部积分子域半径取 0.5,采用 2 个高斯积分点. 可以看出本文数值解与解析解非常吻合,且 63 个节点的数值解明显比 20 个节点的数值解好.

例 3 考虑圆环域上由 Poisson 方程描述的稳态温度场问题,对应的微分方程为

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4, \\
 a < r < b, & 0 < \theta < 2\pi.
 \end{aligned}$$



(a)



(b)

图 9 节点布置 (a)64 个节点;(b)240 个节点

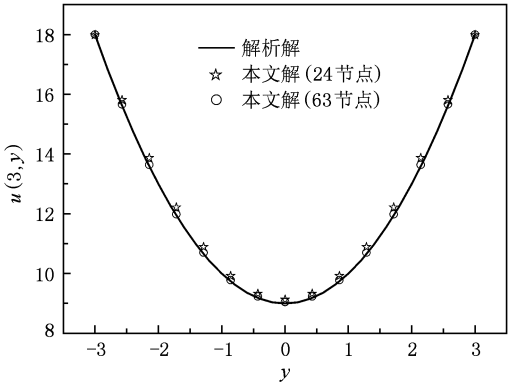


图 8 $x = 3$ 处温度数值解与解析解的比较

边界条件为

$$u(a, \theta) = 0, \quad u(b, \theta) = 0.$$

温度场的解析解为

$$u(r, \theta) = (r^2 - a^2) + (b^2 - a^2) \left(\frac{\log r - \log a}{\log a - \log b} \right).$$

如图 9 所示在圆环域内分别布置了 4×16 和 6×40 个节点. 图 10 为当 $a = 1, b = 2$ 时沿径向温度的数值解与解析解的比较,在数值积分过程中节点

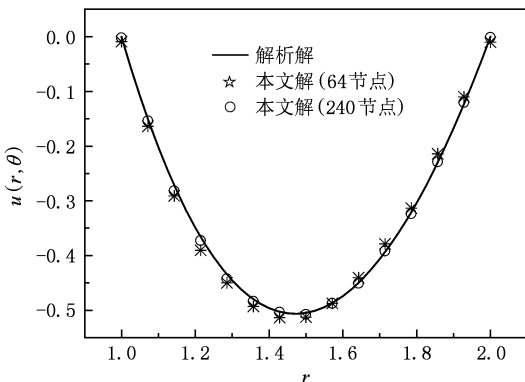


图 10 径向温度的数值解与解析解的比较

影响域半径取 3.0,局部积分子域半径取 0.5,采用 2 个高斯积分点. 可以看出本文数值解和解析解符合较好.

5. 结 论

将滑动 Kriging 插值法与局部 Petrov-Galerkin 法相结合,采用 Heaviside 分段函数作为权函数,建立一种新的基于滑动 kriging 插值的无网格局部 Petrov-Galerkin 法. 将该方法应用于位势问题,并推导相应的离散方程. 由于滑动 Kriging 插值法

构造的形函数满足 Kronecker 函数性质,因此本文建立的改进的无网格局部 Petrov-Galerkin 法可以像有限元法一样直接施加本质边界条件;因为采用 Heaviside 分段函数作为局部弱形式的权函数,所以在计算刚度矩阵时只涉及边界积分,而没有区域积分,明显地减少了计算量.利用本文

建立的位势问题的改进的无网格局部 Petrov-Galerkin 法,数值模拟了由 Poisson 方程或 Laplace 方程描述的稳态温度场问题,并将数值解与解析解进行了比较.数值算例表明本文建立的无网格法具有数值实现简单、计算精度高以及稳定性好等优点.

