

# 双凹盘形解开口膜泡形状的解析法研究\*

李树玲 张劭光<sup>†</sup>

(陕西师范大学物理学与信息技术学院, 西安 710062)

(2009 年 9 月 12 日收到; 2009 年 11 月 25 日收到修改稿)

随着开口膜泡在实验上的发现, 对开口泡形状的数值及解析研究逐渐成为该领域的一个热点. 讨论了如何由欧阳双凹盘形闭合解构造开口泡的解析解的问题. 首先将开口泡要满足的三个不独立的边界条件简化为两个独立的边界条件, 给出高斯测地曲率  $k_g = -2$ , 边界条件 2 可满足, 然后由边界条件 1 得到确定膜泡边界的几何方程. 进而讨论了由欧阳双凹盘解可构造的开口泡的各种可能形状, 得到了三类管型拓扑解, 它们是外凸管形解、类环管形解、类悬链面管形解.

**关键词:** 开口膜泡, 边界条件, 解析法

**PACC:** 0240, 8710, 8720

## 1. 引 言

双亲分子水溶液中形成的类脂双层膜可以呈现多种闭合形状, 成熟了的红血球细胞, 平衡时表现为闭合的双凹盘形, 病态时也在临床上表现出多种形状<sup>[1]</sup>. 以往人们认为只有闭合膜泡是稳定的, 然而实验上研究发现, 一些有机化学试剂如 Talin (一种蛋白质), 能够在类脂膜上打开稳定的孔洞. 1998 年, 日本的 Saitoh 等人<sup>[2]</sup>使用一定浓度的 Talin 分子将闭合膜泡打开. 实验上 Steck 等人也已观测到开口的红细胞<sup>[3,4]</sup>. 近年来, 理论上对开口膜泡的研究也取得了一些进展, Capovilla 等人<sup>[5]</sup>用复杂的场论观点研究了一般情况下开口泡的形状方程和边界条件, 而 Tu 和 Ouyang<sup>[6]</sup>将外微分法用于处理曲面上的变分问题, 认为完整的自由能为 Helfrich 自由能加上曲面能和线张力能, 导出了自发曲率 (SC) 模型<sup>[7]</sup>下简单的开口泡形状方程和边界条件, 这种方法因避免了复杂张量的计算而更容易被接受. Umeda 等人<sup>[8]</sup>在面积差 (ADE) 模型下用数值法研究了开口膜泡, 得到了一个洞的杯形膜泡和两个洞的管形膜泡.

与闭合泡一样, 开口泡的欧拉-拉格朗日方程是一高阶非线性偏微分方程, 目前只知道有限的特解. Naito, Okuda 和 Ouyang 曾找到一个双凹盘形的

闭合解<sup>[9]</sup>, 此解在一定的参数条件下还代表周期性的结点形解<sup>[10]</sup>. Liu 等人进一步探讨了该解代表的其他可能的闭合形状<sup>[11]</sup>. 该解能否用于构造开口形解析解, 目前还没有讨论. 本文讨论能否及如何用欧阳双凹盘形解构造开口膜泡, 其关键在于能否找到满足三个边界条件的合适边界及确定边界的方程.

本文第二部分先讨论闭合膜泡的形状方程及欧阳双凹盘形解和结点形解析解. 在第三部分讨论开口膜泡要满足的形状方程. 关于膜曲面的形状方程, 除了闭合泡需考虑膜内外压强差外, 开口泡与闭合泡所满足的形状方程是相同的, 不同之处是开口泡在边界处还要满足附加的平衡条件, 即边界条件. 说明这三个边界条件只有两个是独立的. 在第四部分我们进而讨论如何用欧阳双凹盘形解构造满足边界条件的开口泡. 我们发现对应不同的约化自发曲率, 有三类具有管型拓扑的开口泡. 进而在一些典型的约化自发曲率值下讨论了开口泡形状及能量与线张力系数的关系.

