第 59 卷 第 8 期 2010 年 8 月
1000-3290/2010/59(08)/5209-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 59, No. 8, August, 2010

完整系统 Tzénoff 方程的 Mei 对称性直接导致的另一种守恒量*

郑世旺[1)†] 解加芳[2)] 陈向炜[1)] 杜雪莲[1)]

1)(商丘师范学院物理与信息工程系,商丘 476000)

2)(北方工业大学理学院,北京 100144)

(2009 年 7 月 19 日收到;2009 年 10 月 24 日收到修改稿)

研究了完整力学系统 Tzénoff 方程 Mei 对称性直接导致的另一种守恒量,给出了这种守恒量的函数表达式和导致这种守恒量的确定方程. 利用该方法比以往更易找到守恒量. 最后举例说明了新结果的应用.

关键词: 完整力学系统, Tzénoff 方程, Mei 对称性,守恒量

PACC: 0320

1. 引 言

对称性原理是物理学中更高层次的法则,动力学系统中的守恒量更能揭示深刻的物理规律. 对称性与守恒量之间有内在关系,通过研究动力学系统的对称性可以找出系统的守恒量. 近代利用对称性寻求守恒量的方法主要有: Noether 对称性方法[1—7]、Lie 对称性方法[6—16]、Mei 对称性方法[10,16—24]和三者的统一对称性方法[25,26],以及刚出现的 Lagrange 对称性方法[27—29]. 这种方法一般是借助于动力学系统的 Lagrange 函数或 Hamilton 函数来求系统的 Noether 守恒量、Hojman 守恒量或 Mei 守恒量. 这些守恒量都是我们熟知的守恒量, 利用对称性寻求新的守恒量有重要意义. 最近文献[20]研究表明,Lagrange 系统的 Mei 对称性可直接导致有别于 Mei 守恒量的另一种守恒量. 在分析力学中有多种运动微分方程,如 Lagrange 方程、Nielsen 方程、Appell 方程和 Tzénoff 方程等,其中 Tzénoff 方程最为简捷,只要给出系统的 Tzénoff 函数,研究系统的运动规律是比较方便的. Tzénoff 方程的对称性与守恒量的研究较少,现刚有了初步成果[22, 30—34],文献[22]通过 Noether 等式间接地求出了完整系统 Tzénoff 方程 Mei 对称性所对应的 Noether 守恒量,但该方法需把 Tzénoff 方程进行 Lagrange 转换,以求出系统所对应的 Lagrange 函数,故其过程较为复杂. 文献[30—32]不需要 Tzénoff 方程的 Lagrange 转换,直接利用各系统所对应的 Tzénoff 方程,通过特殊 Lie 对称性或特殊 Mei 对称性条件下的 Lie 对称性分别求出 Tzénoff 方程在非完整系统、有多余坐标完整系统和单面约束完整系统所对应的 Hojman 守恒量. 本文给出了完整系统 Tzénoff 方程的 Mei 对称性所直接导致的另一种新守恒量,该守恒量不同于以往研究过的守恒量,也不同于文献[33]给出的守恒量. 求解该守恒量不需要 Lagrange 函数或 Hamilton 函数,其结构方程和守恒量直接由 Tzénoff 函数来表达,如果完整系统 Tzénoff 方程的 Mei 对称性的生成元和规范函数满足本文给出的结构方程,那么该力学系统就一定存在这种新守恒量,这种新守恒量在本文的算例中具有明显的物理意义.

2. 完整系统的 Tzénoff 方程

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$来确定,系统的 Tzénoff 函数为

$$K=\frac{1}{2}(\ddot{T}-3\ddot{T}_0)-Q_s\,\ddot{q}_s, \qquad (1)$$

其中 T 为系统的动能,$\ddot{T}_0$ 为把 T 中广义速度作为常

* 国家自然科学基金(批准号:10972127),北方工业大学科研基金资助的课题.