- [1] Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, Fleming M, Krysl P 1996 *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **139** 3
- [2] Zhang X, Liu Y, Ma S 2009 *Advance in Mechanics* **39** 1 (in Chinese) [张 雄、刘 岩、马 上 2009 力学进展 **39** 1]
- [3] Lu Y Y, Belytschko T, Tabbara M 1995 *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg* **126** 131
- [4] Li S, Hao W, Liu W K 2000 *Comput. Mech.* **25** 102
- [5] Cheng R J, Cheng Y M 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6037 (in Chinese) [程荣军、程玉民 2008 物理学报 **57** 6037]
- [6] Cheng R J, Cheng Y M 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5569 (in Chinese) [程荣军、程玉民 2007 物理学报 **56** 5569]
- [7] Ren H P, Cheng Y M, Zhang W 2009 *Chin. Phys. B* **18** 4065
- [8] Peng M J, Cheng Y M 2009 *Eng. Anal. Bound. Elem.* **33** 77
- [9] Cheng Y M, Peng M J 2005 *Sci. Chin. G Phys. Mech. and Astron.* **48** 641
- [10] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L 1994 *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **37** 229
- [11] Cheng R J, Ge H X 2009 *Chin. Phys. B* **18** 4059
- [12] Liu W K, Jun S, Zhang Y F 1995 *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* **20** 1081
- [13] Chen L, Cheng Y M 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1 (in Chinese) [陈 丽、程玉民 2008 物理学报 **57** 1]
- [14] Onate E, Idelsohn S, Zienkiewicz O Z, Taylor R L 1996 *Inter. J. for Num. Meth. in Engin.* **39** 3839
- [15] Babuska I, Melenk J M 1997 *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **40** 727
- [16] Liu G R, Gu Y T. 2001 *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **50** 937
- [17] Zhang X, Liu X H and Song K Z 2001 *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **51** 1089
- [18] Cheng Y M, Li J H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4463 (in Chinese) [程玉民、李九红 2005 物理学报 **54** 4463]
- [19] Atluri S N, Zhu T L 1998 *Comput. Mech.* **22** 117
- [20] Mukherjee Y X, Mukherjee S 1997 *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **40** 797
- [21] Zhu T, Zhang J, Atluri S N 1999 *Eng. Anal. Bound. Elem.* **23** 375
- [22] Qin Y X, Cheng Y M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3215 (in Chinese) [秦义校、程玉民 2006 物理学报 **55** 3215]
- [23] Zhang Z, Zhao P, Liew K M 2009 *Eng. Anal. Bound. Elem.* **33** 547
- [24] Atluri S N 2004 *The Meshless Method for Domain & BIE Discretizations* (Irvine: University of California)
- [25] Lancaster P L, Salkauskas K 1981 *Math. Comput.* **37** 141
- [26] Krige D G 1951 *Journal of the Chemical Metallurgical and Mining Society of South Africa* **52** 119
- [27] Gu L 2003 *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **56** 1
- [28] Bui Q T, Nguyen N T, Nguyen-Dang H 2009 *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **77** 1371
- [29] Dai K Y, Liu G R, Lim K M, Gu Y T 2003 *Comput. Mech.* **32** 60
- [30] Sacks J, Susannah S B, Welch W J 1989 *Technometrics* **31** 41

Improved meshless local Petrov-Galerkin method for two-dimensional potential problems^{*}

Zheng Bao-Jing Dai Bao-Dong[†]

(*Department of Engineering Mechanics, Taiyuan University of Science and Technology, Taiyuan 030024, china*)

(Received 12 October 2009; revised manuscript received 10 November 2009)

Abstract

In this paper, combining the moving Kriging interpolation method and meshless local Petrov-Galerkin method, an improved meshless local Petrov-Galerkin method is presented, in which the Heaviside step function is used as test function over the local weak form. The present method is applied to two-dimensional potential problems and the corresponding discrete equations are derived. Because the shape functions so-obtained possess the Kronecker delta property, the essential boundary conditions can be enforced as the FEM; furthermore, the Heaviside step function is used as the test function, there is no domain integral, and only a regular boundary integral is involved. In this paper, the choice of the important parameters is studied. Numerical examples show that the present method has simpler numerical procedures and lower computation cost, in addition, the essential boundary conditions can be implemented directly.

Keywords: meshless local Petrov-Galerkin method, moving Kriging interpolation method, Meshless method, potential problems

PACC: 0200, 0260, 4630C

^{*} Project supported by the Natural Science Foundation of Shanxi Province, China (Grant No. 2007011009), the Scientific Research and Development Program of the Shanxi Higher Education Institutions, China (Grant No. 20091131), the Doctoral Startup Foundation of Taiyuan University of Science and Technology, China (Grant No. 200708).

[†] Corresponding author. E-mail: Dai_baodong@126.com