## 2. 欧阳双凹盘形解及结点形解析解

任何处于平衡状态的物理系统, 它的能量必然处在局域最小值, 也就是说该系统在平衡状态时能

\* 国家自然科学基金 (批准号: 10374063) 资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯联系人. E-mail: zhangsg@snnu.edu.cn

量必然小于该系统在微小变形状态下的能量. 在 Helfrich 的自发曲率模型<sup>[7]</sup>中, 膜泡自由能可以表达如下:

$$\begin{aligned} F &= F_c + \Delta P \int dV + \lambda \oint dA \\ &= \iint \left[ \frac{k_c}{2} (2H - C_0)^2 + k_g K \right] dA \\ &\quad + \Delta P \int dV + \lambda \oint dA, \end{aligned} \quad (1)$$

式中膜泡的法线方向规定以向内为正方向;  $F_c$  表示曲率弹性能量;  $\Delta P$  和  $\lambda$  可以看作是考虑了体积和面积约束后的拉格朗日乘子;  $k_c$  是泡中膜的弯曲刚度;  $H = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)$  是膜表面的平均曲率 ( $C_1, C_2$  是膜表面的两个主曲率);  $C_0$  是描述来自膜表面的可能不对称性或是膜与周围环境的非对称性参数, 即自发曲率;  $K = C_1 C_2$  是高斯曲率;  $k_g$  是沿着开口边缘弧线的高斯测地曲率;  $dA$  表示膜的面积微元,  $dV$  表示体积微元, 面积元和体积元变分见文献<sup>[12,13]</sup>.

将(1)式无量纲化  $\hat{F} = F/k_c$  得到

$$\begin{aligned} \hat{F} &= \hat{F}_c + \Delta \hat{P} \int dV + \hat{\lambda} \oint dA \\ &= \iint \left[ \frac{1}{2} (2H - C_0)^2 + \hat{k}_g K \right] dA \\ &\quad + \Delta \hat{P} \int dV + \hat{\lambda} \oint dA, \end{aligned} \quad (2)$$

式中  $\hat{F}_c = F_c/k_c$ ,  $\hat{\lambda} = \lambda/k_c$ ,  $\Delta \hat{P} = \Delta P/k_c$ ,  $\hat{k}_g = k_g/k_c$ .

由自由能一阶变分为 0, 即

$$\delta \hat{F} = \delta(\hat{F}_c + \Delta \hat{P} V + \hat{\lambda} A) = 0, \quad (3)$$

可得到膜泡形状的普适方程<sup>[12,13]</sup>

$$\begin{aligned} 2 \nabla^2 H + (2H - C_0)(2H^2 - 2K + C_0 H) \\ - 2\hat{\lambda} H - \Delta \hat{P} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

对于具有轴对称性的曲面, 比较方便的办法是引用曲面上一点到对称轴 ( $z$  轴) 的距离  $\rho$  作为独立参量, 将该点曲面周线的切线与对称轴之间交角的余角  $\psi$  看作是  $\rho$  的函数,  $\psi = \psi(\rho)$ , 这时普适形状方程(4)式变为一常微分方程<sup>[14]</sup>

$$\begin{aligned} \cos^3 \psi \frac{d^3 \psi}{d\rho^3} - 4 \sin \psi \cos^2 \psi \frac{d\psi}{d\rho} \frac{d^2 \psi}{d\rho^2} \\ + \cos \psi \left( \sin^2 \psi - \frac{1}{2} \cos^2 \psi \right) \left( \frac{d\psi}{d\rho} \right)^3 \\ + \frac{2 \cos^3 \psi}{\rho} \frac{d^2 \psi}{d\rho^2} - \frac{7 \sin \psi \cos^2 \psi}{2\rho} \left( \frac{d\psi}{d\rho} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + \left[ \frac{\sin^2 \psi - 2 \cos^2 \psi}{2\rho^2} - \left( \frac{\lambda}{k_c} + \frac{C_0^2}{2} \right) \right. \\ \left. + \frac{2C_0 \sin \psi}{\rho} \right] \cos \psi \left( \frac{d\psi}{d\rho} \right) \\ + \left[ \frac{\sin \psi (1 + \cos^2 \psi)}{2\rho^3} - \left( \frac{\lambda}{k_c} + \frac{C_0^2}{2} \right) \right. \\ \left. \times \frac{\sin \psi}{\rho} - \frac{\Delta P}{k_c} \right] = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

(5) 式是一个三阶非线性常微分方程, Naito, Okuda 和 Ouyang<sup>[9]</sup> 找到一个能满足它的双凹盘形的解析解. 它的具体形式是

$$\sin \psi = \rho(a \ln \rho + b), \quad (6)$$

式中  $a$  和  $b$  为常量.  $a$  的量纲为长度的倒数, 由形状方程和对膜泡所规定的符号来决定. 将(6)式求导并代入(5)式可以得到

$$\begin{aligned} 2(a - C_0) \left( \frac{\sin \psi}{\rho} \right)^2 + [(C_0 - a)^2 + 2\hat{\lambda}] \frac{\sin \psi}{\rho} \\ - \left[ \Delta \hat{P} - \frac{1}{2} a (C_0^2 - a^2) - a\hat{\lambda} \right] = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

