第 59 卷 第 8 期 2010 年 8 月
1000-3290/2010/59(08)/5190-04

物　理　学　报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 59, No. 8, August, 2010

一个广义扰动 mKdV 耦合系统 2 极孤子的近似解*

莫嘉琪† 　姚静荪

（安徽师范大学数学系，芜湖　241000）

（上海高校计算科学 E-研究院 SJTU 研究所，上海　200240）

（2009 年 3 月 11 日收到；2009 年 12 月 4 日收到修改稿）

采用了一个简单而有效的技巧，研究了一类扰动 mKdV 耦合系统. 首先利用变分迭代方法求解一个相应的复值函数微分方程 2-极孤子的近似解. 然后得到了原扰动 mKdV 耦合系统 2-极孤子的近似解.

关键词：孤子，扰动 mKdV 方程，变分迭代

PACC：0230

1. 引　　言

孤波在许多自然科学中有重要的作用，诸如化学、生物学、应用数学、物理学的各分支：流体力学、等离子学、场论、光学等等都有多方面应用[1—8]. 近来研究孤波解出现了许多新的方法，例如齐次平衡法，Jacobi 椭圆函数法，双曲正切法，辅助函数法等[9,10]. 并且许多学者在量子力学、大气物理、散射光波、神经网络等方面也做了许多有关孤波方面的工作[1,2,11]. 近年来，求解一类非线性问题的方法不断地在改进，包括边界层校正法，匹配法，平均法，多重尺度法等等. 变分迭代法[12,13]就是其中一种有效的新方法. 近来许多学者，如 Graef，Kong[14]，Hovhannisyan，Vulanovic[15]，Barbu，Cosma[16]和 Ramos[17]在非线性问题方面做了大量的工作. 利用微分不等式等方法，作者等也做了一类反应扩散[18]，催化控制系统[19]，生态环境[20]，激波[21]，孤波[22—26]，激光脉冲[27,28]，海洋科学[29,30]和大气物理[31—35]等问题. 本文讨论和大气物理、海洋科学[36]有关的一个扰动 mKdV 耦合系统，利用简单而有效的变分迭代方法得到了相应系统的 2 极孤波解的近似展开式.

2. 扰动 mKdV 系统和广义变分迭代

考虑如下一个简单的广义扰动 mKdV 耦合系统：[37,38]

$$u_t - 6u^2u_x + 12uvv_x + 6v^2u_x + u_{xxx} = f(u,v), \tag{1}$$

$$v_t - 6u^2v_x - 12uvu_x + 6v^2v_x + v_{xxx} = g(u,v), \tag{2}$$

其中 f 和 g 为扰动项，它们是关于其变量在对应的区域内为充分光滑的函数.

首先考虑对应的典型 mKdV 系统

$$u_t - 6u^2u_x + 12uvv_x + 6v^2u_x + u_{xxx} = 0, \tag{3}$$

$$v_t - 6u^2v_x - 12uvu_x + 6v^2v_x + v_{xxx} = 0. \tag{4}$$

由文献[33]知，有如下 2 极孤波解：

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{H_1^2 + H_2^2}{G_1^2 + G_2^2}\right)_x,$$

$$v(t,x) = \left(\arctan\frac{H_2^2}{H_1^2} - \arctan\frac{G_2^2}{G_1^2}\right)_x, \tag{5}$$

其中

$$G_1 = 1 - \exp n_1 - \exp n_2 + a_1\exp(n_1 + n_2),$$

$$G_2 = -\exp n_1 - \exp n_2 + b_1\exp(n_1 + n_2),$$

$$H_1 = 1 + \exp n_1 + \exp n_2 + a_1\exp(n_1 + n_2),$$

* 国家自然科学基金（批准号：40676016，40876010），中国科学院知识创新工程重要方向性项目（批准号：KZCX2-YW-Q03-08），LASG 国家重点实验室专项经费，上海市教育委员会 E-研究院建设计划（批准号：E03004），浙江省自然科学基金（批准号：6090164）资助的课题.