† E-mail: hi_zsw@ sina. com

数时对时间 t 的二阶导数，Q_s 为广义力，则完整系统在广义坐标下的 Tzénoff 方程为[22]

$$\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_s} = 0 \quad (s = 1,\cdots,n), \tag{2}$$

展开(2)式能得到

$$\bar{q}_s = \beta_s(t, q_s, \dot{q}_s, \ddot{q}_s). \tag{3}$$

3. 完整系统 Tzénoff 方程的 Mei 对称性所直接导致的另一种新守恒量

取时间和坐标的群的无限小变换

$$t^* = t + \Delta t,$$
$$q_s^*(t^*) = q_s(t) + \Delta q_s \quad (s = 1,\cdots,n), \tag{4}$$

或其展开式

$$t^* = t + \varepsilon\xi_0(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}),$$
$$q_s^*(t^*) = q_s(t) + \varepsilon\xi_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}), \tag{5}$$

其中 ε 是一无限小参数，ξ_0，ξ_s 为无限小生成元. 于是有

$$\frac{\mathrm{d}q_s^*}{\mathrm{d}t^*} = \frac{\mathrm{d}q_s + \varepsilon\mathrm{d}\xi_s}{\mathrm{d}t + \varepsilon\mathrm{d}\xi_0} = \dot{q}_s + \varepsilon(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0) + O(\varepsilon^2),$$

$$\frac{\mathrm{d}^2q_s^*}{\mathrm{d}t^{*2}} = \ddot{q}_s + \varepsilon[(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)^{\cdot} - \ddot{q}_s\dot{\xi}_0] + O(\varepsilon^2),$$

$$\frac{\mathrm{d}^3q_s^*}{\mathrm{d}t^{*3}} = \dddot{q}_s + \varepsilon\{[(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)^{\cdot} - \ddot{q}_s\dot{\xi}_0]^{\cdot} - \dddot{q}_s\dot{\xi}_0\} + O(\varepsilon^2),$$

$$K^* = K\left(t^*, q^*, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}, \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^{*2}}, \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^{*3}}\right) = K\left(t, \boldsymbol{q}, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{q}}{\mathrm{d}t^2}, \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{q}}{\mathrm{d}t^3}\right) + \varepsilon X^{(3)}(K) + O(\varepsilon^2), \tag{6}$$

(6)式中

$$X^{(3)}(K) = \frac{\partial K}{\partial t}\xi_0 + \frac{\partial K}{\partial q_s}\xi_s + \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0) + \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_s}[(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)^{*} - \ddot{q}_s\dot{\xi}_0] + \frac{\partial K}{\partial \dddot{q}_s}\{[(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)^{\cdot} - \ddot{q}_s\dot{\xi}_0]^{\cdot} - \dddot{q}_s\dot{\xi}_0\}.$$

因为用变换后的动力学函数代替变换前的动力学函数，运动微分方程的形式仍保持不变的一种对称性称为 Mei 对称性[10]，故可得到完整系统 Tzénoff 方程 Mei 对称性的定义和判据.

定义 如果用变换后的 Tzénoff 函数 K^* 代替变换前的函数 K 时，方程(2)的形式保持不变，那么这种不变性称为 Tzénoff 方程的 Mei 对称性.

判据 若完整力学系统的 Tzénoff 函数 K，在群的无限小变换的生成元 ξ_0，ξ_s 满足方程

$$\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_k}[X^{(3)}(K)] = 0 \quad (k = 1,\cdots,n), \tag{7}$$

则 Tzénoff 方程具有 Mei 对称性.

于是可进一步得到下面的定理.

定理 对于完整力学系统 Tzénoff 方程 Mei 对称性的生成元 ξ_0，ξ_s，如果能找到规范函数 G 满足如下结构方程

$$\frac{\partial X^{(3)}(K)}{\partial t} + \dot{\beta}_s\frac{\partial X^{(3)}(K)}{\partial \ddot{q}_s} - E_s[X^{(3)}(K)]\dot{q}_s + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}G = 0, \tag{8}$$

则 Tzénoff 方程的 Mei 对称性将直接导致守恒量

$$I = X^{(3)}(K) - \frac{\partial X^{(3)}(K)}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s + G = \mathrm{const}. \tag{9}$$

(8)式中

$$E_s = \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\right) - \frac{\partial}{\partial q_s}.$$