由于(7)式对任何值的  $\psi$  角都应能得到满足, 因此要求  $a - C_0 = 0$ ,  $(a - C_0)^2 + 2\hat{\lambda} = 0$ ,  $\Delta \hat{P} - \frac{1}{2} a (C_0^2 - a^2) - a\hat{\lambda} = 0$ , 于是在  $a = C_0$ ,  $\hat{\lambda} = \Delta \hat{P} = 0$  的条件下, 双凹盘形解析解(6)式成为

$$\sin \psi = \rho(C_0 \ln \rho + b). \quad (8)$$

当  $C_0$  在  $(-\infty, +\infty)$  范围内,  $\rho$  在  $(0, +\infty)$  范围内取不同数值时, (8)式将给出不同的图形, 也就是不同形状的膜泡.

标识膜泡形状的是  $C_0$  和膜泡表面积  $A$  这两个量, 引入一个标度长度  $R_0 = \sqrt{A/(4\pi)}$  的量, 称为约化半径, 由于标度不变性, 不同尺度的膜泡, 只要约化自发曲率  $c_0 = C_0 R_0$  相同, 即具有相同的能量<sup>[15-18]</sup>. 故决定膜泡形状只有一个独立参量  $c_0$ .

函数  $\sin \psi(\rho)$  的极值位于  $\rho_m$  处, 并且满足关系式

$$\frac{d}{d\rho} \sin \psi(\rho) = C_0 \ln \rho + C_0 + b = 0,$$

解得

$$\rho_m = \exp\left(-\frac{C_0 + b}{C_0}\right), \quad (9)$$

则  $\sin \psi(\rho)$  的极值

$$\sin \psi(\rho_m) = \rho_m (C_0 \ln \rho_m + b) = -C_0 \rho_m. \quad (10)$$

当  $\sin \psi(\rho_m) = -1$  时,  $C_0 \approx 3.59$ ,  $\sin \psi(\rho) - \rho$  的图像如图 1 所示, 图 1(a) 为  $0 < C_0 < 3.59$  时, 图形出现

在 $[0, 1]$ 区域内, 并且 $0 < C_0 < 2.42$ 时膜泡形状为双凹盘形, $C_0 \approx 2.42$ 时出现自交; 图1(b)和(c)分别为 $C_0 > 3.59$ 时和 $C_0 < 0$ 时, 图形可在 $\rho \in (0, \rho_1)$ 和 $\rho \in (\rho_2, \rho_C)$ 两个区域内出现, 在 $(0, \rho_1)$ 区域内是类长椭球形, 在 $(\rho_2, \rho_C)$ 区域内是自交结点形圆柱.

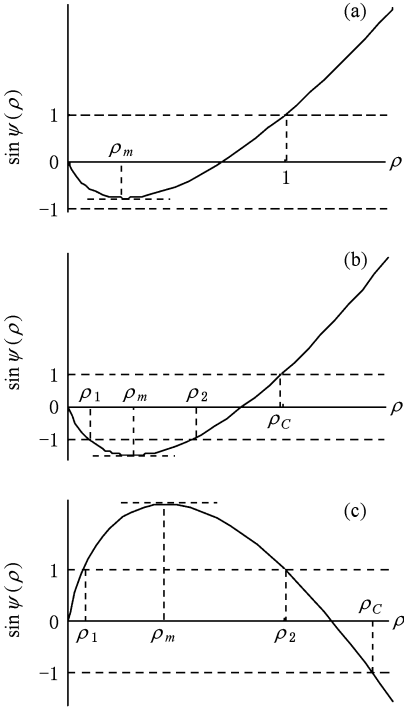


图1  $\sin\psi(\rho) \cdot \rho$  图像以及各种图形出现区域图 (a)  $0 < C_0 < 3.59$ ; (b)  $C_0 > 3.59$ ; (c)  $C_0 < 0$

### 3. 用欧阳双凹盘形及周期性结点解构造开口膜泡

对于开口泡的情形, 给能量以贡献的来源稍有不同, 因为开口的缘故, 表示膜两侧或是泡内外的渗透压为零,  $\Delta P$  将不再出现. 并且因为开口的存在, 导致边缘上的能量不同于膜表面的能量, 从而需引入边缘线张力系数 $\gamma^{[19,20]}$ , 其上的线张力能表示为

$$F_\gamma = \int \gamma ds, \quad (11)$$

$ds$  代表开口边缘的长度微元.