† E-mail：mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn

$$H_2 = \exp n_1 + \exp n_2 + b_1 \exp(n_1 + n_2),$$

$$n_i = p_i x - p_i^3 t + m_i, i = 1,2,$$

$$a_1 = \frac{(c_1 c_2 - 1)(p_1 - p_2)^2}{(p_1 + p_2)^2},$$

$$b_1 = \frac{(c_1 + c_2)(p_1 - p_2)^2}{(p_1 + p_2)^2}.$$

而 $c_i, p_i, m_i (i=1,2)$ 为常数.

为了计算方便，设复值函数 $w(t,x)$ 为

$$w(t,x) = u(t,x) + \mathrm{i}v(t,x), \tag{6}$$

其中 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. 于是由(6)式，广义扰动 mKdV 耦合系统(1)，(2)可改写为

$$\frac{\partial w}{\partial t} - 6w^2 \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = h(w), \tag{7}$$

其中 $h(w) = f(u,v) + \mathrm{i}g(u,v)$. 故只需讨论方程(7)的解.

为了得到方程(7)的解，引入如下的一个变分迭代 $F[w]$[12,13]：

$$F[w] = w - \int_0^t \int_0^x \lambda(\tau,\mu) \Big(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 6\bar{w}^2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} - f(\bar{w}) \Big) \mathrm{d}\tau \mathrm{d}\mu, \tag{8}$$

其中 $\bar{w}$ 为 w 的限制变量[12,13]，λ 为 Lagrange 乘子.

计算泛函(8)的变分 δF,

$$\delta F = \delta w - \int_{-\infty}^x (\lambda \delta w)\big|_{\tau = t} \mathrm{d}\mu + \int_0^t \Big(-(\lambda \delta w)\big|_{\eta = x} + \Big(\frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \delta \frac{\partial w}{\partial \mu}\Big)\Big|_{\mu = x} - \Big(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \mu^2} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial \mu}\Big)\Big|_{\mu = x} \Big) \mathrm{d}t + \int_0^t \int_{-\infty}^x \Big(\frac{\partial \lambda}{\partial \tau} + \frac{\partial^3 \lambda}{\partial \mu^3} \Big) \delta w \mathrm{d}\tau \mathrm{d}\mu.$$

令 $\delta F = 0$. 我们有

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \tau} + \frac{\partial^3 \lambda}{\partial \mu^3} = 0, \ (\tau < t), \tag{9}$$

$$\lambda\big|_{\tau = t} = 0,$$

$$\lambda\big|_{\mu = x} = \frac{\partial \lambda}{\partial \mu}\Big|_{\mu = x} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \mu^2}\Big|_{\mu = x} = 0. \tag{10}$$

问题(9)，(10)有解

$$\lambda = (\cos(t - \tau) - 1)(\sin(x - \mu) - (x - \mu)). \tag{11}$$

由(8)，(11)式，构造如下广义变分迭代：

$$w_{n+1} = w_n - \int_0^t \int_{-\infty}^x ((\cos(t - \tau) - 1)(\sin(x - \mu) - (x - \mu)) \Big(\frac{\partial w_n}{\partial \tau} + \frac{\partial^3 w_n}{\partial \mu^3} - 6w_n \frac{\partial w_n}{\partial x} - f(w_n) \Big) \mathrm{d}\tau \mathrm{d}\mu, \ n = 0,1,2,\cdots. \tag{12}$$

由(12)式和广义扰动 *mKdV* 方程(7)的性态知，$w(x,t) = \lim\limits_{n\to\infty} w_n(x,t)$ 就是方程(7)的孤波解.