证明 对(9)式求导并考虑到 Tzénoff 方程 Mei 对称性情况下的判据方程(7)成立，有

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{\mathrm{d}}I}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial X^{(3)}(K)}{\partial t} + \frac{\partial X^{(3)}(K)}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial X^{(3)}(K)}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s + \beta_s\frac{\partial X^{(3)}(K)}{\partial \ddot{q}_s} + \dot{\beta}_s\frac{\partial X^{(3)}(K)}{\partial \dddot{q}_s} \\
&\quad - \left[\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial X^{(3)}(K)}{\partial \dot{q}_s}\right)\right]\dot{q}_s - \frac{\partial X^{(3)}(K)}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}G \\
&= \frac{\partial X^{(3)}(K)}{\partial t} + \frac{\partial X^{(3)}(K)}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial X^{(3)}(K)}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s + \beta_s\frac{\partial X^{(3)}(K)}{\partial \ddot{q}_s} + \dot{\beta}_s\frac{\partial X^{(3)}(K)}{\partial \dddot{q}_s} \\
&\quad - \left[\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial X^{(3)}(K)}{\partial \dot{q}_s}\right)\right]\dot{q}_s - \frac{\partial X^{(3)}(K)}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s \\
&\quad - \frac{\partial X^{(3)}(K)}{\partial t} - \dot{\beta}_s\frac{\partial X^{(3)}(K)}{\partial \dddot{q}_s} + E_s[X^{(3)}(K)]\dot{q}_s \\
&= -\left\{\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial X^{(3)}(K)}{\partial \dot{q}_s}\right) - \frac{\partial X^{(3)}(K)}{\partial q_s}\right\}\dot{q}_s
\end{aligned}$$

$$+E_s[X^{(3)}(K)]\dot{q}_s = 0.$$

证毕

4. 应用例子

已知完整力学系统的 Tzénoff 函数为

$$K = \frac{1}{2}m_1(\ddot{q}_1^2 + \dot{q}\dddot{q}) + \frac{1}{2}m_2(\ddot{q}_2^2 + \dot{q}\dddot{q}_2),$$

其中 m_1, m_2 为常量，试求该力学系统的 Mei 对称性直接导致的新守恒量(9)式，并讨论其物理意义.

解 把 Tzénoff 函数代入完整力学系统的 Tzénoff 方程(2)，得 $m_1\ddot{q}_1 = 0, m_2\ddot{q}_2 = 0$，有

$$\ddot{q}_1 = 0,\ \ddot{q}_2 = 0, \tag{10}$$

所以

$$\beta_1 = \ddot{q}_1 = 0,\ \beta_2 = \ddot{q}_2 = 0. \tag{11}$$

因完整系统 Tzénoff 方程(2)成立，所以有

$$\begin{aligned} X^{(3)}(K) = &\frac{1}{2}m_1\ddot{q}_1(\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\dot{\xi}_0) \\ &+ \frac{1}{2}m_2\ddot{q}_2(\dot{\xi}_2 - \dot{q}_2\xi) \\ &+ \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1\{[(\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\dot{\xi}_0)^{\cdot} - \ddot{q}_1\dot{\xi}_0]^{\cdot} \\ &- \ddot{q}_1\dot{\xi}_0\} + \frac{1}{2}m_2\dot{q}_2\{[(\dot{\xi}_2 - \dot{q}_2\dot{\xi}_0)^{\cdot} \\ &- \ddot{q}_2\dot{\xi}_0]^{\cdot} - \ddot{q}_2\dot{\xi}_0\}. \end{aligned} \tag{12}$$

把(12)式代入完整力学系统 Tzénoff 方程 Mei 对称性的判据方程(7)，可找到生成元

$$\xi_0 = 1, \xi_1 = \dot{q}_1, \xi_2 = \dot{q}_2. \tag{13}$$

因(10)，(11)式的关系，有

$$\begin{aligned} &\dot{\xi}_1 = \dot{\xi}_2 = 0, \\ &\dot{\beta}_1 = \dot{\beta}_2 = 0\ X^{(3)}, \qquad (K) = 0, \\ &E_s[X^{(3)}(K)] = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

显然 Mei 对称性判据方程(7)成立，系统具有 Mei 对称性. 结构方程(8)给出规范函数

$$\begin{aligned} &G_1 = \dot{q}_1 + \dot{q}_2, \\ &G_2 = \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2. \end{aligned} \tag{15}$$

由(9)式可得到系统的新守恒量

$$I_1 = \dot{q}_1 + \dot{q}_2 = \mathrm{const}, \tag{16}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2 = \mathrm{const}. \tag{17}$$

守恒量(16)式说明系统在做匀速运动，守恒量(17)式说明系统具有动能守恒，所以本文给出的新守恒量(9)式在该例中具有明显的物理意义.