将开口泡表面设为  $\Sigma$ , 边缘的闭合曲线设为  $\partial\Sigma$ , 膜泡表面的法线方向选取向内为正方向, 边界  $\partial\Sigma$  的正方向符合右手定则, 则此类开口膜泡的能量由两部分组成,

$$\hat{F} = \hat{F}_c + \hat{F}_\gamma = \iint_\Sigma \left[ \frac{1}{2} (2H - C_0)^2 + \hat{k}_g K \right] dA$$

$$+ \int_{\partial\Sigma} \hat{\gamma} ds, \quad (12)$$

式中  $\hat{\gamma}$  为重标度后的线张力系数:  $\hat{\gamma} = \gamma R_0 / k_c$ .

对(12)式进行一阶变分并加入面积约束  $\delta(F + \lambda A) = 0$  这样开口泡的普适形状方程成为

$$\nabla^2 H + 2H(H^2 - K) + C_0 K - \hat{\lambda} H = 0, \quad (13)$$

对于轴对称的膜泡来说, 上式还可写为

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{ds} (r \dot{H}) + 2H(H^2 - K) + C_0 K - \hat{\lambda} H = 0, \quad (14)$$

其中  $\dot{H} = \frac{dH}{ds}$  表示平均曲率对弧长的微分.

开口泡边缘上还要满足附加的边界条件<sup>[6]</sup>

边界条件 1

$$2\dot{H} + \hat{\gamma} \frac{\sin\psi}{\rho} = 0, \quad (15)$$

边界条件 2

$$(2H - C_0) + \hat{k}_g \frac{\sin\psi}{\rho} = 0, \quad (16)$$

边界条件 3

$$2H(H - C_0) + \hat{k}_g K + \hat{\lambda} + \hat{\gamma} \frac{\cos\psi}{\rho} = 0. \quad (17)$$

首先证明轴对称膜泡的三个边界条件只有两个是独立的. 即由边界条件 1 和边界条件 2 可推出边界条件 3. 将(14)式乘以  $r \cos\psi$  后对弧长  $s$  积分, 再除以  $r \cos\psi$ , 并且应用(15) — (17)式得到<sup>[8]</sup>

$$2\dot{H} - \frac{\sin\psi}{\rho} N = 0, \quad (18)$$

$$N = \frac{r}{\cos\psi} \left[ -H \left( \dot{\psi} - \frac{\sin\psi}{\rho} \right) - C_0 \frac{\sin\psi}{\rho} + \lambda \right]. \quad (19)$$

联立(15)式和(18)式可得  $N = -\gamma$ , 将该式代入(19)式得

$$\frac{\rho}{\cos\psi} \left[ -H \left( \dot{\psi} - \frac{\sin\psi}{\rho} \right) - C_0 \frac{\sin\psi}{\rho} + \hat{\lambda} \right] + \hat{\gamma} = 0, \quad (20)$$

(20)式两边同乘以  $\frac{\cos\psi}{\rho}$ , 并将  $\dot{\psi} = 2H - \frac{\sin\psi}{\rho}$  代入,

得到

$$-2H^2 + 2H \frac{\sin\psi}{\rho} - C_0 \frac{\sin\psi}{\rho} + \hat{\lambda} + \hat{\gamma} \frac{\cos\psi}{\rho} = 0, \quad (21)$$

同时将  $K = \frac{\dot{\psi} \sin\psi}{\rho}$  代入(17)式, 得到

$$2H(H - C_0) + \hat{k}_g \frac{\dot{\psi} \sin\psi}{\rho}$$

$$+ \hat{\lambda} + \hat{\gamma} \frac{\cos\psi}{\rho} = 0, \quad (22)$$

将(16)式代入(22)式同样可得到

$$\begin{aligned} & -2H^2 + 2H \frac{\sin\psi}{\rho} - C_0 \frac{\sin\psi}{\rho} + \hat{\lambda} \\ & + \hat{\gamma} \frac{\cos\psi}{\rho} = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

比较(21)式和(23)式可知,由边界条件 1 即(15)式和边界条件 2 即(16)式可以推得边界条件 3 即(17)式,说明边界条件 3 并不独立. 只要选择适当的边界位置,使之同时满足边界条件 1 和边界条件 2 即可.