3. 2 极孤波近似解的计算

由迭代关系式(8)，可以求出方程(7)的 2 极孤波解的逐次近似. 首先以系统(3)，(4)的 2 极孤波解(5)作为方程(7)的零次近似 $w_0(t,x) = u_0(t,x) + \mathrm{i}v_0(t,x)$：

$$u_0(t,x) = \frac{1}{2}\Big(\ln \frac{H_1^2 + H_2^2}{G_1^2 + G_2^2} \Big)_x,$$

$$v_0(t,x) = \Big(\arctan \frac{H_2^2}{H_1^2} - \arctan \frac{G_2^2}{G_1^2} \Big)_x, \tag{13}$$

其中

$$G_1 = 1 - \exp n_1 - \exp n_2 + a_1 \exp(n_1 + n_2),$$

$$G_2 = -\exp n_1 - \exp n_2 + b_1 \exp(n_1 + n_2),$$

$$H_1 = 1 + \exp n_1 + \exp n_2 + a_1 \exp(n_1 + n_2),$$

$$H_2 = \exp n_1 + \exp n_2 + b_1 \exp(n_1 + n_2),$$

$$n_i = p_i x - p_i^3 t + m_i, i = 1,2,$$

$$a_1 = \frac{(c_1 c_2 - 1)(p_1 - p_2)^2}{(p_1 + p_2)^2},$$

$$b_1 = \frac{(c_1 + c_2)(p_1 - p_2)^2}{(p_1 + p_2)^2}.$$

而 $c_i, p_i, m_i (i=1,2)$ 为常数. 将(13)式决定的 $w_0 = u_0 + \mathrm{i}v_0$ 代入(12)式，得到方程(7)的一次近似 $w_1(t,x)$：

$$w_1 = w_0 + \int_0^t \int_{-\infty}^x ((\cos(t - \tau) - 1)(\sin(x - \mu) - (x - \mu)) f(w_0) \mathrm{d}\tau \mathrm{d}\mu, \tag{14}$$

再将(14)式代入(12)式，可得方程(7)的二次近似 $w_2(t,x)$：

$$w_2 = w_0 + \int_0^t \int_{-\infty}^x ((\cos(t - \tau) - 1)(\sin(x - \mu) - (x - \mu)) f(w_0) \mathrm{d}\tau \mathrm{d}\mu - \int_0^t \int_{-\infty}^x ((\cos(t - \tau) - 1)(\sin(x - \mu) - (x - \mu)) \Big(\frac{\partial w_1}{\partial \tau} + \frac{\partial^3 w_1}{\partial \mu^3} - 6w_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} - f(w_1) \Big) \mathrm{d}\tau \mathrm{d}\mu. \tag{15}$$

上式中的 w_0, w_1 分别由(13)，(14)式表示.

用相同的方法,由(12)式可以得到 $w_n(t,x)$.

分别取 $w_n(t,x)$ 的实部和虚部 $u_n(t,x)$,$v_n(t,x)$,便得到了广义扰动 mKdV 耦合系统(1),(2)的 2 极孤波解任意次近似表示式.

4. 例

现设广义扰动 mKdV 耦合系统(1),(2)的扰动函数项分别为 $f=\exp u$,$g=\exp v$. 这时广义扰动 mKdV 耦合系统(1),(2)对应复值方程为

$$\frac{\partial w}{\partial t}-6w^2\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=\exp w. \tag{16}$$

由(13)式,这时方程(16)的 2-极孤波解的零次近似 $w_0(t,x)$ 为

$$w_0(t,x)=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{H_1^2+H_2^2}{G_1^2+G_2^2}\right)_x+\mathrm{i}\left(\arctan\frac{H_2^2}{H_1^2}-\arctan\frac{G_2^2}{G_1^2}\right)_x. \tag{17}$$

利用广义变分迭代方法,由(14)式得到 2 极孤波解的一次近似 $w_1(t,x)$ 为

$$\begin{aligned}w_1(t,x)=&\frac{1}{2}\left(\ln\frac{H_1^2+H_2^2}{G_1^2+G_2^2}\right)_x+\mathrm{i}\left(\arctan\frac{H_2^2}{H_1^2}-\arctan\frac{G_2^2}{G_1^2}\right)_x\\&+\int_0^t\int_{-\infty}^x((\cos(t-\tau)-1)(\sin(x-\mu)\\&-(x-\mu))\exp\left(\frac{1}{2}\left(\ln\frac{H_1^2+H_2^2}{G_1^2+G_2^2}\right)_x\right.\\&\left.+\mathrm{i}\left(\arctan\frac{H_2^2}{H_1^2}-\arctan\frac{G_2^2}{G_1^2}\right)_x\right)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\mu.\end{aligned}\tag{18}$$