[1] Noether A E 1918 *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math. Phys.* KI II 235

[2] Liu D 1991 *Sci. Chin* **34** 419

[3] Li Z P 1993 *Classical and Quantum Dynamics of Constrained Systems and Their Symmetrical Properties* (Beijing: Beijing Polytechnic University Press) (in Chinese) [李子平 1993 经典和量子约束系统及其对称性质(北京：北京工业大学出版社)]

[4] Chen X W, Li Y M 2003 *Chin. Phys.* **12** 936

[5] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) p90 (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用(北京:科学出版社)第 90 页]

[6] Luo S K 2007 *Chin. Phys.* **16** 3182

[7] Lou Z M 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2475 (in Chinese) [楼智美 2007 物理学报 **56** 2475]

[8] Chen X W, Liu C M, Li Y M 2006 *Chin. Phys.* **15** 470

[9] Luo S K, Jia L Q, Cai J L 2005 *Commun. Theor. Phys.* **43** 193

[10] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量(北京:北京理工大学出版社)]

[11] Fu J L, Chen L Q, Xie F P 2004 *Chin. Phys.* **13** 1611

[12] Xia L L, Li Y C, Wang X J 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 28 (in Chinese) [夏丽莉、李元成、王显军 2009 物理学报 **58** 28]

[13] Liu C, Liu S X, Mei F X, Guo Y X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6709 (in Chinese) [刘　畅、刘世兴、梅凤翔、郭永新 2008 物理学报 **57** 6709]

[14] Zhang H B, Chen L Q, Gu S L 2004 *Commun. Theor. Phys.* **42** 321

[15] Zhang Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3054 (in Chinese) [张　毅 2007 物理学报 **56** 3054]

[16] Fang J H, Ding N, Wang P 2007 *Chin. Phys.* **16** 887

[17] Mei F X 2000 *J. Beijing Inst. Technol.* **9** 120

[18] Jia L Q, Luo S K, Zhang Y Y 2008 *Acta Phys . Sin.* **57** 2006 (in Chinese) [贾利群、罗绍凯、张耀宇 2008 物理学报 **57** 2006]

[19] Zhang Y, Mei F X 2003 *Chin. Phys.* **12** 936

[20] Fang J H 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3617 (in Chinese) [方建会 2009 物理学报 **58** 3617]

[21] Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 177

[22] Zheng S W, Jia L Q, Yu H S 2006 *Chin. Phys.* **15** 1399

[23] Ge W K 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6714 (in Chinese) [葛伟宽 2008 物理学报 **57** 6714]

[24] Yang X F, Jia L Q 2010 *Chin. Phys.* B. **19** 30305
[25] Xu X J, Qin M C, Mei F X 2005 *Chin. Phys.* **14** 1287
[26] Li Y C, Xia L L, Wang X M 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6732 (in Chinese) [李元成、夏丽莉、王小明 2009 物理学报 **58** 6732]
[27] Mei F X, Wu H B 2009 *Acta Phys . Sin.* **58** 5916 (in Chinese) [梅凤翔、吴惠彬 2009 物理学报 **58** 5916]
[28] Wu H B, Mei F X 2010 *Chin. Phys.* B **19** 3
[29] Zhang Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7447 (in Chinese) [张 毅 2009 物理学报 **58** 7447]
[30] Zheng S W, Jia L Q 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 661 (in Chinese) [郑世旺、贾利群 2007 物理学报 **56** 661]
[31] Zheng S W, Xie J F, Jia L Q 2006 *Chin. Phys. Lett.* **23** 2924
[32] Zheng S W, Xie J F, Jia L Q 2007 *Commun. Theor. Phys.* **48** 43
[33] Zheng S W, Xie J F, Zhang Q H 2007 *Chin. Phys. Lett.* **24** 2164
[34] Zheng S W, Xie J F, Chen W C 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 809

Another kind of conserved quantity induced directly from Mei symmetry of Tzénoff equations for holonomic systems*

Zheng Shi-Wang[1)†] Xie Jia-Fang[2)] Chen Xiang-Wei[1)] Du Xue-Lian[1)]

1) (*Department of Physics and information engineering, Shangqiu Teachers College, Shangqiu* 476000, *China*)

2) (*College of Science, North China University of Technology, Beijing* 100144, *China*)

(Received 19 July 2009; revised manuscript received 24 October 2009)

Abstract

Another kind of conserved quantity deduced from Mei symmetry of Tzénoff equations for holonomic systems is studied. The expression of this conserved quantity and the determining equation to induce this conserved quantity are presented. The results indicate that this new method is easier to find conserved quantities than methods reported previously. Finally, application of this new result is presented by a practical example.

Keywords: holonomic systems, Tzénoff equations, Mei symmetry, conserved quantity
PACC: 0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10972127), the foundation of North China University of Technology, China.

† E-mail: hi_zsw@sina.com