现在讨论由双凹盘形及周期性结点解构造开口膜泡,由参数方程(8)可得它的平均曲率为

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(C_1 + C_2) \\ &= \frac{1}{2} \left( \cos\psi \frac{d\psi}{d\rho} + \frac{\sin\psi}{\rho} \right) \\ &= C_0 \ln\rho + b + \frac{C_0}{2}, \end{aligned} \quad (24)$$

将(24)式代入边界条件 2 (即(16)式),得到

$$a - C_0 + (k_g + 2)(a \ln\rho + b) = 0. \quad (25)$$

因为前面已知  $a = C_0$ ,可见当取  $k_g = -2$  时边界条件 2 可自然满足,这样膜泡的边界位置只需满足边界条件 1 即是我们所要构造的开口泡.

下面再对边界条件 1 做变换,因为  $\dot{H}$  还可写为

$$\dot{H} = \frac{dH}{ds} = \frac{dH}{d\rho} \frac{d\rho}{ds} = \frac{dH}{d\rho} \cos\psi = \frac{a}{\rho} \cos\psi, \quad (26)$$

则边界条件 1 可化为

$$2\dot{H} + \hat{\gamma} \frac{\sin\psi}{\rho} = 2 \frac{a}{\rho} \cos\psi + \hat{\gamma} \frac{\sin\psi}{\rho} = 0, \quad (27)$$

也就是

$$\tan\psi = -\frac{2a}{\hat{\gamma}}. \quad (28)$$

因为  $a$  必须取正值, $\hat{\gamma}$  的物理意义是线张力系数,也必须取正值,由(28)式可以看出只有当  $\tan\psi < 0$  时才会有开口泡解,因此只要在闭合泡或周期形泡上找到满足(28)式的  $\psi$  角位置,就确定了由此闭合泡构造的开口泡的边界.

### 4. 开口泡形状及能量分析

根据以上推导结合双凹盘形解析解(即(8)式)和边界条件 1((15)式),并令  $b = 1$ ,即可在闭合解或周期形解图形上截取满足边界条件的开口泡.  $\sin\psi$  的取值限制在区间  $[-1, +1]$ ,因此各种图形也就存在于不同的  $\rho$  值区域<sup>[13]</sup>. 发现对应不同的约化自发曲率,有三类具有管型拓扑的开口泡. 表 1 列

表 1  $c_0$  取不同数值时双凹盘形解对应的各种开口泡及相应的闭合或周期形泡

开口泡类型	$C_0$	$c_0 = C_0 R_0$	$\hat{\gamma}$	开口泡形状	闭合或周期形泡形状
(a) 外凸管形解	-0.5	-0.20	0.70		
(b) 类环管形解	1.8	1.49	6.61		
	3.0	2.50	5.94		
	4.0	3.00	3.51		
(c) 类悬链面管形解	4.0	1.20	0.89		

出了  $c_0$  取不同值时欧阳双凹盘形解构造的开口泡及相应的闭合或周期形泡,表中加粗的部分表示满足边界条件的开口泡在闭合或周期形泡上所对应的部分. 其中 (a) 为由类椭球形闭合泡构造的外凸管形解, (b) 为分别由双凹圆盘形闭合泡、自交双凹圆盘形闭合泡和结点形周期解构造的类环管形解, (c) 为由结点形周期解构造的类悬链面管形解.

开口泡总能量是自发曲率能和线张力能共同作用的结果,当线张力系数非常小的时候,开口泡的能量有可能小于相应的闭合泡的能量,因而在膜泡上可以形成稳定的孔洞<sup>[8]</sup>. 图 2(a)–(e) 是在给定的一些典型自发曲率下,不同分支膜泡的能量随线张力系数变化的关系图:(a)  $c_0 = -0.2$  时的外凸管形拓扑解,能量随线张力系数的变化开始比较急剧,  $\hat{\gamma} \approx 1.23$  时能量达到最大值  $\hat{F}/4\pi \approx 0.72$ , 以后

趋于平缓. 图中亦给出了一些线张力系数所对应的膜泡外形图,发现随线张力系数增大,该分支形状闭合. 虚线表示  $c_0 = -0.20$  时的闭合泡能量,在  $\hat{\gamma} \approx 0.14$ ,  $\hat{F}/4\pi \approx 0.44$  时与开口泡能量相交;(b)  $c_0 = 1.49$  时的类环管形拓扑解,能量随线张力系数基本呈线性关系变化,  $\hat{\gamma} < 6.50$  时该分支无开口泡解;(c)  $c_0 = 2.50$  时的类环管形拓扑解,能量随线张力系数基本呈线性关系变化,  $\hat{\gamma} < 3.51$  时该分支所得膜泡自交;(d)  $c_0 = 3.00$  时的类环管形拓扑解,能量随线张力系数呈线性关系变化,  $\hat{\gamma} < 2.88$  时该分支所得膜泡自交;(e)  $c_0 = 1.20$  时的类悬链面管形拓扑解,在其所允许的线张力系数范围内能量变化最小(0.1 左右),但能量起点较高(约为 2.93). 类环管形拓扑解、类悬链面管形拓扑解能量始终高于它们各自所对应的闭合或周期形膜泡的能量,因此没

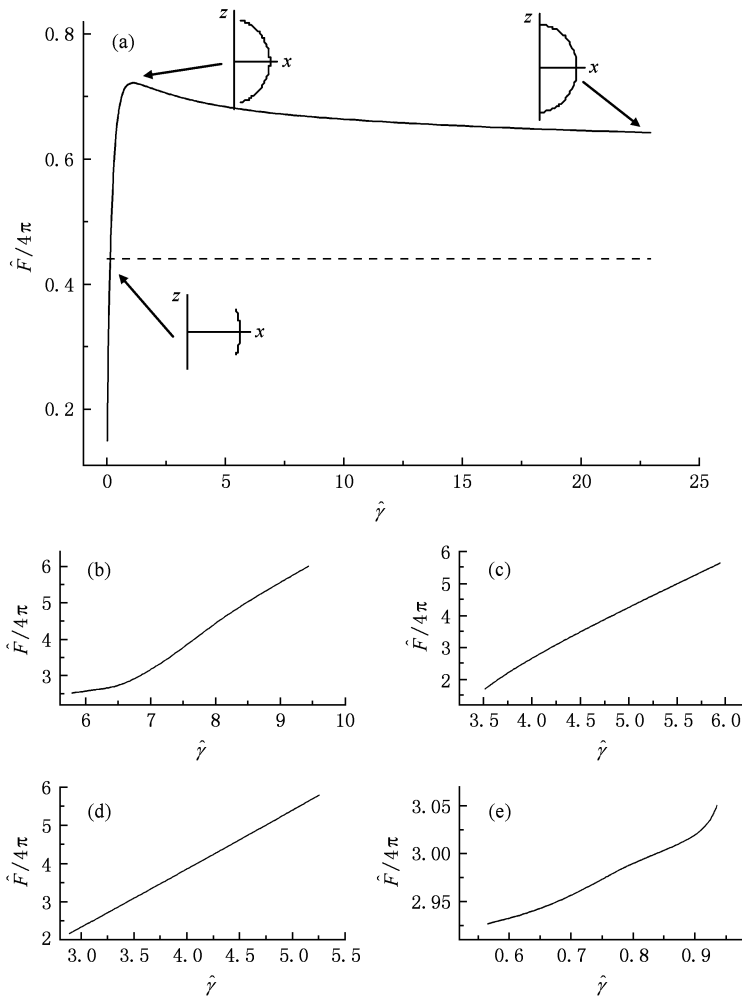


图 2 膜泡能量随线张力系数变化的关系图 (a)  $c_0 = -0.2$  时的外凸管形拓扑解,虚线表示  $c_0 = -0.2$  时的闭合泡能量. 图中亦给出了一些线张力系数所对应的膜泡外形图;(b)  $c_0 = 1.49$  时的类环管形拓扑解;(c)  $c_0 = 2.50$  时的类环管形拓扑解;(d)  $c_0 = 3.00$  时的类环管形拓扑解;(e)  $c_0 = 1.20$  时的类悬链面管形拓扑解

有给出开口泡与相应的闭合或周期形膜泡的能量对比图. 将图 2(a)–(e) 比较可总结出如下三点: 线张力系数越大, 能量越高; 外凸管形拓扑解的线张力系数只能取较小值且能量最低; 类环管形拓扑解、类悬链面管形拓扑解能量变化基本呈线性关系, 其中由自交结点形圆柱构造的类环管形拓扑解斜率最大, 变化最剧烈.