利用广义变分迭代方法,由(17),(18)式得到 2 极孤波解的二次近似 $w_2(t,x)$ 为

$$\begin{aligned}w_2(t,x)=&\frac{1}{2}\left(\ln\frac{H_1^2+H_2^2}{G_1^2+G_2^2}\right)_x+\mathrm{i}\left(\arctan\frac{H_2^2}{H_1^2}-\arctan\frac{G_2^2}{G_1^2}\right)_x\\&+\int_0^t\int_{-\infty}^x((\cos(t-\tau)-1)\\&\times(\sin(x-\mu)-(x-\mu))\\&-\int_0^t\int_{-\infty}^x((\cos(t-\tau)-1)\\&\times(\sin(x-\mu)-(x-\mu))\\&\times\left(\frac{\partial w_1}{\partial\tau}+\frac{\partial^3 w_1}{\partial\mu^3}-6w_1\frac{\partial w_1}{\partial x}\right.\\&\left.-\exp w_1\right)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\mu.\end{aligned}\tag{19}$$

上式中的 w_1 由(18)式表示,即

$$G_1=1-\exp n_1-\exp n_2+a_1\exp(n_1+n_2),$$
$$G_2=-\exp n_1-\exp n_2+b_1\exp(n_1+n_2),$$
$$H_1=1+\exp n_1+\exp n_2+a_1\exp(n_1+n_2),$$
$$H_2=\exp n_1+\exp n_2+b_1\exp(n_1+n_2),$$
$$n_i=p_ix-p_i^3t+m_i,i=1,2,$$
$$a_1=\frac{(c_1c_2-1)(p_1-p_2)^2}{(p_1+p_2)^2},$$
$$b_1=\frac{(c_1+c_2)(p_1-p_2)^2}{(p_1+p_2)^2}.$$

其中 $c_i,p_i,m_i(i=1,2)$ 为常数.

继续利用迭代关系式,可以得到方程(16)的 2 极孤波解更高次的近似解 $w_n(t,x)$. 再分别取 $w_n(t,x)$ 的实部和虚部 $u_n(t,x)$,$v_n(t,x)$,便得到了广义扰动 mKdV 耦合系统(1),(2)在 $f=\exp u$,$g=\exp v$ 情况下的 2 极孤波解任意次近似表示式.

5. 结 论

孤波描述的是一类复杂的自然现象. 需要将它简化为基本模式并用近似方法去求解它. 广义变分迭代方法就是一个简单而有效的方法. 广义变分迭代方法不同于一般的数值方法. 用广义变分迭代方法求得的解还可以继续进行解析运算. 还能进一步通过解析运算,对孤波解作相应的定性和定量方面的分析.

[1] McPhaden M J, Zhang D 2002 *Nature* **415** 603

[2] Gu D F, Philander S G H 1997 *Science* **275** 805

[3] Loutsenko I 2006 *Comm. Math. Phys.* **268** 465

[4] Gedalin M 1998 *Phys. Plasmas* **5** 127

[5] Ma S H, Qiang J Y, Fang J P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 620 (in Chinese) [马松华、强继业、方建平 2007 物理学报 **56** 620]

[6] Ma S H, Qiang J Y, Fang J P 2007 *Comm. Theor. Phys.* **48** 662

[7] Parkes E J 2008 *Chaos Solitons Fractals* **38** 154

[8] Li X Z, Wang, M L *Phys. Lett.* A **361** 115

[9] Wang M L 1995 *Phys. Lett.* A **199** 169

[10] Sirendaoreji J S 2003 *Phys. Lett.* A, **309** 387

[11] Pan L X, Zuo W M, Yan J R 2005 *Acta Phys. Sin.* 54 **1** (in Chinese)［潘留仙、左伟明、颜家壬 2005 物理学报 **54** 1］