## 5. 结 论

首先将开口泡要满足的三个不独立的边界条

件简化为两个独立的边界条件, 并且计算时发现当高斯测地曲率  $k_g = -2$  时, 边界条件 2 可自然满足. 然后由边界条件 1 得到确定边界的几何方程, 因而可由欧阳双凹盘解构造开口泡形状. 进而讨论了开口泡的各种可能形状, 得到了对应不同的约化自发曲率有三类管形拓扑解, 即外凸管形解、类环管形解、类悬链面管形解, 给出了外凸管形解的形状随线张力系数的变化关系, 发现随线张力系数增大, 该分支形状闭合. 并分析了各种图形的能量与线张力系数之间的关系, 结果表明线张力系数越大能量越高.

- [1] Bassis M 1973 *Living Blood Cells and Their Ultrastructure* (Berlin: Springer) p10
- [2] Saitoh A, Takiguchi K, Tanaka Y, Hotani H 1998 *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **95** 1026
- [3] Lieber M R, Steck T L 1982 *J. Biol. Chem.* **257** 11651
- [4] Lieber M R, Steck T L 1982 *J. Biol. Chem.* **257** 11660
- [5] Capovilla R, Guven J, Santiago J A 2002 *Phys. Rev. E* **66** 021607
- [6] Tu Z C, Ouyang Z C 2003 *Phys. Rev. E* **68** 061915
- [7] Helfrich W 1973 *Z. Naturforsch. C* **28** 693
- [8] Umeda T, Suezaki Y 2005 *Phys. Rev. E* **71** 011913
- [9] Naito H, Okuda M, Ouyang Z C 1993 *Phys. Rev. E* **48** 2304
- [10] Naito H, Okuda M, Ouyang Z C 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74** 4345
- [11] Liu Q H, Zhou H J, Liu J X, Ouyang Z C 1999 *Phys. Rev. E*

**60** 3227

- [12] Ouyang Z C, Helfrich W 1987 *Phys. Rev. Lett.* **59** 2486
- [13] Ouyang Z C, Helfrich W 1988 *Phys. Rev. A* **39** 5280
- [14] Hu J G, Ouyang Z C 1993 *Phys. Rev. E* **47** 461
- [15] Seifert U, Berndl K, Lipowsky R 1991 *Phys. Rev. A* **44** 1182
- [16] Miao L, Seifert U, Wortis M, Döbereiner H G 1994 *Phys. Rev. E* **49** 5389
- [17] Zhou X H, Zhang S G 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5568 (in Chinese) [周晓华、张劭光 2006 物理学报 **55** 5568]
- [18] Zhou X H, Zhang S G, Yang J Q, Qu X M, Liu Y S, Wang S G 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6137 (in Chinese) [周晓华、张劭光、杨继庆、屈学民、刘渊声、王斯刚 2007 物理学报 **56** 6137]
- [19] Helfrich W 1974 *Phys. Lett. A* **50** 115
- [20] Lipowsky R 1993 *Biophys. J.* **64** 1133

# An analytical solution for opening-up vesicle based on the circular biconcave shape<sup>\*</sup>

Li Shu-Ling Zhang Shao-Guang<sup>†</sup>

(College of Physics and Information Technology, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)

(Received 12 September 2009; revised manuscript received 25 November 2009)

## Abstract

The numerical and the analytical studies of the opening-up vesicles have become hot topics since the experimental observation by A. Saitoh et al. This paper deals with how to obtain the analytical solution of an opening-up shape from the Ouyang biconcave analytical solution. We find only two of the three boundary conditions for the vesicle rims to be independent. The second boundary condition can be satisfied by the Gaussian bending modulus  $k_g = -2$ , then we obtain the geometric equation for the rims of an opening-up vesicle from the first boundary condition. By analyzing the Ouyang analytic solutions for a closed circular biconcave vesicle and periodic noduloidlike vesicle, we obtain three kinds of shapes with tube topology, which are the convex tube, the toruslike tube, and the catenoidlike tube.

**Keywords:** opening-up vesicles, boundary conditions, analytical solution

**PACC:** 0240, 8710, 8720

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10374063).

† Corresponding author. E-mail: zhangsg@snnu.edu.cn