[12] He J H, 2006 *International J. Modern Phys.* **20B** 1141

[13] He J H 2002 *Approximate Analytical Methods in Engineering and Sciences* (Shengzhou: Henan Science and Technology Press) (in Chinese)［何吉欢 2002 工程和科学计算中的近似非线性分析方法（郑州 河南科学技术出版社）］

[14] Graef J R, Kong L 2008 *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* **145** 489

[15] Hovhannisyan G, Vulanovic R 2008 *Nonlinear Stud.* **15** 297

[16] Barbu L, Cosma E 2009 *J. Math. Anal. Appl.* **351** 392

[17] Ramos M, 2009 *J. Math. Anal. Appl.* **352** 246

[18] Mo J Q 1989 *Science in China*, A **32** 1306

[19] Mo J Q, Lin W T 2008 *J, Sys. Sci. and Complexity* **20** 119

[20] Mo J Q, Wang H 2007 *Acta Ecologica Sinica* **27** 4366

[21] Mo J Q, Zhu J, Wang H 2003 *Prog. Nat. Sci.* **13** 768

[22] Mo J Q, Zhang W J, He M 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1843 (in Chinese)［莫嘉琪、张伟江、何 铭 2007 物理学报 **56** 1843］

[23] Mo J Q 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 010204-1

[24] Mo J Q 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 060202-1

[25] Mo J Q 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 695 (in Chinese)［莫嘉琪 2009 物理学报 **58** 695］

[26] Mo J Q, Cheng Yan 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4379 (in Chinese)［莫嘉琪 2009 物理学报 **58** 4379］

[27] Mo J Q 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2930 (in Chinese)［莫嘉琪 2009 物理学报 **58** 2930］

[28] Mo J Q 2009 *Science in China*, G **52** 1007

[29] Mo J Q, Lin W T, Wang H, 2008 *Chin. Geographical Sci.* **18** 193

[30] Mo J Q, Lin W T, Wang H 2007 *Prog. Nat. Sci.* **17** 230

[31] Mo J Q, Lin W T, Lin Y H 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3127 (in Chinese)［莫嘉琪、林万涛、林一骅 2007 物理学报 **56** 1843］

[32] Mo J Q, Wang H, Lin W T, Lin Y H 2006 *Chin. Phys.* **15** 671

[33] Mo J Q, Lin W T, Wang H 2007 *Chin. Phys.* **16** 951

[34] Mo J Q, Lin W T 2008 *Chin. Phys.* B **17** 370

[35] Mo J Q, Lin W T, Wang H 2007 *Chin. Phys.* **16** 951

[36] Yang J R, Mao J J 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 1527

[37] Gao Y, Tang X Y 2007 *Commum. Theor. Phys.* **48** 961

[38] Yang J R, Mao J J 2008 *Chin. Phys.* B **17** 4337

Approximate solution of 2-soliton for generalized disturbed mKdV coupled system*

Mo Jia-Qi† Yao Jing-Sun

(*Department of Mathematics, Anhui Normal University, Wuhu* 241000, *China*)

(*Division of Computational Science, E-Institutes of Shanghai Universities at SJTU, Shanghai* 200240, *China*)

(Received 11 March 2009; revised manuscript received 4 December 2009)

Abstract

The approximate solution for a class of disturbed mKdV coupled system is considered taking a simple and valid technique. We first solve approximate solution of the 2-soliton for a corresponding complex-valued differential equation using the variational iteration method. And then the approximate solution of the 2-soliton for a original disturbed mKdV coupled system is obtained.

Keywords: soliton, disturbed mKdV equation, variational iteration

PACC: 0230

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 40676016, 40876010), The Main Direction Program of Knowledge Innovation of Chinese Academy of Sciences (Grant No. KZCX2-YW-Q03-08), the LASG State Key Laboratory Special Fund and E-Institutes of Shanghai Municipal Education Commission (Grant No. E03004), the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. 6090164).

† E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn